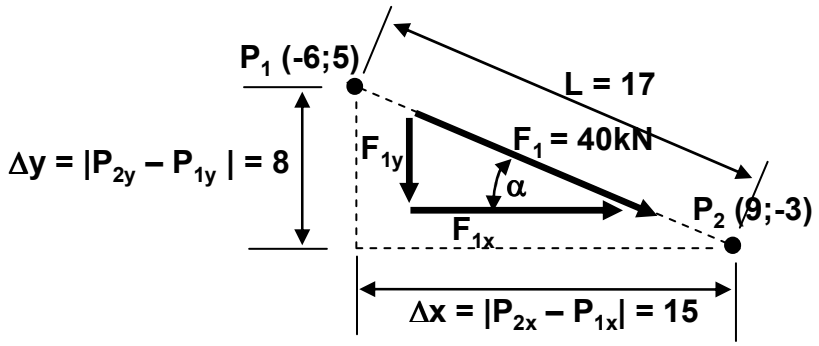
Lösungen Aufgabe 1:

Geometrie 1:



Den waagrechten Abstand Δx, den senkrechten Abstand Δy und den Gesamtabstand L erhält man aus:

$$\Delta x = |P_{2x} - P_{1x}| = |9-(-6)| = |15| = 15$$
$$\Delta y = |P_{2y} - P_{1y}| = |(-3)-5| = |-8| = 8 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

Dies ergibt die beiden Richtungskosinus

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{15}{17} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta y}{L} = \frac{8}{17}$$

bzw. die beiden Kraftkomponenten

$$F_{1x} = \frac{\Delta x}{L} F_1 = \frac{15}{17} 40 = 35.3kN \quad \text{und} \quad F_{1y} = \frac{\Delta y}{L} F_1 = \frac{8}{17} 40 = 18.8kN\,.$$

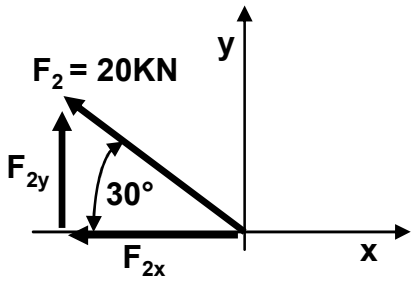
Alternativ kann auch mit dem Winkel α = 28.1° gerechnet werden:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{15} \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha = \frac{\Delta y}{L} = \frac{8}{17} \quad \text{bzw.} \quad \cos\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{15}{17}$$

Dann erhält man die Kraftkomponenten

$$F_{1x} = \cos\alpha F_1 = 0.88 \cdot 40 = 35.3kN \quad \text{und} \quad F_{1y} = \sin\alpha F_1 = 0.47 \cdot 40 = 18.8kN$$

Geometrie 2:



Das Kräftedreieck liefert

$$F_{2x} = \cos 30° F_2 = 0.87 \cdot 20 = 17.4kN$$
$$F_{2y} = \sin 30° F_2 = 0.5 \cdot 20 = 10.0kN$$

Vektorsumme $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$:

Für die Berechnung der Vektorsumme werden nur die Beträge der einzelnen Kraftkomponenten verwendet. Zeigt eine Kraftkomponente in der Skizze in positive Koordinatenrichtung, wird dem Kraftbetrag bei der Vektoraddition ein positives Vorzeichen vorangestellt (Kraftkomponente wird addiert). Zeigt die Kraftkomponente in der Skizze in die negative Koordinatenrichtung, wird dem Kraftbetrag ein negatives Vorzeichen bei der Vektoraddition vorangestellt (Kraftkomponente wird subtrahiert). Die einzelnen Komponenten können dabei unabhängig berechnet werden. Erhält man ein positives Ergebnis, bedeutet dies, dass die Komponente der Kräftesumme in positive Koordinatenrichtung zeigt, bzw. bei einem negativen Ergebnis zeigt die Komponente der Kräftesumme in negative Koordinatenrichtung

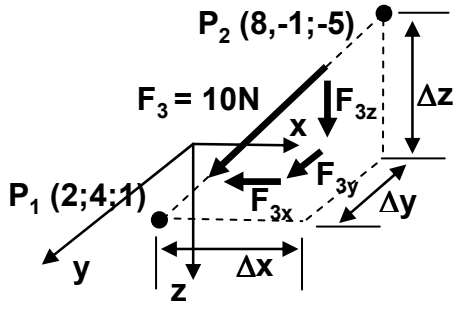
$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} = 35.3 - 17.4 = 17.9kN$$

(F_{Rx} und F_{1x} zeigen in positive x-Richtung, F_{2x} zeigt in negative x-Richtung)

$F_{Ry} = -F_{1y} - F_{2y} = -18.8 + 10.0 = -8.8kN$

(F_{Ry} und F_{1y} zeigen in negative y-Richtung, F_{2y} zeigt in positive y-Richtung)

Geometrie 3:



$\Delta x = |P_{2x} - P_{1x}| = |8-2| = |6| = 6$

$\Delta y = |P_{2y} - P_{1y}| = |(-1)-4| = |-5| = 5$

$\Delta z = |P_{2z} - P_{1z}| = |(-5)-1| = |-6| = 6$

$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 9.8$

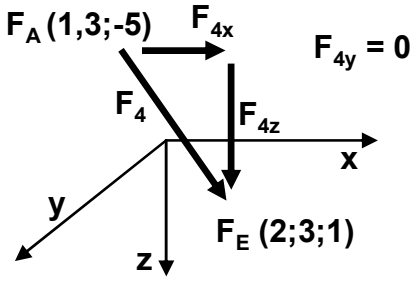
Kraftkomponenten:

$F_{3x} = \frac{\Delta x}{L} F_3 = \frac{6}{9.8} 10 = 6.1N$, $F_{3y} = \frac{\Delta y}{L} F_3 = \frac{5}{9.8} 10 = 5.1N$ und $F_{3z} = \frac{\Delta z}{L} F_3 = \frac{6}{9.8} 10 = 6.1N$

Zur Kontrolle kann der Kraftbetrag F_3 berechnet werden

$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2 + F_{3z}^2} = 10.0N$

Geometrie 4:



Bei dieser Darstellung können die Kraftkomponenten direkt aus der Skizze abgelesen werden.

$F_{4x} = |F_{Ex} - F_{Ax}| = |2-1| = 1$

$F_{4y} = |F_{Ey} - F_{Ay}| = |3-3| = 0$

$F_{4z} = |F_{Ez} - F_{Az}| = |1-(-5)| = 6$

$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2 + F_{4z}^2} = 6.1N$

Vektorsumme $\vec{F}_R = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$:

$F_{Rx} = -F_{3x} + F_{4x} = -6.1 + 1 = -5.1N$

(F_{Rx} und F_{3x} zeigen in negative x-Richtung, F_{4x} zeigt in positive x-Richtung)

$F_{Ry} = F_{3y} + F_{4y} = 5.1 + 0.0 = 5.1N$

(F_{Ry} und F_{3y} zeigen in positive y-Richtung, $F_{4y} = 0$)

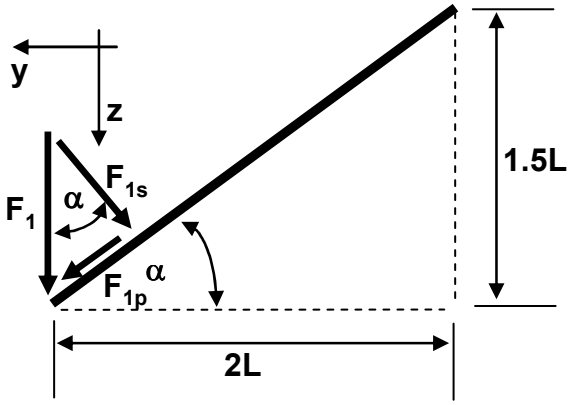
$F_{Rz} = F_{3z} + F_{4z} = 6.1 + 6 = 12.1N$

(F_{Rz}, F_{4z} und F_{3z} zeigen in positive z-Richtung)

$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{(-5.1)^2 + 5.1^2 + 12.1^2} = 14.1N$

Lösungen Aufgabe 2:

a.) Für die Berechnung wird die Geometrie in die yz-Ebene projiziert. Die Kraft F_1 kann mittels eines Kräftedreiecks in die zum Balken parallele Kraft F_{1p} und die zum Balken senkrechte Kraft F_{1s} zerlegt werden. Den benötigten Winkel a findet man auch in dem durch die geometrischen Abmessungen gegebenen Dreieck mit den Katheten 2L und 1.5L.



