HOCHSCHULE KONSTANZ
TECHNIK, WIRTSCHAFT UND GESTALTUNG

INSTITUT FÜR NATURWISSENSCHAFTEN UND MATHEMATIK

1 Einführung in die Fehlerbehandlung (v110315)

Vorbemerkung:

> Für den korrekten Umgang mit Messabweichungen (auch: „Messfehlern") gibt es Normen, beispielsweise die DIN 1319.
> Im Detail kann es unterschiedliche Normen für verschiedene Anwendungsgebiete geben.
> Des Weiteren werden die Normen von Zeit zu Zeit überarbeitet, so dass sich wiederum Änderungen in der Behandlung der Messabweichungen ergeben.
> Dessen ungeachtet basieren alle Normen auf gewissen Ideen und mathematischen Prinzipien.
> Ziel dieser Einführung ist es, diese grundlegenden Prinzipien zu verstehen und anzuwenden.
> Ist dieses Ziel erreicht, ist der Schritt zum Verständnis und zur Anwendung konkreter Normen klein.

1.1 *Messung: Schätzwert und Fehler*

Der „wahre Wert" einer physikalischen Größe kann niemals exakt bestimmt werden. Er kann nur durch Vergleich mit einem Einheitsmaß „geschätzt" werden. Wir nennen diese Schätzung meist „Messung".
Die Qualität eines Messergebnisses wird durch die Angabe der Genauigkeit („des Fehlers") angegeben.

Fehler = Messunsicherheit
= Messungenauigkeit
= Messabweichung

Der Begriff „Messfehler" oder „Fehler" bedeutet nicht unbedingt, dass man bei der Messung etwas falsch gemacht hat!

Ziel einer Messung:

> Bestimmung des besten Schätzwertes für den wahren Wert
> Angabe der Unsicherheit (des "Fehlers") der Messung

Nebenbemerkung:
Die folgende Aussage: „Wir haben die Größe einer Person Otto zu 1,81 m gemessen; die Messungenauigkeit betrug 2 cm"
bedeutet: Möglicherweise ist die Person tatsächlich 1,81 m groß. Die Messung hätte dann den wahren Wert seiner Größe geliefert. Aber wir können das nicht wissen!
Vielleicht ist die Person auch 1,80 oder 1,83 m groß.
Sogar 1,75 m wären möglich.

1.2 *Fehlerarten*

1.2.1 Systematischer Fehler *u*

Kennzeichen: Alle Messwerte liegen auf einer Seite des wahren Wertes

Ursachen: Fehlerhafte Messmittel
Unvollkommener Beobachter
Umwelteinflüsse
Ungenaues mathematisches Modell

Der systematische Fehler u muss abgeschätzt werden („raten").
Beispielsweise gibt die Güteklasse eines Messgerätes („k = 1,5") an, dass der systematische Fehler 1,5% des Skalenbereiches beträgt.

1.2.2 Statistischer Fehler *m*

Kennzeichen: Die Werte der einzelnen Messungen schwanken scheinbar zufällig um den wahren Wert.
Durch mehrmaliges Wiederholen der Messung (Messreihe) kann der statistische Fehler beeinflusst (reduziert) werden.

1.2.3 Messreihe und Ausreißer

Definition einer Messreihe: Die gleiche Messung wird unter möglichst identischen Randbedingungen N-mal wiederholt.

Findet sich in einer Messreihe ein Ausreißer, also ein Wert, der „offensichtlich falsch ist", so wird dieser gestrichen und bei der Auswertung nicht berücksichtigt.
Der Ausreißer wird nicht ausradiert; er bleibt im Messprotokoll sichtbar!
Geben Sie eine Begründung, weshalb der Wert nicht berücksichtigt wird!

(Es könnte sich ja später herausstellen, dass der Wert doch eine korrekte Messung war!)

1.2.4 Gesamtfehler Δx

Der gesamte Fehler Δx ergibt sich als Summe der beiden oben genannten Fehler:

$$\Delta x = u + m$$

Er wird auf 2 signifikanten Stellen angegeben und stets aufgerundet.