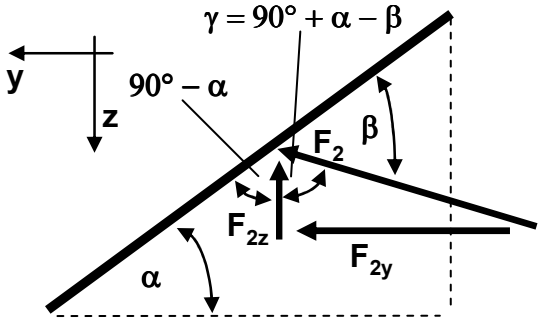
$$\tan\alpha = \frac{1.5L}{2L} = 0.75$$

=> $\alpha \approx 36.87°$ => $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$

Anhand des Kräftedreiecks erkennt man:

$F_{1s} = \cos\alpha F_1 = 0.8F_1$ und $F_{1p} = \sin\alpha F_1 = 0.6F_1$

b.) Aus dem Kräftedreieck folgt:



$$\sin\gamma = \frac{F_{2y}}{F_2} = \frac{12/13\,F_2}{F_2} = \frac{12}{13}$$

=> $\gamma \approx 67.38°$

=> $\cos\gamma = \frac{5}{13}$ und $\tan\gamma = \frac{12}{5}$

Mit den beiden Regeln, dass ein Halbkreis 180° beinhaltet und dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, berechnet man mit

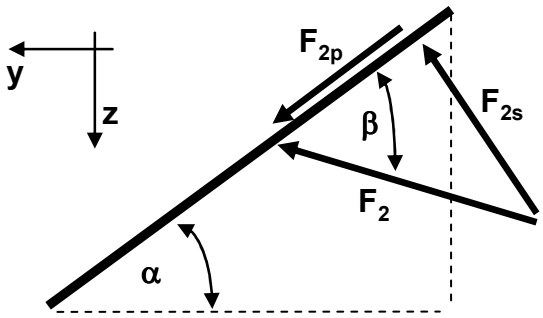
$90° - \alpha + \gamma + \beta = 180°$

den Winkel β:

$\beta = 90° + \alpha - \gamma = 90° + 36.87° - 67.38° = 59.49°$

Für die Komponente F_{2z} gilt:

$$\frac{F_{2z}}{F_{2y}} = \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{5}{12} \quad => \quad F_{2z} = \frac{5}{12}F_{2y} = \frac{5}{13}F_2$$

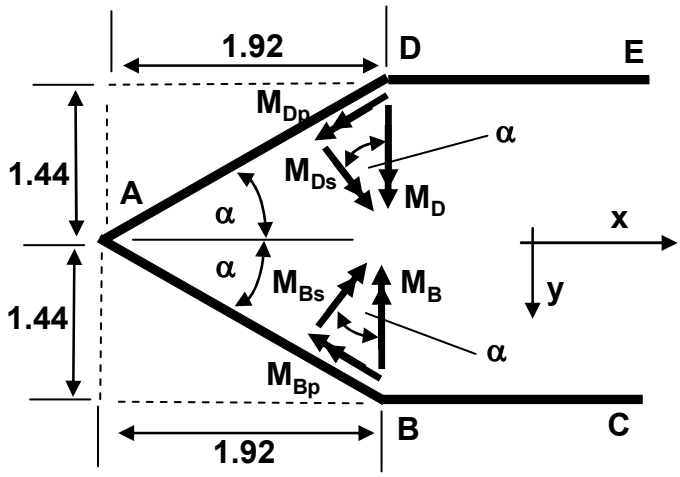


c.) Das Kräftedreieck ergibt:

$F_{2s} = \sin\beta F_2 = \sin 59.49° F_2 = 0.86F_2$

$F_{2p} = \cos\beta F_2 = \cos 59.49° F_2 = 0.51F_2$

Lösungen Aufgabe 3:



a.) Die Punkte A, B und D haben alle die konstante z-Koordinate z = 0. Dadurch ist es geeignet, die Geometrie für die Zerlegung der Momente in die xy-Ebene zu projizieren. Die geometrischen Dreiecke liefern den Zusammenhang

$$\tan\alpha = \frac{1.44}{1.92} = 0.75$$

=> $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$

Das Momentendreieck für M_B ergibt:

$$M_{Bp} = \sin\alpha M_B = 0.6\frac{15}{24} = \frac{3}{8}Nm \quad \text{und} \quad M_{Bs} = \cos\alpha M_B = 0.8\frac{15}{24} = \frac{1}{2}Nm$$

Das Momentendreieck für M_D ergibt:

$$M_{Dp} = \sin\alpha M_D = 0.6\frac{13}{36} = \frac{13}{60}Nm \quad \text{und} \quad M_{Ds} = \cos\alpha M_D = 0.8\frac{13}{36} = \frac{13}{45}Nm$$

Da M_B und M_D nur eine y-Komponente ungleich null besitzt, können die Beträge direkt addiert werden.

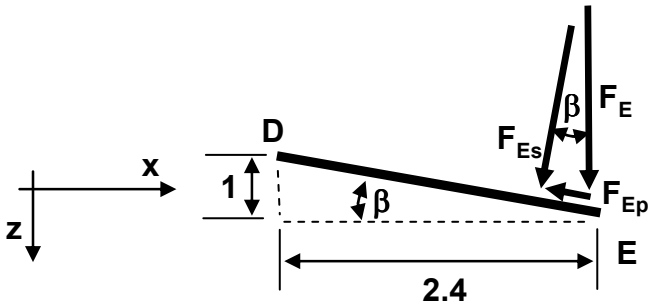
$$M_R = -M_B + M_D = -\frac{15}{24} + \frac{13}{36} = -\frac{19}{72}Nm$$

M_R hat den Betrag 19/72Nm und zeigt in die negative y-Richtung.

b.) Für die Zerlegung der Kraft wird das Bauteil in eine Ebene projiziert, die parallel zur xz-Ebene ist. Mit dem geometrischen Dreieck erhält man den Winkel β.

$$\tan\beta = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$$

=> $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ und $\cos\alpha = \frac{12}{13}$



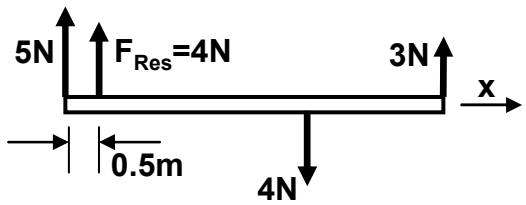
Das Kräftedreieck für F_E ergibt:

$$F_{Ep} = \sin\beta F_E = \frac{5}{13}26 = 10N$$

$$F_{Ep} = \cos\beta F_E = \frac{12}{13}26 = 24N$$

Lösungen Aufgabe 4:

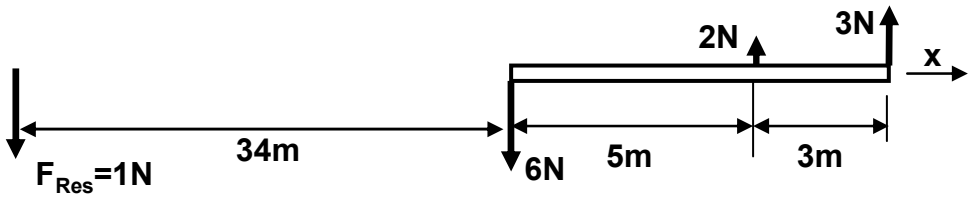
Geometrie 1:



Summe aller Kräfte in x-Richtung: Alle Kraftkomponenten in x-Richtung sind null.
Summe aller Kräfte in y-Richtung:
$F_{res} = 5 - 4 + 3 = 4N$

Angriffspunkt der resultierenden Kraft bezüglich des linken Endes des Stabes:
(das durch F_{res} erzeugte Moment muss gleich dem durch die Einzelkräfte erzeugten Moment)
$x_{res}F_{res} = x_{res} \cdot 4 = 0 \cdot 5 - 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 2Nm$
=> $x_{res} = 0.5m$

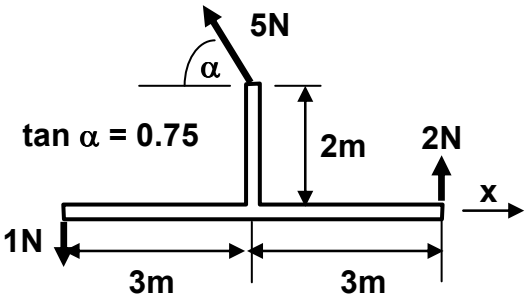
Geometrie 2:



Summe aller Kräfte in x-Richtung: Alle Kraftkomponenten in x-Richtung sind null.
Summe aller Kräfte in y-Richtung:
$F_{res} = -6 + 2 + 3 = -1N$

Angriffspunkt der resultierenden Kraft bezüglich des linken Endes des Stabes:
$x_{res}F_{res} = x_{res} \cdot (-1) = 0 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 34Nm$
=> $x_{res} = -34m$

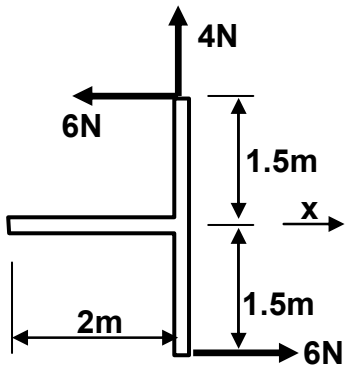
Geometrie 3:



Summe aller Kräfte in x-Richtung:
$F_{res,x} = -5\cos\alpha = -5 \cdot 0.8 = -4N$

Summe aller Kräfte in y-Richtung:
$F_{res,y} = -1 + 2 + 5\sin\alpha = -1 + 2 + 5 \cdot 0.6 = 4N$
Angriffspunkt der resultierenden Kraft bezüglich des linken Endes des liegenden Stabes:
$x_{res}F_{res,y} = x_{res} \cdot 4 = 0 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 29Nm$
=> $x_{res} = 7.25m$

Geometrie 4:



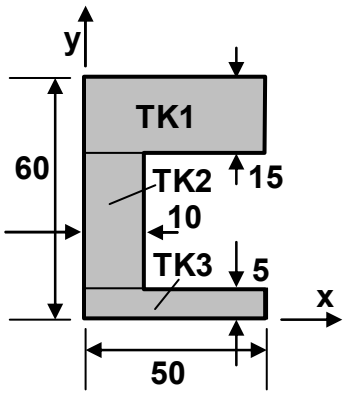
Summe aller Kräfte in x-Richtung:
$F_{res,x} = -6 + 6 = 0$

Summe aller Kräfte in y-Richtung:
$F_{res,y} = 4N$

Angriffspunkt der resultierenden Kraft bezüglich des linken Endes des liegenden Stabes:
$x_{res} F_{res,y} = x_{res} \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 1.5 \cdot 6 + 1.5 \cdot 6 = 26Nm$
=> $x_{res} = 6.5m$

Lösungen Aufgabe 5:

Geometrie 1:



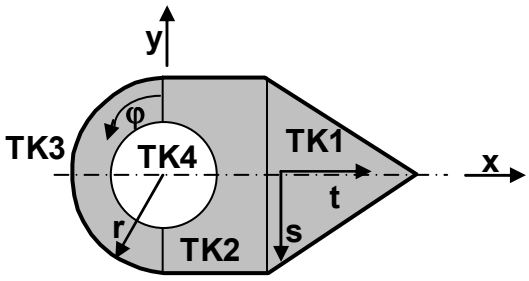
Der Bezugspunkt (Koordinatenursprung) liegt in der unteren, linken Ecke.
Lage des Schwerpunkts und Flächeninhalt von Teilkörper TK1:
S_1 (25;52.5), $A_1 = 750$

Lage des Schwerpunkts und Flächeninhalt von Teilkörper TK2:
S_2 (5;25), $A_2 = 400$

Lage des Schwerpunkts und Flächeninhalt von Teilkörper TK3:
S_3 (25;2.5), $A_3 = 250$

$$x_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2 + x_{S3}A_3\right) = \frac{1}{1400}\left(18750 + 2000 + 6250\right) = 19.3$$
$$y_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2 + y_{S3}A_3\right) = \frac{1}{1400}\left(39375 + 10000 + 625\right) = 35.7$$

Geometrie 2:



Der Gesamtkörper besteht aus den 3 Teilkörpern TK1 (Dreieck), TK2 (Rechteck) und TK3 (Halbkreis) abzüglich des Vollkreises TK4. Der Gesamtkörper ist symmetrisch zur x-Achse, wodurch die y-Koordinate mit $y_S = 0$ gegeben ist. Als Bezugspunkt für x_S wird der Mittelpunkt von TK4 gewählt.
TK1 ist ein gleichschenkliches Dreieck mit der Grundseite b = 40 und der Höhe h = 30.
Flächeninhalt:
$A_1 = 0.5bh = 600$

Der lokale Schwerpunkt $x_{S1,lokal}$ gilt bezüglich der Grundseite des Dreiecks. Laut Formelsammlung lautet er

$$x_{S1,lokal} = \frac{h}{3} = 10$$

Für den Schwerpunkt bezüglich des Ursprungs muss zu $x_{S1,lokal}$ 20 hinzuaddiert werden.
$$x_{S1} = x_{S1,lokal} + 20 = 30$$

Der Flächeninhalt von TK2 beträgt
$$A_2 = 20 \cdot 40 = 800$$

Der lokale Schwerpunkt von Teilkörper TK2 ist genau der Mittelpunkt und die x-Koordinate lautet vom Bezugspunkt gemessen
$$x_{S1} = 20$$

TK3 ist ein Halbkreis mit dem Radius r = 20. Der Flächeninhalt beträgt
$$A_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 20^2 = 628.3$$

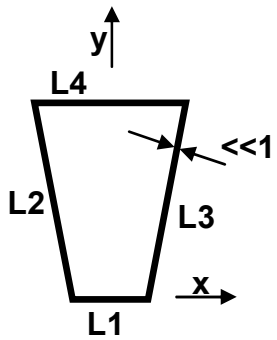
Die lokale x-Koordinate des Scherpunkts entnimmt man der Formelsammlung
$$x_{S3,lokal} = \frac{4r}{3\pi} = 8.5$$

bezüglich des Mittelpunkts ergibt sich die Schwerpunktkoordinate
$$x_{S3} = -8.5$$

Der Teilkörper TK4 ist ein Vollkreis mit dem Radius r = 10 und hat den Flächeninhalt
$$A_3 = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314.2$$

Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist null. Die x-Koordinate des Gesamtschwerpunktes erhält man aus
$$x_s = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4}\left(30 \cdot 600 + 10 \cdot 800 - 8.5 \cdot 628.3 + 0 \cdot 314.2\right) = 12.05$$

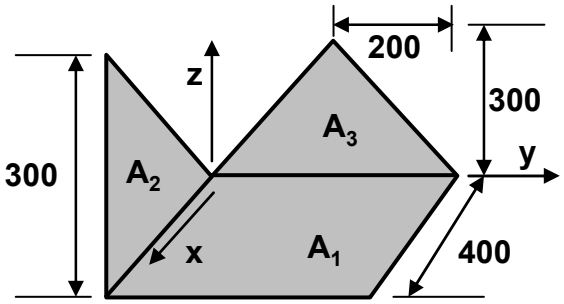
<u>Geometrie 3</u>:



Der Gesamtkörper ist symmetrisch zur y-Achse. Dies ergibt $x_S = 0$. Linie L_1 hat die y-Koordinate des Schwerpunktes $y_{S1} = 0$ und die Länge $L_1 = 20$. Linie L_2 und L_3 haben die y-Koordinate des Schwerpunktes $y_{S2} = y_{S3} = 25$ und die Länge $L_2 = L_3 = 51$. Linie L_4 hat die y-Koordinate des Schwerpunktes $y_{S4} = 50$ und die Länge $L_4 = 40$.
$$y_S = \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}\left(y_{S1}L_1 + y_{S2}L_2 + y_{S3}L_3 + y_{S4}L_4\right) = 28.1$$

Lösungen Aufgabe 6:

Weil das Blech eine konstante Dicke und Dichte hat, müssen zur Berechnung des Schwerpunktes nur die Flächen berücksichtigt werden. Die Teilflächen werden mit A_1, A_2 und A_3 bezeichnet.



Die Flächeninhalte der Teilflächen ergeben sich zu $A_1 = 160000$, $A_2 = A_3 = 60000$, die Gesamtfläche beträgt $A_{ges} = 280000$.

Für die Schwerpunktskoordinaten der Teilfläche 1 findet man

$x_{S1} = 200$, $y_{S1} = 200$ und $z_{S1} = 0$

Für das rechtwinklige Dreieck 2 erhält man mit Hilfe einer Formelsammlung

$x_{S2} = \frac{2}{3}400 = 266.66$, $y_{S2} = 0$ und $z_{S2} = \frac{1}{3}300 = 100$

Rechnerisch ergibt sich die x-Koordinate x_{S2} des Schwerpunktes mit b = 400 und h = 300 aus:

$$x_{S2} = \frac{1}{A_2}\int_{A_2} x dA = \frac{1}{A_2}\int_0^h \int_{zb/h}^b x dA = \frac{1}{A_2} = \int_0^h \int_{zb/h}^b x dx dz = \frac{1}{A_2}\int_0^h \frac{x^2}{2}\bigg|_{zb/h}^b dz = \frac{1}{A_2}\int_0^h \frac{b^2}{2}\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)dz$$

$$x_{S2} = \frac{b^2}{2A_2}\left(z - \frac{z^3}{3h^2}\right)\bigg|_0^h = \frac{b^2}{2A_2}\left(h - \frac{h^3}{3h^2}\right) = \frac{b^2 h}{bh}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2b}{3} = \frac{2\cdot 400}{3} = 266.66$$

Für die z-Koordinate z_{S2} des Schwerpunktes gilt:

$$z_{S2} = \frac{1}{A_2}\int_{A_2} z dA = \frac{1}{A_2}\int_0^h \int_{zb/h}^b z dA = \frac{1}{A_2} = \int_0^h \int_{zb/h}^b z dx dz = \frac{1}{A_2}\int_0^h xz\Big|_{zb/h}^b dz = \frac{1}{A_2}\int_0^h b\left(z - \frac{z^2}{h}\right)dz$$

$$z_{S2} = \frac{b}{A_2}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h}\right)\bigg|_0^h = \frac{b}{A_2}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right) = \frac{bh^2}{A_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2bh^2}{bh}\frac{1}{6} = \frac{h}{3} = 100$$

Für das gleichschenkliche Dreieck 3 erhält man mit Hilfe einer Formelsammlung

$x_{S3} = 0$, $y_{S3} = 200$ und $z_{S3} = \frac{1}{3}300 = 100$

Rechnerisch ergibt sich die y-Koordinate y_{S3} des Schwerpunktes mit b = 400 und h = 300 aus:

$$y_{S3} = \frac{1}{A_3}\int_{A_3} y dA = \frac{1}{A_3}\int_0^h \int_{bz/h}^{b+b(1-z/h)} y dy dz = \frac{1}{A_3}\int_0^h \frac{y^2}{2}\bigg|_{bz/h}^{b+b(1-z/h)} dz = \frac{2b^2}{A_3}\int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)dz$$

$$y_{S3} = \frac{2b^2}{A_3}\left(z - \frac{z^2}{2h}\right)\bigg|_0^h = \frac{2b^2}{A_3}\frac{h}{2} = \frac{hb^2}{bh} = b = 200$$

Für die z-Koordinate z_{S3} des Schwerpunktes gilt:

$$z_{S3} = \frac{1}{A_3}\int_{A_3} z dA = \frac{1}{A_3}\int_0^h \int_{bz/h}^{b+b(1-z/h)} z dy dz = \frac{1}{A_3}\int_0^h yz\Big|_{bz/h}^{b+b(1-z/h)} dz = \frac{2b}{A_3}\int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right) dz$$

$$z_{S3} = \frac{2b}{A_3}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h = \frac{2b}{A_3}\left(\frac{3h^2}{6}-\frac{2h^2}{6}\right) = \frac{bh^2}{3bh} = \frac{h}{3} = 100$$

Diese Berechnungen der Schwerpunktskoordinaten sind formal richtig, aber umständlich. Durch geschickte Wahl des Bezugskoordinatensystem, lässt sich der Schwerpunkt wesentlich einfacher bestimmen.

Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes lauten dann:

$$x_s = \frac{1}{A_{ges}}\left(x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2 + x_{S3}A_3\right) = 171.43$$

$$y_s = \frac{1}{A_{ges}}\left(y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2 + y_{S3}A_3\right) = 157.14$$

$$z_s = \frac{1}{A_{ges}}\left(z_{S1}A_1 + z_{S2}A_2 + z_{S3}A_3\right) = 42.86$$

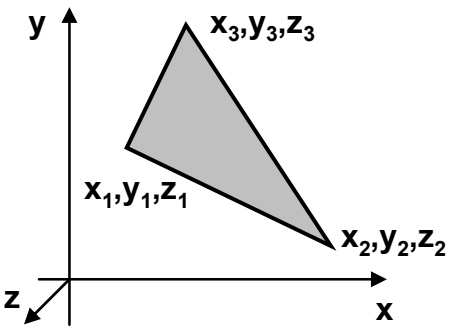
Allgemein können die Schwerpunktskoordinaten eines beliebigen Dreiecks durch

$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ und $z_s = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$,

wobei x_i, y_i, und z_i die Koordinaten der drei Ecken des Dreiecks sind, die mathematisch positiv nummeriert sein müssen.

Der dazugehörende Flächeninhalt kann durch

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



mit

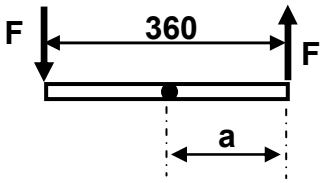
$$a_x = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$
$$a_y = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)$$
$$a_z = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

berechnet werden. Für 2-dimensionale ($z_1 = z_2 = z_3$) Dreiecke vereinfacht sich dies zu

$$A = \frac{1}{2}a_z = \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right]$$

Lösungen Aufgabe 7:

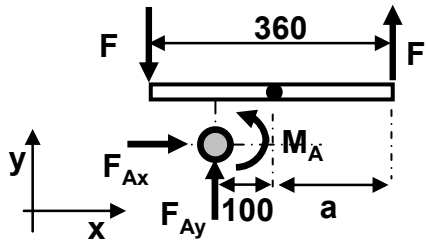
Es sind die Kräfte und das Moment gesucht, die auf die Radachse wirken. Wegen Aktio gleich Reaktio haben diese Größen die gleichen Beträge und nur umgekehrte Vorzeichen, wie die Kräfte und das Moment, die von der Achse auf das Rad wirken, damit das Rad im Gleichgewicht ist. Mit den Gleichgewichtsbedingungen für das Rad werden diese Lagerkräfte (F_{Ax}, F_{Ay}) und das Lagermoment (M_A) berechnet.



Geometrie 1:

Das Moment, welches die beiden Kräfte F bezüglich der Schraube erzeugen, beträgt $M_S = 90000$Nmm.

$M_S = aF + (360 - a)F = 360F = 90000 \quad => \quad F = 250N$



Mit den Gleichgewichtsbedingungen werden F_{Ax}, F_{Ay} und M_A berechnet.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

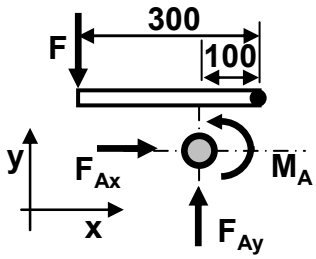
$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F + F = F_{Ay} = 0$

$\sum M|_A = 0: \quad M_A + (360 - 100 - a)F + (100 + a)F = M_A + 360F = M_A + 90000 = 0$

$=> \quad M_A = -90000Nmm$

M_A wurde in der Zeichnung positiv (mit dem Uhrzeigersinn) eingezeichnet. Bei der Berechnung ergibt sich ein negativer Zahlenwert. Das bedeutet, dass die Drehrichtung des Momentes M_A nicht wie ursprünglich in der Skizze angenommen sondern entgegen gesetzt orientiert ist. Somit hat M_A den Betrag 90000Nmm und dreht mathematisch negativ (mit dem Uhrzeiger). Das Gegenmoment, welches wiederum auf die Achse wirkt hat dann auch den Betrag 90000Nmm und dreht positiv. Die Kräfte auf die Achse sind gleich null.

Geometrie 2:



Die Kraft F soll bezüglich der Schraube ein Moment $M_S = 90000$Nmm erzeugen.

$M_S = 300F = 90000 \quad => \quad F = 300N$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen werden F_{Ax}, F_{Ay} und M_A berechnet.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F = 0 \quad => \quad F_{Ay} = 300N$

$\sum M|_A = 0: \quad M_A + (300 - 100)F = M_A + 200F = 0$

$=> \quad M_A = -60000Nmm$

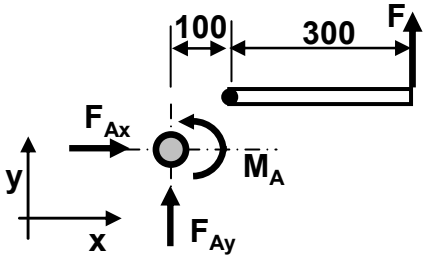
M_A wurde in der Zeichnung positiv eingezeichnet. Bei der Berechnung ergibt sich ein negativer Zahlenwert. Das bedeutet, dass die Drehrichtung des Momentes M_A nicht wie ursprünglich in der Skizze angenommen sondern entgegen gesetzt orientiert ist. Somit hat M_A den Betrag 60000Nmm und dreht mathematisch negativ. Das Gegenmoment, welches wiederum auf die Achse wirkt hat dann auch den Betrag 60000Nmm und dreht positiv. Die

senkrechte Kraft F_{Ay} wurde positiv in der Skizze eingezeichnet. Die Berechnung ergibt einen positiven Zahlenwert. Daher zeigt die Kraft F_{Ay} in die ursprünglich angenommen positive Richtung. Die senkrechte Kraft auf die Achse ist die Gegenkraft zu F_{Ay}. Sie hat den Betrag 300N und zeigt in die negative y-Richtung. Die waagrechte Kraft F_{Ax} ist gleich null.

Geometrie 3:

Die Kraft F soll bezüglich der Schraube ein Moment M_S = 90000Nmm erzeugen.

$M_S = 300F = 90000$ => $F = 300N$



Mit den Gleichgewichtsbedingungen werden F_{Ax}, F_{Ay} und M_A berechnet.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

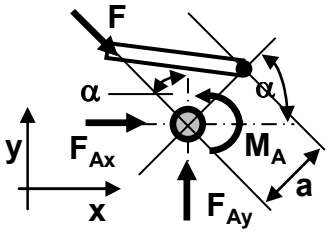
$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F = 0$ => $F_{Ay} = -300N$

$\sum M|_A = 0: \quad M_A + (300+100)F = M_A + 400F = 0$

=> $M_A = -120000Nmm$

M_A wurde in der Zeichnung positiv eingezeichnet. Bei der Berechnung ergibt sich ein negativer Zahlenwert. Das bedeutet, dass die Drehrichtung des Momentes M_A nicht wie ursprünglich in der Skizze angenommen sondern entgegen gesetzt orientiert ist. Somit hat M_A den Betrag 120000Nmm und dreht mathematisch negativ. Das Gegenmoment, welches wiederum auf die Achse wirkt hat dann auch den Betrag 120000Nmm und dreht positiv. Die senkrechte Kraft F_{Ay} wurde positiv in der Skizze eingezeichnet. Die Berechnung ergibt einen negativen Zahlenwert. Daher zeigt die Kraft F_{Ay} entgegen der ursprünglichen Annahme in der Skizze in die negative y-Richtung. Die senkrechte Kraft auf die Achse ist die Gegenkraft zu F_{Ay}. Sie hat den Betrag 300N und zeigt in die positive y-Richtung. Die waagrechte Kraft F_{Ax} ist gleich null.

Geometrie 4:

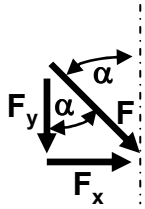


Zur Berechnung der Kraft muss der aktive Hebelarm a der Kraft F bezüglich der Schraube bestimmt werden.

$a = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$

Die Kraft F soll bezüglich der Schraube ein Moment M_S = 90000Nmm erzeugen.

$M_S = 125F = 90000$ => $F = 720N$



Für die Gleichgewichtsbedingungen benötigt man F_x und F_y. Dafür berechnet man den Winkel a aus den geometrischen Abmessungen

$\tan\alpha = \frac{75}{100} = 0.75$ => $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$

Mit dem Kräftedreieck erhält man

$F_x = \sin\alpha F = 0.6 \cdot 720 = 432N$ und $F_y = \cos\alpha F = 0.8 \cdot 720 = 576N$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen werden F_{Ax}, F_{Ay} und M_A berechnet.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_x = 0$ => $F_{Ax} = -432N$

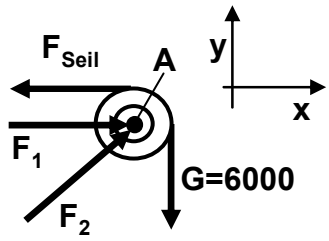
$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_y = 0 \quad => \quad F_{Ay} = 576N$

$\sum M\big|_A = 0: \quad M_A + 0 \cdot F = 0 \quad => \quad M_A = 0$

(Die Kraft F zeigt auf den Drehpunkt A und erzeugt bezüglich dieses Bezugspunktes kein Moment)

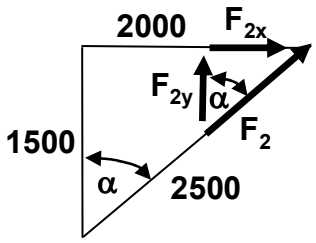
Die Kräfte auf die Achse sind wieder die Gegenkräfte zu F_{Ax} und F_{Ay}. Auf die Achse wirken somit in positive x-Richtung 432N und in negativer y-Richtung 576N.