1.3 *Darstellung eines Messergebnisses*

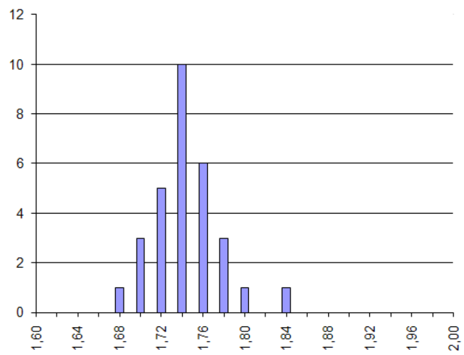
1.3.1 Histogramm

Im Histogramm wird die Häufigkeit eines Messwertes über dem Messwert aufgetragen. Ein Histogramm sollte idealerweise nur ein Maximum aufweisen. Nur dann ist die Berechnung eines Mittelwertes sinnvoll.

Beispiel: Die Größe einer Studenten wird N = 30 mal gemessen.
Es ergibt sich folgende Messreihe:

1,74 m	1,68 m	1,74 m
1,70 m	1,72 m	1,75 m
1,77 m	1,75 m	1,75 m
1,74 m	1,74 m	1,74 m
1,75 m	1,79 m	1,73 m
1,72 m	1,74 m	1,78 m
1,76 m	1,77 m	1,74 m
1,74 m	1,75 m	1,83 m
1,72 m	1,72 m	1,74 m
1,70 m	1,70 m	1,72 m

Darstellung im Histogramm:



1.3.2 Bestwert (auch: Messwert)

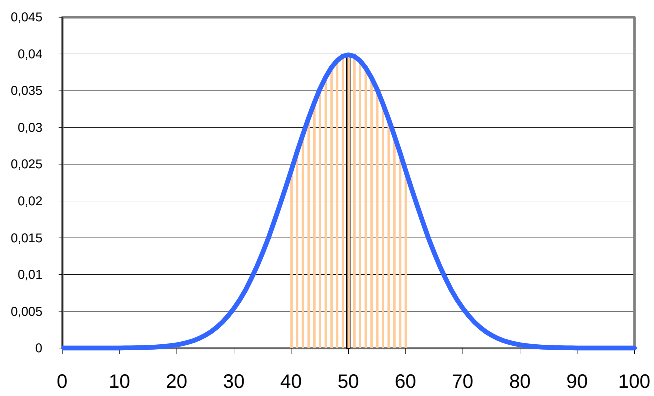
Ein Messergebnis einer Messreihe gibt den besten Schätzwert für den wahren Wert an sowie die Unsicherheit („den Fehler“), mit der dieser „Bestwert“ behaftet ist.
Als **besten Schätzwert** oder **Messwert** geben wir das arithmetische Mittel (Mittelwert, Durchschnitt) der Messreihe an:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Summe aller gemessenen Werte dividiert durch die Anzahl der Messungen

1.3.3 Standardabweichung und Standardabweichung des Mittelwertes

Trägt man eine statistische Verteilung in einem Diagramm auf, so erhält man unter bestimmten, idealisierten Bedingungen eine **Glockenkurve** oder **Gauß'sche Normalverteilung**:



Die Kurve ist symmetrisch um den Mittelwert (Bestwert) $\bar{x}$
(hier: $\bar{x} = 50$).

Die Breite der Glocke ist ein Maß für die Unsicherheit.

Ddie **Standardabweichung** σ bzw. σ_{N-1} ist definiert gemäß:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}$$

durch das Quadrat werden alle Fehler positiv und können sich bei der Addition nicht gegenseitig kompensieren; große Abweichungen vom Mittelwert werden stärker gewichtet.

da durch $(N-1)$ dividiert wird, ist für eine „Messreihe" mit $N = 1$ (Einzelmessung) keine Standardabweichung definiert.

Die meisten gängigen Taschenrechner verfügen über statistische Funktionen zur einfachen Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichung.

Machen Sie sich mit dieser Funktionalität Ihres Taschenrechners vertraut!

Übung 1: Eine Messreihe besteht aus den vier Werten 3, 4, 4, 5

- Geben Sie diese Werte über die Statistikfunktion in Ihren Taschenrechner ein.
- Rufen Sie den Mittelwert ab. (muss 4,00 ergeben).
- Rufen Sie die Standardabweichung ab. (muss 0,81649658 ergeben).
- Löschen Sie den Statistikspeicher Ihres Taschenrechners, damit die nächste Übung bearbeitet werden kann.

Übung 2: Berechnung des Messergebnisses einer Volumenmessung:

gemessen wurde: V_1 = 2,13 cm³, V_2 = 2,04 cm³, V_3 = 2,2 cm³, V_4 = 2,16 cm³.

Berechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner: Mittelwert $\overline{V}$ = 2,1325 cm³
Standardabweichung: σ = 0,068007 cm³

Übung 3: Berechnung des Messergebnisses einer Größenmessung:

X_1 = 1,78 m	X_{11} = 1,68 m	$\overline{X}$ = 1,7325 m
X_2 = 1,77 m	X_{12} = 1,66 m	
X_3 = 1,65 m	X_{13} = 1,75 m	
X_4 = 1,74 m	X_{14} = 1,76 m	σ = 0,04643898 m
X_5 = 1,75 m	X_{15} = 1,79 m	
X_6 = 1,72 m	X_{16} = 1,66 m	
X_7 = 1,80 m	X_{17} = 1,77 m	
X_8 = 1,74 m	X_{18} = 1,79 m	$m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}04643898\,\mathrm{m}}{\sqrt{20}} = 0{,}01038407\,\mathrm{m}$
X_9 = 1,72 m	X_{19} = 1,73 m	
X_{10} = 1,69 m	X_{20} = 1,70 m	

m ist die „Standardabweichung des Mittelwertes" (auch „mittlerer Fehler")
Die Standardabweichung σ berücksichtigt noch nicht die Anzahl N der Messungen und ist bei einer Normalverteilung von N (nahezu) unabhängig.
Allerdings ist klar, dass der Mittelwert $\overline{x}$ umso verlässlicher bestimmt werden kann, je mehr Messungen vorliegen. Deshalb bestimmen wir m wie oben angegeben.
Für den systematischen Fehler nehmen wir an:
u = Messgenauigkeit des Zollstockes: u = 0,001 m (= 1mm)

Gesamtfehler: $\Delta x = u + m = 0{,}01138407\ \mathrm{m}$

Korrekte Darstellung des Messergebnisses:

Die große Anzahl an Nachkommastellen suggeriert eine Genauigkeit, die nicht gegeben ist.
Wir vereinbaren:

1. **Der Fehler wird auf 2 signifikante Stellen angegeben und stets aufgerundet.**
2. **Der Messwert (= Bestwert) wird normal gerundet und mit der gleichen Genauigkeit (Anzahl Nachkommastellen) wie der Fehler angegeben.**

Damit erhalten wir den Fehler zu Δx = 0,012 m (Fehler hat Einheit wie Messwert!)
Und den Mittelwert zu $\overline{x}$ = 1,733 m
Messergebnis:
Größe x = (1,733 ± 0,012) m
= 1,733 (12) m

alternative Darstellung statt +/-

1.3.4 Relativer Fehler und prozentualer Fehler

Der relative Fehler ergibt sich, wenn man den Gesamtfehler auf den Bestwert bezieht:

relativer Fehler der Messgröße x: $= \frac{\Delta x}{\overline{x}}$ (dimensionslos)

prozentualer Fehler = relativer Fehler ·100%: $= \frac{\Delta x}{\overline{x}} \cdot 100\%$ (dimensionslos)

1.4 Statistische Bedeutung der Standardabweichung σ

Bei einer Normalverteilung finden sich im Bereich

$\bar{x} \pm \sigma$	68,3%	aller Messpunkte
$\bar{x} \pm 2 \cdot \sigma$	95,5%	aller Messpunkte
$\bar{x} \pm 3 \cdot \sigma$	99,7%	aller Messpunkte

Damit ist klar: je kleiner σ ist, umso schärfer gruppieren sich alle Messwerte um den Mittelwert.

1.5 Mathematische Beschreibung der Normalverteilung

Mathematisch lässt sich die Gauß'sche Glockenkurve durch eine Exponentialfunktion darstellen:

$$y(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right)$$

Nebenbemerkung: Die Schreibweise „exp(x)" bedeutet das Gleiche wie e^x, die Exponentialfunktion zur Basis e = 2,71828... . Die Schreibweise exp(x) ist oft besser lesbar.
Dies ist eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* und somit gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, dx = 1$$

„die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert irgendeinen beliebigen Wert zwischen -∞ und +∞ annimmt ist 1"

1.6 Beispiel: Bedeutung der Standardabweichung

Eine Fabrik fertigt Schrauben, deren Länge 20 ± 1 mm sein soll. Da die Anzahl der täglich produzierten Schrauben 1 Mio. beträgt, kann nicht jede Schraube geprüft werden.