<u>Lösungen Aufgabe 8:</u>



<u>Geometrie 1</u>:

Für die Berechnung der beiden gesuchten Stabkräfte F_1 und F_2 wird die Seilrolle freigeschnitten und alle angreifenden Kräfte eingezeichnet. Der Radius der Seilrolle beträgt R, ist aber unbekannt. Für die Gleichgewichtsbedingungen muss die Kraft F_2 in eine waagrechte und in eine senkrechte Komponente zerlegt werden. Die geometrischen Abmessungen ergeben mit



$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2000^2 + 1500^2} = 2500$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{2000}{2500} = 0.8 \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{1500}{2500} = 0.6$$

bzw.

$$\tan\alpha = \frac{2000}{1500} = \frac{4}{3} \qquad => \qquad \sin\alpha = 0.8 \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha = 0.6$$

Aus dem Kräftedreieck folgt dann:

$$F_{2x} = \frac{\Delta x}{L} F_2 = \sin\alpha F_2 = 0.8 F_2 \qquad \text{und} \qquad F_{2y} = \frac{\Delta y}{L} F_2 = \cos\alpha F_2 = 0.6 F_2$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen können dann die drei gesuchten Größen ermittelt werden.

$\sum M\big|_A = 0: \quad RF_{Seil} - RG = 0 \quad => \quad F_{Seil} = 6000N$

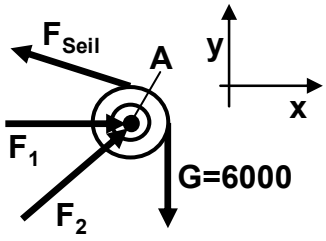
$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} - G = 0.6F_2 - G = 0 \quad => \quad F_2 = 10000N$

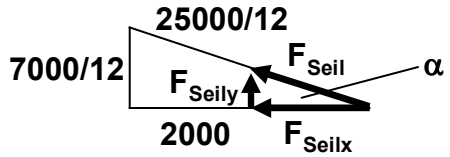
$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_{2x} - F_{Seil} = F_1 + 0.8F_2 - F_{Seil} = 0 \quad => \quad F_1 = -2000N$

Wegen des negativen Berechnungsergebnisses wirkt die Kraft F_1 entgegen der ursprünglichen Annahme nach links. Die Kraft F_2 wirkt so wie in der Skizze angenommen.

Geometrie 2:

Die Seilrolle wird wieder frei geschnitten. Zusätzlich zur ersten Geometrie muss auch die Seilkraft in eine waagrechte und in eine senkrechte Komponente zerlegt werden.





Die geometrischen Abmessungen ergeben mit

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2000^2 + \left(\frac{7000}{12}\right)^2} = \frac{25000}{12}$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{2000}{25000/12} = 0.96 \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{7000/12}{25000/12} = 0.28$$

bzw.

$$\tan\alpha = \frac{7000/12}{2000} = \frac{7}{24} \qquad => \qquad \alpha \approx 16.26°, \quad \sin\alpha = 0.28 \quad \text{und} \quad \cos\alpha = 0.96$$

Aus dem Kräftedreieck folgt dann:

$$F_{Seilx} = \frac{\Delta x}{L} F_{Seil} = \cos\alpha F_{Seil} = 0.96 F_2 \quad \text{und} \quad F_{2y} = \frac{\Delta y}{L} F_{Seil} = \sin\alpha F_{Seil} = 0.28 F_{Seil}$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen können dann die drei gesuchten Größen ermittelt werden.

$$\sum M\big|_A = 0: \quad RF_{Seil} - RG = 0 \qquad => \qquad F_{Seil} = 6000N$$

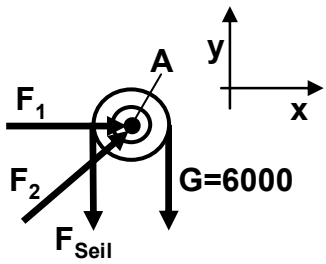
$$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} - G + F_{Seily} = 0.6F_2 - G + 0.28F_{Seil} = 0 \qquad => \qquad F_2 = 7200N$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_{2x} - F_{Seilx} = F_1 + 0.8F_2 - 0.96F_{Seil} = 0 \qquad => \qquad F_1 = 0$$

Die Kräfte wirken so, wie Sie ursprünglich eingezeichnet wurden.

Geometrie 3:

Die Seilrolle wird frei geschnitten. Anschließend können die Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet werden.



$$\sum M\big|_A = 0: \quad RF_{Seil} - RG = 0 \qquad => \qquad F_{Seil} = 6000N$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} - G - F_{Seil} = 0.6F_2 - G - F_{Seil} = 0$$

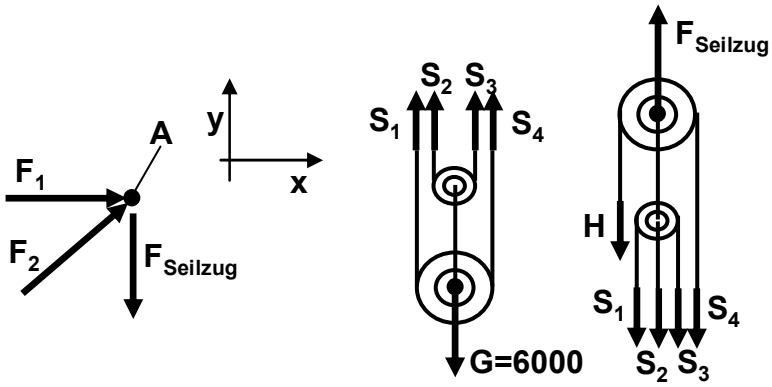
$$=> \qquad F_2 = 20000N$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_{2x} = F_1 + 0.8F_2 = 0 \qquad => \qquad F_1 = -16000N$$

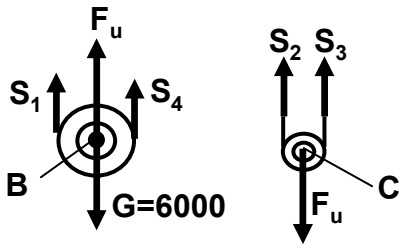
Kraft F_1 zeigt nach links und Kraft F_2 schräg nach oben.

Geometrie 4:

Der Knoten A, an dem die beiden Stäbe und der Flaschenzug verknüpft sind, wird frei geschnitten. Die Kräfte F_1 und F_2 sollen berechnet werden, dazu muss aber $F_{Seilzug}$ bekannt sein. Für die Berechnung von $F_{Seilzug}$ werden die oberen beiden Rollen und die unteren beiden Rollen freigeschnitten. Dafür muss man das Seil an fünf Stellen durch die Schnittkräfte S_1, S_2, S_3, S_4 und H ersetzen. Mit den durchgeführten Schnitten können diese Schnittkräfte aber noch nicht ermittelt werden. Um Zusatzinformationen zu erhalten, werden auch die beiden unteren Rollen zerschnitten.



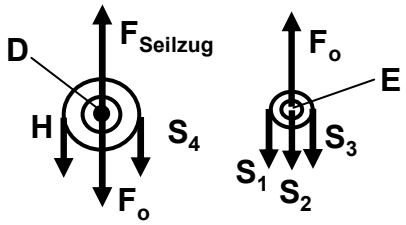
Da der Verbindungssteg zwischen den beiden unteren Rollen gelenkig miteinander verbunden ist, kann der Steg nur eine Kraft in Stegrichtung übertragen, weshalb nur die Schnittkraft F_u einzutragen ist. Die Gleichgewichtsbedingungen um B du C ergeben, wobei R_k der Radius der kleinen Rolle und R_g der Radius der großen Rolle ist:



$$\sum M|_B = 0: \quad R_g S_4 - R_g S_1 = 0 \quad => \quad S_1 = S_4$$
$$\sum M|_C = 0: \quad R_k S_3 - R_k S_2 = 0 \quad => \quad S_2 = S_3$$

Wiederholt man dies für die oberen beiden Rollen, so ergeben die Gleichgewichtsbedingungen um D und E:

$$\sum M|_D = 0: \quad R_g H - R_g S_4 = 0 \quad => \quad H = S_4$$
$$\sum M|_E = 0: \quad R_k S_1 - R_k S_3 = 0 \quad => \quad S_1 = S_3$$



Fügt man die 4 gefundenen Gleichungen zusammen, so folgt:
$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = H$

Man bildet die Kräftebilanz an den beiden unteren Rollen in y-Richtung.

$$\sum F_y = 0: \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - G = 4H - G = 0$$
$$=> \quad H = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1500N$$

Die Kräftebilanz an den beiden oberen Rollen in y-Richtung ergibt $F_{Seilzug}$.

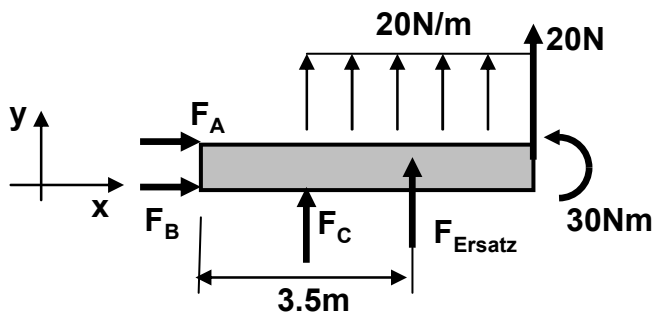
$$\sum F_y = 0: \quad -S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - H + F_{Seilzug} = 5H - F_{Seilzug} = 0$$
$$=> \quad F_{Seilzug} = 7500N$$

Die Kräftegleichgewichte am Punkt A ergeben die Stabkräfte F_1 und F_2.

$$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} - F_{Seilzug} = 0.6F_2 - F_{Seilzug} = 0 \quad => \quad F_2 = 12500N$$
$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_{2x} = F_1 + 0.8F_2 = 0 \quad => \quad F_1 = -10000N$$

Lösungen Aufgabe 9:

Geometrie 1:



Für die angreifende Streckenlast muss der Betrag der Ersatzkraft und ihr Angriffspunkt ermittelt werden. Die Streckenlast ist konstant, daher gilt mit q = Betrag der Streckenlast und L = Länge auf der die Streckenlast angreift:

$F_{Ersatz} = qL = 20 \cdot 4 = 80N$

$x_{Ersatz} = L/2 = 2m$

Die Länge x_{Ersatz} = 2m bedeutet, dass die Ersatzkraft einen Abstand von 3.5m vom linken Bauteilende besitzt.

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

$\sum F_y = 0: \quad F_C + F_{Ersatz} + 20 = F_C + 80 + 20 = 0 \quad => \quad F_C = -100N$

$\sum M\big|_B = 0:$

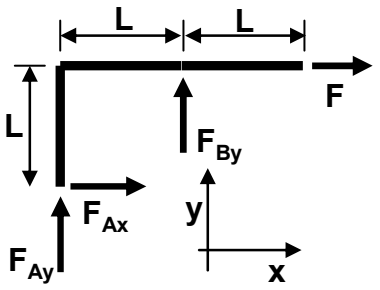
$-0.3F_A + 1.5F_C + 3.5F_{Ersatz} + 5.5 \cdot 20 + 30 = -0.3F_A - 150 + 280 + 110 + 30 = -0.3F_A + 270 = 0$

$=> \quad F_A = 900N$

$\sum F_x = 0: \quad F_A + F_B = 900 + F_B = 0 \quad => \quad F_B = -900N$

Lösungen Aufgabe 10:

Geometrie 1:



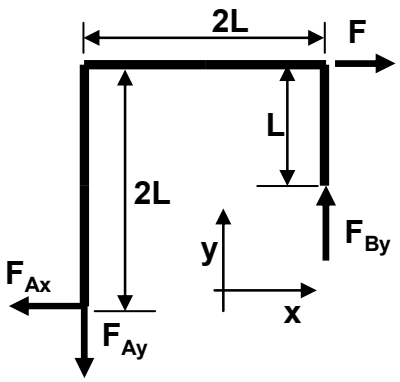
Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F = 0 \quad => \quad F_{Ax} = -F$

$\sum M|_A = 0: \quad LF_{By} - LF = 0 \quad => \quad F_{By} = F$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{By} = 0 \quad => \quad F_{Ay} = -F$

Geometrie 2:



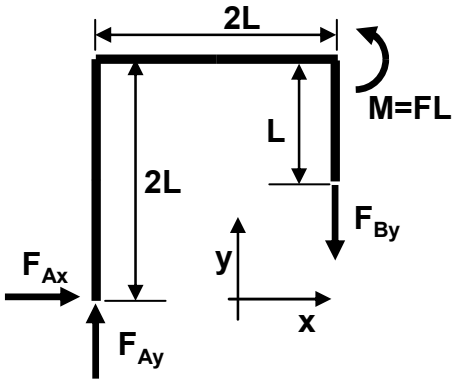
Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A:

$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F = 0 \quad => \quad F_{Ax} = F$

$\sum M|_A = 0: \quad 2LF_{By} - 2LF = 0 \quad => \quad F_{By} = F$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + F_{By} = 0 \quad => \quad F_{Ay} = F$

Geometrie 3:



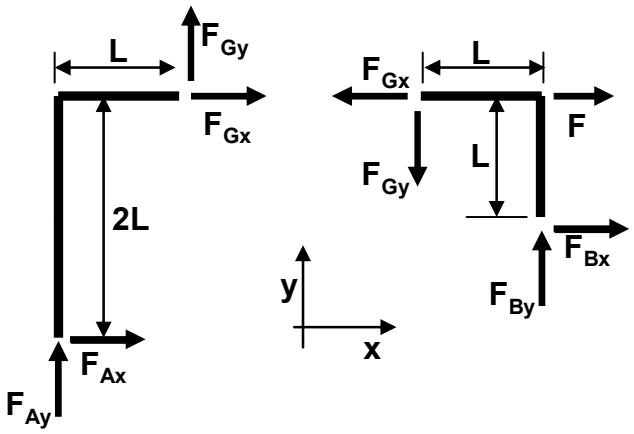
Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

$\sum M|_A = 0: \quad M - 2LF = FL - 2LF = 0 \quad => \quad F_{By} = F/2$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{By} = 0 \quad => \quad F_{Ay} = F/2$

Geometrie 4:



Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A für den linken Teil:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Gx} = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{Gy} = 0 \quad (2)$

$\sum M|_A = 0: \quad LF_{Gy} - 2LF_{Gx} = 0 \quad (3)$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um B für den rechten Teil:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} - F_{Gx} + F = 0 \qquad (4)$

$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - F_{Gy} = 0 \qquad (5)$

$\sum M\big|_B = 0: \quad LF_{Gx} + LF_{Gy} - LF = 0 \qquad (6)$

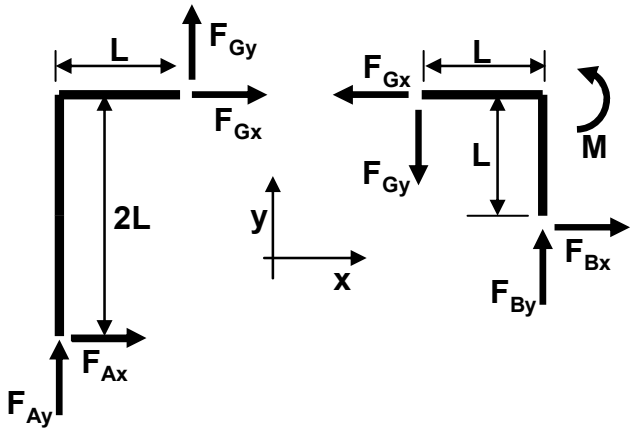
Aus (3) und (6) folgt:

$F_{Gx} = F/3$ und $F_{Gy} = 2F/3$

Aus (1), (2), (4), (5) folgt:

$F_{Ax} = -F/3$, $F_{Ay} = -2F/3$, $F_{Bx} = -2F/3$ und $F_{By} = 2F/3$

Geometrie 5:



Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A für den linken Teil:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Gx} = 0 \qquad (1)$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{Gy} = 0 \qquad (2)$

$\sum M\big|_A = 0: \quad LF_{Gy} - 2LF_{Gx} = 0 \qquad (3)$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um B für den rechten Teil:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} - F_{Gx} = 0$
(4)

$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - F_{Gy} = 0 \qquad (5)$

$\sum M\big|_B = 0: \quad LF_{Gx} + LF_{Gy} + M = LF_{Gx} + LF_{Gy} + FL = 0 \qquad (6)$

Aus (3) und (6) folgt:

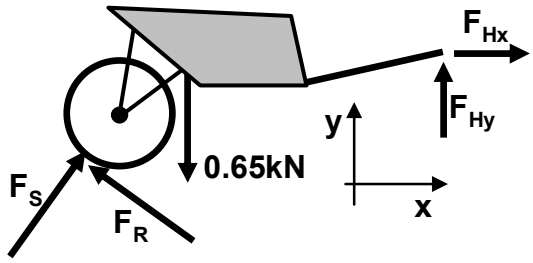
$F_{Gx} = -F/3$ und $F_{Gy} = -2F/3$

Aus (1), (2), (4), (5) folgt:

$F_{Ax} = F/3$, $F_{Ay} = 2F/3$, $F_{Bx} = -F/3$ und $F_{By} = -2F/3$

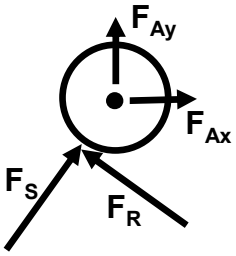
Lösungen Aufgabe 11:

Geometrie 1 (Schubkarre):



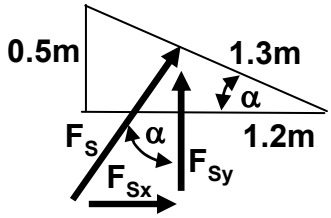
Schneidet man die Schubkarre frei, muss man zwei Handkräfte F_{Hx} und F_{Hy} und die Kräfte von der schiefen Ebene auf die Schubkarre F_S und F_R einführen. Man erhält 4 Unbekannte für die drei Gleichgewichtsbedingungen der Ebene. Daher benötigt man Zusatzinformationen, die man gewinnt, wenn man das Rad frei schneidet.
Mit dem Radradius R ergibt das Momentengleichgewicht um den Achspunkt A:

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -RF_R = 0 \qquad => \qquad F_R = 0$$