Eine Stichprobe von ca. 1000 Schrauben ergibt, dass der Mittelwert 20 mm beträgt.

Die Standardabweichung liegt bei 1 mm.

Das bedeutet aber (s.o.), dass 68,3% aller Messpunkte innerhalb des Intervalls ± 1 mm liegen, oder anders ausgedrückt, der Rest, nämlich 31,7% ist Ausschuss.
Das Gleiche gilt für die gesamte Produktion.
Um den Ausschuss auf unter 4,5% zu drücken, muss die Fertigung verbessert werden auf eine Standardabweichung von 0,5 mm.

? Um den Ausschuss auf unter 0,3% zu drücken, muss die Fertigung verbessert werden auf eine Standardabweichung von

(Quelle des Beispiels: Skript Prof. Jödicke)

1.7 *Vom Umgang mit signifikanten Stellen*

Wenn Sie den Umfang eines Kreises bestimmen wollen, können Sie den Durchmesser d messen und den Umfang gemäß $U = \pi \cdot d$ berechnen.
Angenommen, Sie messen $d = 7{,}2\ \mathrm{cm}$ mit einer Unsicherheit von $\Delta d = 1\ \mathrm{mm}$, also $d = (7{,}2 \pm 0{,}1)$ cm, dann liefert der Taschenrechner wegen der Multiplikation mit π:

$$U = \pi \cdot d = 22{,}61946711\ \mathrm{cm} \pm 0{,}314159265\ \mathrm{cm}$$

Tatsächlich geben wir nur die Anzahl an signifikanten Stellen an, die notwendig ist, um das Messergebnis ohne Verlust an Genauigkeit wiederzugeben:

$$U = 22{,}62\ \mathrm{cm} \pm 0{,}32\ \mathrm{cm}\ \text{(Fehler aufgerundet)} = (22{,}62 \pm 0{,}32)\ \mathrm{cm}$$

Eine Änderung der Maßeinheit ändert nicht die Anzahl signifikanter Stellen:
$U = 22{,}62\ \mathrm{cm} = 226{,}2\ \mathrm{mm} = 0{,}2262\ \mathrm{m}$
sind jeweils 4 signifikante Stellen.

1.7.1 Addition und Subtraktion

Bei Addition und Subtraktion runden wir das Ergebnis auf **die letzte Dezimalstelle des weniger genauen Wertes** (bezüglich der Anzahl an Nachkommastellen):

ohne Rundung: $10{,}01\ \mathrm{cm} + 352{,}2\ \mathrm{cm} + 0{,}0062\ \mathrm{cm} = 362{,}2162\ \mathrm{cm}$

Der zweite Summand hat mit einer Dezimalstelle die geringste Anzahl an Nachkommastellen. Somit wird auch das Ergebnis auf eine Nachkommastelle, also auf den Wert $362{,}2\ \mathrm{cm}$ gerundet.

1.7.2 Multiplikation und Division

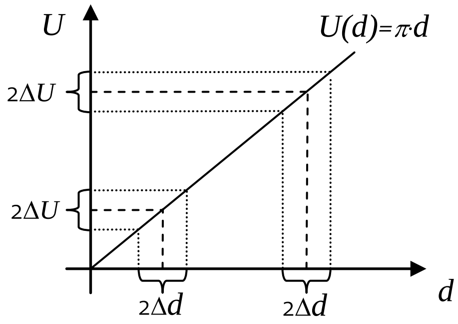
Wir runden auf **die kleinere Anzahl signifikanter Stellen**.
Beispiel: Fläche *A* eines Rechtecks mit $l = 63{,}52\ \mathrm{cm}$ (4 s. St.), $b = 3{,}17\ \mathrm{cm}$ (3 s. St.).

ohne Rundung: $A = l \cdot b = 63{,}52\ \mathrm{cm} \cdot 3{,}17\ \mathrm{cm} = 201{,}3584\ \mathrm{cm}^2$

gerundet auf 3 signifikante Stellen: $A = 201\ \mathrm{cm}^2$.

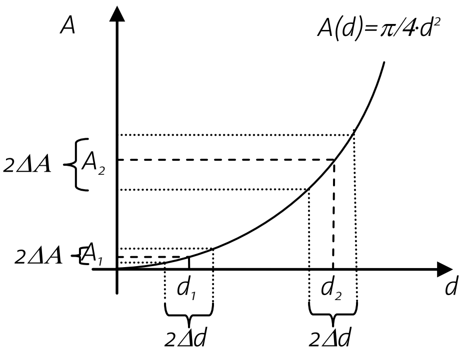
1.8 *Fehlerfortpflanzung*

Beim Beispiel „Bestimmung des Kreisumfanges U“ hängt der Umfang U nur von der Messgröße Durchmesser d ab. Der Zusammenhang ist überdies linear:



Die Messungenauigkeit für d korrespondiert mit einer Ungenauigkeit ΔU für U;
dieses ΔU ist für alle d gleich!
$\Delta U = \pi \Delta d =$ 0,314 cm
aufgerundet: ΔU = 0,4 cm für alle d!

<u>Eine Variable:</u>
Die Situation stellt sich gänzlich anders dar, falls die zu bestimmende Größe nicht mehr linear von der Messgröße abhängt (Beispiel Kreisfläche $A = \frac{\pi}{4} d^2$). Die Unsicherheit ΔA für die Kreisfläche hängt dann von der Messunsicherheit Δd und vom Durchmesser d ab:



$\Delta A = \Delta d$ ·Steigung der Kurve beim Messwert d
Die Steigung der Kurve errechnet sich aus der Ableitung: $\frac{dA}{dd} = \frac{\pi}{2} d$

daraus: $\Delta A = \frac{dA}{dd} \cdot \Delta d = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot \Delta d$

Allgemein gilt für eine beliebige Funktion $x = f(U)$:

$$\Delta x = \frac{df}{dU} \Delta U$$

<u>Beispiel:</u> Es sei die Messungenauigkeit des Durchmessers Δd = 1 mm
Wir erhalten dann folgende Ergebnisse:

	Bestwert (ungerundet)	Unsicherheit (ungerundet)	Messergebnis
d_1 = 7,2 cm	A = 40,715 cm²	ΔA = 1,13097 cm²	A_1 = (40,7±1,2) cm²
d_2 = 100 cm	A = 7853,98 cm²	ΔA = 15,708 cm²	A_2 = (7854±16) cm²

ΔA hängt davon ab, welcher Wert für d gemessen wurde!

<u>Mehrere Variable (Messgrößen):</u>
Wenn die gesuchte Größe von mehreren Messgrößen u, v, w … abhängt, so trägt der Fehler jedes einzelnen Messwertes zum Gesamtfehler bei:
Die einzelnen Fehler berechnen sich wie bei einer Variablen, nun aber mit *partiellen Ableitungen*:

$$\Delta x_u = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \; ; \qquad \Delta x_v = \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v \; ; \quad \Delta x_w = \frac{\partial f}{\partial w} \Delta w \; ; \ldots$$

1.8.1 Wie werden die einzelnen Fehler addiert?

3. Bei systematischen Fehlern wendet man die „Größtfehleraddition“ („Maximalfehler“) an:

Wenn $x = f(u,v,w)$, dann ist

$$\Delta x_{ges} = |\Delta x_u| + |\Delta x_v| + |\Delta x_w| + \ldots$$
$$= \left|\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial w}\Delta w\right| + \ldots$$

4. Bei statistischen Fehlern wendet man die Gauß’sche Fehlerfortpflanzung an:

$$\Delta x_{ges} = \sqrt{(\Delta x_u)^2 + (\Delta x_v)^2 + (\Delta x_w)^2 + \ldots}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\Delta w\right)^2 + \ldots}$$

Zur Vereinfachung des Verfahrens wenden wir bei der Auswertung der Laborversuche nur die Größtfehleraddition an.

Übung 4: Bestimmung der Dichte eines Würfels

Um die Dichte eines Würfels zu bestimmen, wurden in zwei Messreihen seine Kantenlänge a und seine Masse m bestimmt: a = (29,052 ± 0,041) mm, m = (80,2 ± 1,2) g.