Somit bleiben drei unbekannte Kräfte F_{Hx}, F_{Hy} und F_S übrig, die man mit den Gleichgewichtsbedingungen für die Gesamtschubkarre bestimmen kann. Die Kraft FS muss in ihre Komponenten zerlegt werden. Das geometrische Dreieck ergibt:

$$\tan\alpha = \frac{0.5}{1.2} = \frac{5}{12}$$



$$=> \qquad \sin\alpha = \frac{5}{13} \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13}$$

Das Kräftedreieck ergibt:

$$F_{Sx} = F_S \sin\alpha = \frac{5}{13}F_S \qquad \text{und} \qquad F_{Sy} = F_S \cos\alpha = \frac{12}{13}F_S$$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A:

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Sx} + F_{Hx} = 5/13F_S + F_{Hx} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Sy} - 0.65 + F_{Hy} = 12/13F_S - 0.65 + F_{Hy} = 0$$

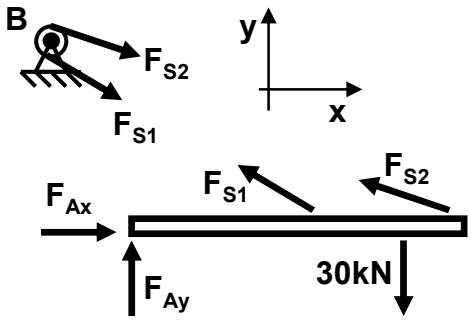
$$\sum M\big|_A = 0: \quad -0.2\cdot 0.65 - 0.2F_{Hx} + 1.6F_{Hy} = 0$$

Der Bezugspunkt A ist sehr geeignet, da von allen Kräften, die um A ein Moment erzeugen, die Hebelarme direkt aus der Skizze abzulesen sind. Die Auswertung der drei Gleichungen ergibt:

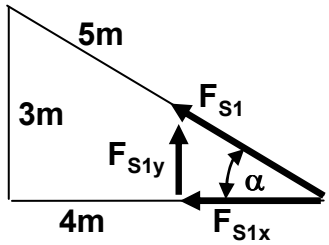
$$F_S = 0.65kN\,, \qquad F_{Hx} = -0.25kN \qquad \text{und} \qquad F_{Hy} = 0.05kN$$

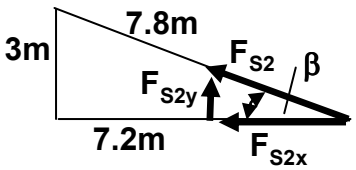
<u>Geometrie 2</u>:

Für die Berechnung muss das Seil durch die beiden Seilkräfte F_{S1} und F_{S2} ersetzt und die beiden Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay} eingeführt werden. Am Balken wirken dann 4 unbekannte Kräfte, die ohne weitere Informationen nicht bestimmt werden können. Diese Zusatzinformation erhält man durch das Momentengleichgewicht an der Seilrolle um deren Mittelpunkt B. Die Seilrolle hat den Radius R, die nicht eingezeichneten Lagerkräfte der Rolle zeigen auf den Bezugspunkt und erzeugen daher kein Moment um diesen.



$$\sum M\big|_B = 0: \quad RF_{S1} + RF_{S2} = 0 \qquad => \qquad F_{S1} = F_{S2}$$





Für die Gleichgewichtsbedingungen werden die Seilkräfte in waagrechte und senkrechte Komponenten zerlegt.

Da die beiden Seilkräfte gleich sind, gilt:

$$F_S = F_{S1} = F_{S2}$$

Das geometrische Dreieck für die Kraft F_{S1} ergibt:

$\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0.75$ => $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$

Das Kräftedreieck ergibt für die Seilkraft F_{S1}:

$F_{S1x} = F_{S1}\cos\alpha = 0.8F_{S1} = 0.8F_S$ und $F_{S1y} = F_{S1}\sin\alpha = 0.6F_{S1} = 0.6F_S$

Das geometrische Dreieck für die Kraft F_{S2} ergibt:

$\tan\beta = \frac{3}{7.2} = \frac{5}{12}$ => $\sin\beta = \frac{5}{13}$ und $\cos\beta = \frac{12}{13}$

Das Kräftedreieck ergibt für die Seilkraft F_{S2}:

$F_{S2x} = F_{S2}\cos\beta = \frac{12}{13}F_{S2} = \frac{12}{13}F_S$ und $F_{S2y} = F_{S2}\sin\beta = \frac{5}{13}F_{S2} = \frac{5}{13}F_S$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und Momentengleichgewicht um A am Balken:

$\sum M\big|_A = 0: \quad 4F_{S1y} - 5.6\cdot 30 + 7.2F_{S2y} = 4\cdot 0.6F_S - 5.6\cdot 30 + 7.2\frac{5}{13}F_S = 0$

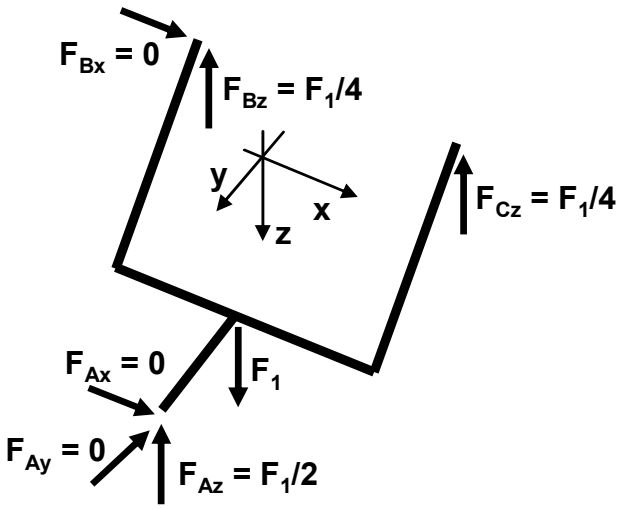
=> $F_S = 32.5kN$

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{S1x} - F_{S2x} = F_{Ax} - 0.8F_S - 12/13\,F_S = 0$ => $F_{Ax} = 56kN$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{S1y} + F_{S2y} - 30 = F_{Ay} + 0.6F_S + 5/13\,F_S - 30 = 0$ => $F_{Ax} = -2kN$

<u>Lösungen Aufgabe 12:</u>

<u>Kraft F_1</u>:



6 Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der 6 unbekannten Lagerkräfte:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad F_1 - F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0$

$\sum M_x\big|_A = 0: \; -LF_1 + 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0$

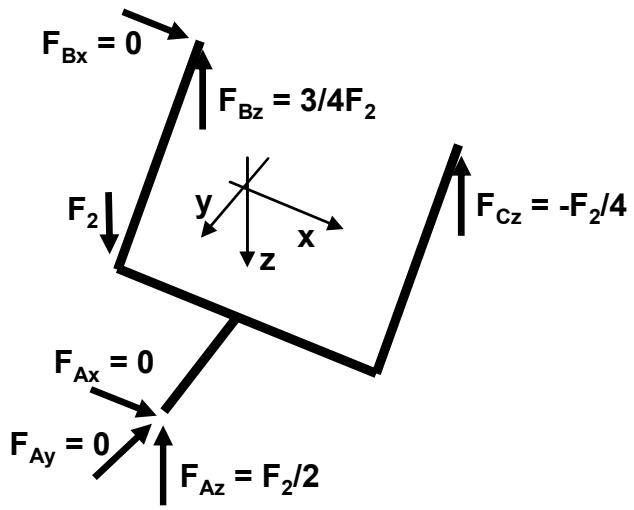
$\sum M_y\big|_A = 0: \; -LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$

$\sum M_z\big|_A = 0: \; 2LF_{Bx} = 0$

Die Auswertung der 6 Gleichgewichtsbedingungen ergibt:

$F_{Az} = F_1/2, \quad F_{Bz} = F_{Cz} = F_1/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = F_{Ay} = 0$

Kraft F_2:



Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad F_3 - F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0$

$\sum M_x\big|_A = 0: \; -LF_2 + 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0$

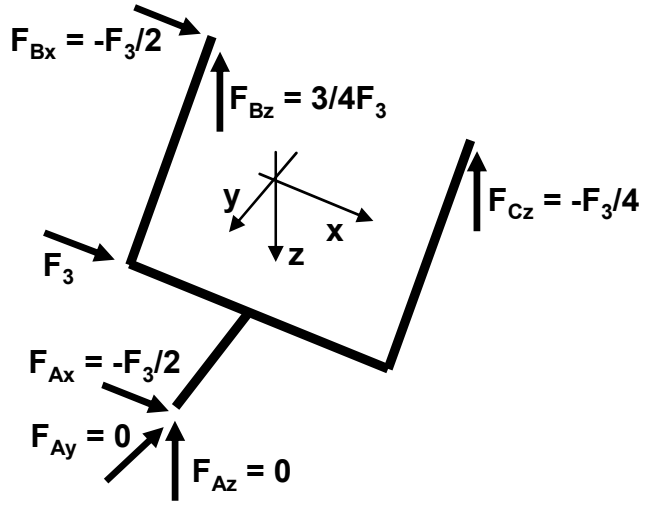
$\sum M_y\big|_A = 0: \; LF_2 - LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$

$\sum M_z\big|_A = 0: \; 2LF_{Bx} = 0$

Auswertung:

$F_{Az} = F_2/2, \quad F_{Bz} = 3/4\,F_2, \quad F_{Cz} = -F_2/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = F_{Ay} = 0$

Kraft F_3:



Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum F_x = 0: \quad F_3 + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0$

$\sum M_x\big|_A = 0: \; 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0$

$\sum M_y\big|_A = 0: \; -LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$