Die Dichte ρ eines Würfels berechnet sich gemäß $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$.

Somit lauten die Ableitungen: $\frac{\partial \rho}{\partial m} =$ $\qquad$ $\frac{\partial \rho}{\partial a} =$

Die Messung der Masse erzeugt folgenden Fehlerbeitrag im Endergebnis:

$$\Delta \rho_m = \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \Delta m =$$

Die Messung der Kantenlänge erzeugt folgenden Fehlerbeitrag im Endergebnis:

$$\Delta \rho_a = \frac{\partial \rho}{\partial a} \cdot \Delta a =$$

? Welche Messreihe (Masse oder Kantenlänge) sollte zunächst optimiert werden, um eine genauere Aussage über die Dichte des Würfels zu erhalten?

Übung 4b: Bestimmung der Dichte eines Würfels

Berechnen Sie nun den Gesamtfehler der Dichtebestimmung und geben Sie das Gesamtergebnis in korrekter Form an:

$\Delta \rho =$

$\rho =$

1.9 Anwendung der Grundlagen im Physiklabor

Rezept für richtiges Vorgehen (Quelle: Skript Prof. Jödicke)

1.9.1 Auswertung einer Messreihe

- Messung durchführen und sauber dokumentieren
- Systematischen Fehler abschätzen (Kap. 1.2.1)
- Erstellen des Histogramms (Kap. 1.3.1)
- Wegstreichen offensichtlicher Fehlmessungen (mit genauer Begründung) (Kap. 1.2.3)
- Falle eines Maximums:
- Mittelwert berechnen (Kap. 1.3.2)
- Standardabweichung des Mittelwerts berechnen (Kap. 1.3.3)
- Gesamtfehler bestimmen (Kap. 1.2.4)
- Ergebnis der Messreihe angeben (Kap. 1.3)

1.9.2 Fehlerfortpflanzung

- Aufstellen der Formel für den gesuchten Wert. Dabei dürfen auf der rechten Seite nur gemessene Größen oder Konstanten auftauchen.
- Berechnen des Bestwertes des gesuchten Wertes durch Einsetzen der gemessenen Werte in die Formel.
- Berechnen der Formel für den Fehler der gesuchten Größe
- Berechnen der Teilfehler der einzelnen Messgrößen zum Gesamtfehler
- Angabe des Ergebnisses für den gesuchten Wert (Bestwert und Fehler)

1.10 Beispiel: Bestimmung der Dichte eines Würfels

> Die Dichte eines Würfels soll bestimmt werden. Dazu werden die Masse mit einer Waage (Genauigkeit 1 Gramm) und die Kantenlänge mit einem Messschieber gemessen.
>
> Die Messreihe für die Masse m lautet (in Gramm): 121, 122, 119, 120, 340, 121, 118, 121
>
> Die Messreihe für die Kantenlänge a (in mm): 33,25; 33,23; 33,24; 33,30; 33,31; 33,24; 33,22

<u>Auswertung Messreihe Masse m</u>

systematischer Fehler $u_m = 1\text{g}$
ein offensichtlicher Messfehler (340 Gramm) ansonsten eine Verteilung mit nur einem Maximum. Daraus ergeben sich $N = 7$ Messwerte
Mittelwert (aus Rechner) $\overline{m} = 120{,}285714$ g
Standardabweichung: 1,380131 g
Standardabweichung des Mittelwerts $m_m = 0{,}52164048$ g
Gesamtfehler: $\Delta m = 1{,}52164048$ g
Ergebnis Masse (mit Rundung): $m = (120{,}3 \pm 1{,}6)$ g

<u>Auswertung Messreihe Kantenlänge a</u>

systematischer Fehler $u_a = 5/100$ mm (Messschieber)
kein offensichtlicher Messfehler und eine Verteilung mit nur einem Maximum.
Daraus ergeben sich $N = 7$ Messwerte
Mittelwert (aus Rechner) $\overline{a} = 33{,}257143$ mm
Standardabweichung: 0,034503 mm
Standardabweichung des Mittelwerts $m_a = 0{,}01305$ mm
Gesamtfehler: $\Delta a = 0{,}064$ mm
Ergebnis Kantenlänge $a = (33{,}257 \pm 0{,}064)$ mm

<u>Fehlerfortpflanzung</u>

Es gilt $\rho = m/V$. Da V aber keine Messgröße war,
muss die Formel umgeschrieben werden zu $\rho = m/a^3$.
Bestwert (ungerundet) der Dichte:

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{m}}{\overline{a}^3} = \frac{120{,}3g}{33{,}257^3\,mm^3} = 0{,}003270517\frac{g}{mm^3} = 3270{,}517\frac{kg}{m^3}$$

Größtfehler:

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\cdot\Delta m\right| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial a}\cdot\Delta a\right| = \left|\frac{1}{\overline{a}^3}\cdot\Delta m\right| + \left|-\frac{\overline{m}}{\overline{a}^4}\cdot\Delta a\right|$$

(partielle Ableitung bedeutet, dass alle Variable, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als konstant betrachtet werden).
Einsetzen der Werte in diese Gleichung ergibt

$$\Delta\rho = (43{,}498 + 18{,}881)\frac{kg}{m^3} = 62{,}379\frac{kg}{m^3} \xrightarrow{\text{Rundung}} \Delta\rho = 63\frac{kg}{m^3}$$

Endergebnis: $$\rho = (3271 \pm 63)\frac{kg}{m^3}$$

1.11 *Vereinfachung der Ableitung*

Besteht die Funktion nur aus Produkten und Divisionen von Messgrößen oder Potenzen von Messgrößen, so lässt sich der relative Gesamtfehler leicht finden:

Beispiel: die zu bestimmende Größe x hängt von den Messgrößen u, v und w folgendermaßen ab:

$$x = \frac{4\pi \cdot u \cdot v^5}{w^2}$$

Der Gesamtfehler ergibt sich mit den partiellen Ableitungen gemäß

$$\Delta x = \left| \frac{4\pi \cdot v^5}{w^2} \cdot \Delta u \right| + \left| 5 \cdot \frac{4\pi \cdot u \cdot v^4}{w^2} \cdot \Delta v \right| + \left| -2 \cdot \frac{4\pi \cdot u \cdot v^5}{w^3} \cdot \Delta w \right|$$

Erweitern der drei Summanden:

$$\Delta x = \left| \frac{4\pi \cdot v^5}{w^2} \cdot \frac{u}{u} \cdot \Delta u \right| + \left| 5 \cdot \frac{4\pi \cdot u \cdot v^4}{w^2} \cdot \frac{v}{v} \cdot \Delta v \right| + \left| -2 \cdot \frac{4\pi \cdot u \cdot v^5}{w^3} \cdot \frac{w}{w} \cdot \Delta w \right|$$

In jedem Summand steckt jetzt wieder die zu bestimmende Größe x:

$$\Delta x = \left| \underbrace{\frac{4\pi \cdot v^5}{w^2} \cdot u}_{=x} \cdot \frac{1}{u} \cdot \Delta u \right| + \left| 5 \cdot \underbrace{\frac{4\pi \cdot u \cdot v^4}{w^2} \cdot v}_{=x} \cdot \frac{1}{v} \cdot \Delta v \right| + \left| -2 \cdot \underbrace{\frac{4\pi \cdot u \cdot v^5}{w^2}}_{=x} \cdot \frac{1}{w} \cdot \Delta w \right|$$

Somit kann x vor jeden Summanden geschrieben werden:

$$\Delta x = x \cdot \left| \frac{\Delta u}{u} \right| + x \cdot \left| 5 \cdot \frac{\Delta v}{v} \right| + x \cdot \left| -2 \cdot \frac{\Delta w}{w} \right|$$

Schließlich liefert die Division durch x:

$$\frac{\Delta x}{x} = \left| \frac{\Delta u}{u} \right| + \left| 5 \cdot \frac{\Delta v}{v} \right| + \left| -2 \cdot \frac{\Delta w}{w} \right|$$

Merke:

$$\frac{\Delta x}{x} = \left| \frac{\Delta u}{u} \right| + 5 \cdot \left| \frac{\Delta v}{v} \right| + 2 \cdot \left| \frac{\Delta w}{w} \right|$$

Der relativer Gesamtfehler ergibt sich durch Addition der relativen Fehler der einzelnen Messwerte, jeweils gewichtet mit der Potenz des Messwertes.