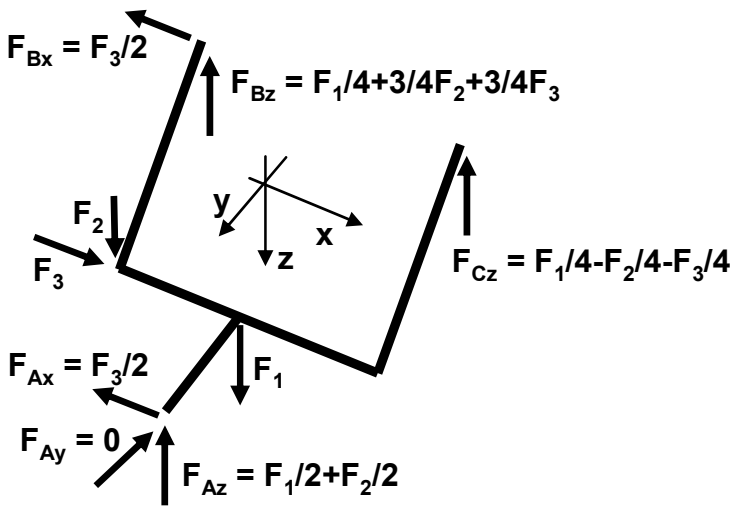
$\sum M_z\big|_A = 0: \; LF_3 + 2LF_{Bx} = 0$

Auswertung:

$F_{Az} = 0, \; F_{Bz} = F_3/4, \; F_{Cz} = -F_3/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = -F_3/2, \; F_{Ay} = 0$

Kraft F_1+F_2+F_3:

Bei der Lagerkraftberechnung handelt es sich um eine lineare Berechnungsaufgabe. Dies bedeutet, dass für die Berechnung der Lagerkräfte infolge F_1+F_2+F_3 die Lagerkräfte der Einzelbelastungen der drei Kräfte überlagert bzw. addiert werden.



$F_{Az} = F_1/2 + F_2/2$

$F_{Bz} = F_1/4 + 3/4\,F_2 + F_3/4$

$F_{Bz} = F_1/4 - F_2/4 - F_3/4$

$F_{Ax} = F_{Bx} = F_3/2$ (Orientierung siehe Skizze)

$F_{Ay} = 0$

Lösungen Aufgabe 13:

a.) Das Gestänge hat die Gewichtsstreckenlast G/10/L. Da die Profile gleichmäßig sind (gleiche Querschnitte), befinden sich die Schwerpunkte jeweils in der Teilbauteilmitte. Man erhält folgende Gewichtskräfte für die einzelnen Teilbauteile:

Waagrechter Teil des Schwenkarms (Länge L):

$$G_{Arm1} = \frac{G}{10L} L = 0.1G$$

Schräger Teil des Schwenkarms (Länge 4L):

$$G_{Arm\,2} = \frac{G}{10\,L} 4L = 0.4G$$

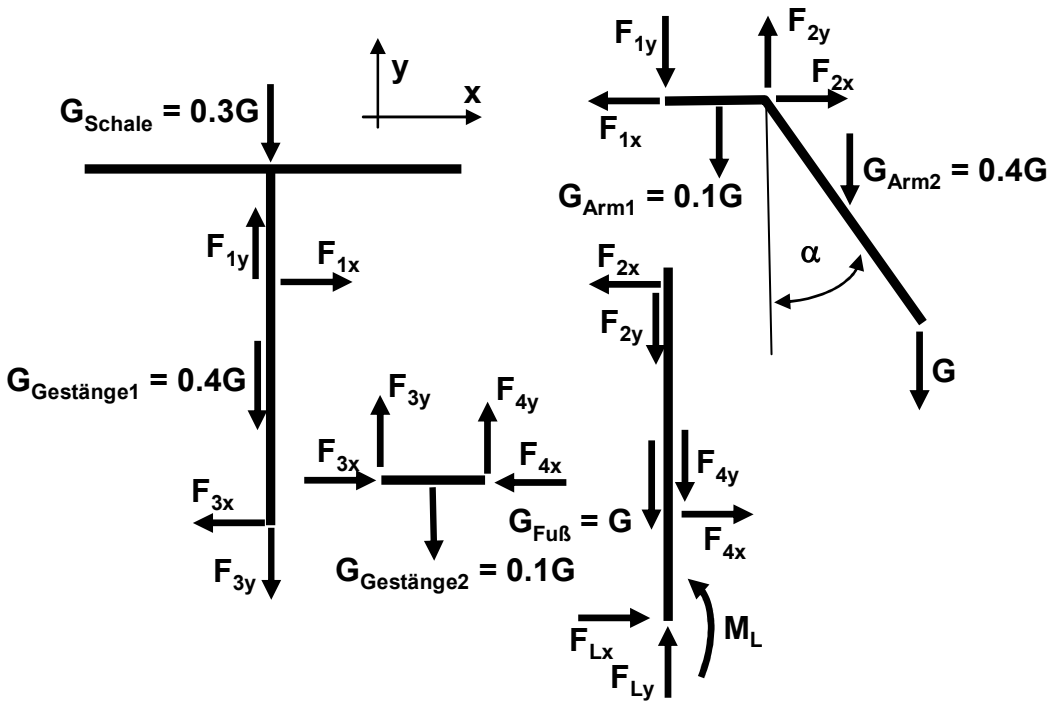
Senkrechte Anbindung des Waagschale (Länge 4L)

$$G_{Gestänge1} = \frac{G}{10L} 4L = 0.4G$$

Waagrechte Verbindungsstange (Länge L):

$$G_{Gestänge2} = \frac{G}{10L} L = 0.1G$$

Schneidet man die Waage frei und zeichnet die Gewichtskräfte und die noch unbekannten Schnittkräfte ein, erhält man folgendes Schnittbild.



Betrachtung von Gestänge1 und Schale:

$$\sum M\big|_3 = 0: \quad -3LF_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1x} = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{1x} - F_{3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{3x} = 0$$

Betrachtung von Gestänge2:

$\sum M\big|_4 = 0: \quad -LF_{3y} + L/2\, G_{Gestänge2} = -LF_{3y} + L/2 \cdot 0.1G = 0 \qquad => \qquad F_{3y} = G/20$

Betrachtung von Gestänge1 und Schale:

$\sum F_y = 0: \quad F_{1y} - F_{3y} - G_{Gestänge1} - G_{Schale} = F_{1y} - 0.05G - 0.4G - 0.3G = 0 => \qquad F_{1y} = 0.75G$

Betrachtung von Arm1 und Arm2:

$\sum M\big|_2 = 0: \quad LF_{1y} + L/2\, G_{Arm1} - \sin\alpha \cdot 2LG_{Arm2} - \sin\alpha \cdot 4LG$

$= 0.75LG + 0.05LG - \sin\alpha \cdot 0.8LG - \sin\alpha \cdot 4LG = 0$

$=> \qquad \sin\alpha = \dfrac{0.8LG}{4.8LG} = \dfrac{1}{6} \qquad => \qquad \alpha = 9.59°$

Für die Berechnung der Lagerkräfte und Momente wird auch die Bilanz in x- und y-Richtung ausgewertet.

$\sum F_x = 0: \quad -F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad => \qquad F_{2x} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{1y} - G_{Arm1} + F_{2y} - G_{Arm2} - G = 0.75G - 0.1G + F_{2y} - 0.4G - G = 0$

$=> \qquad F_{2y} = 2.25G$

Betrachtung von Gestänge2:

$\sum F_x = 0: \quad F_{3x} - F_{4x} = 0 \qquad => \qquad F_{4x} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_{3y} - G_{Gestänge2} + F_{4y} = 0.05G - 0.1G + F_{4y} = 0$

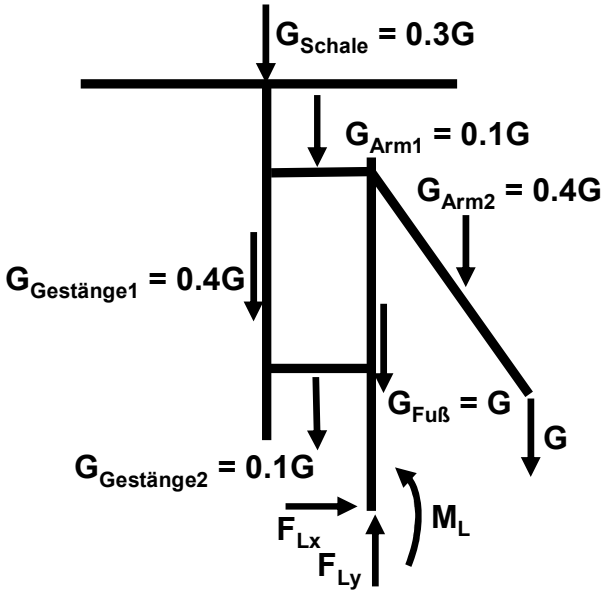
$=> \qquad F_{4y} = 0.05G$

Betrachtung Fuß:

$\sum F_x = 0: \quad F_{Lx} - F_{2x} + F_{4x} = F_{Lx} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ly} - F_{2y} - F_{4y} - G_{Fuß} = F_{Ly} - 2.25G - 0.05G - G = 0 \qquad => \qquad F_{Ly} = 3.3G$

$\sum M\big|_L = 0: \quad M_L = 0$



Alternativ kann man auch die Lagerkräfte- und Lagermomente an der Gesamtwaage berechnen.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Lx} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ly} - G_{Schale} - G_{Gestänge1} - G_{Gestänge2} - G_{Fuß} - G_{Arm1} - G_{Arm2} - G$

$= F_{Ly} - 0.3G - 0.4G - 0.1G - G - 0.1G - 0.4G_{Arm2} - G = 0$

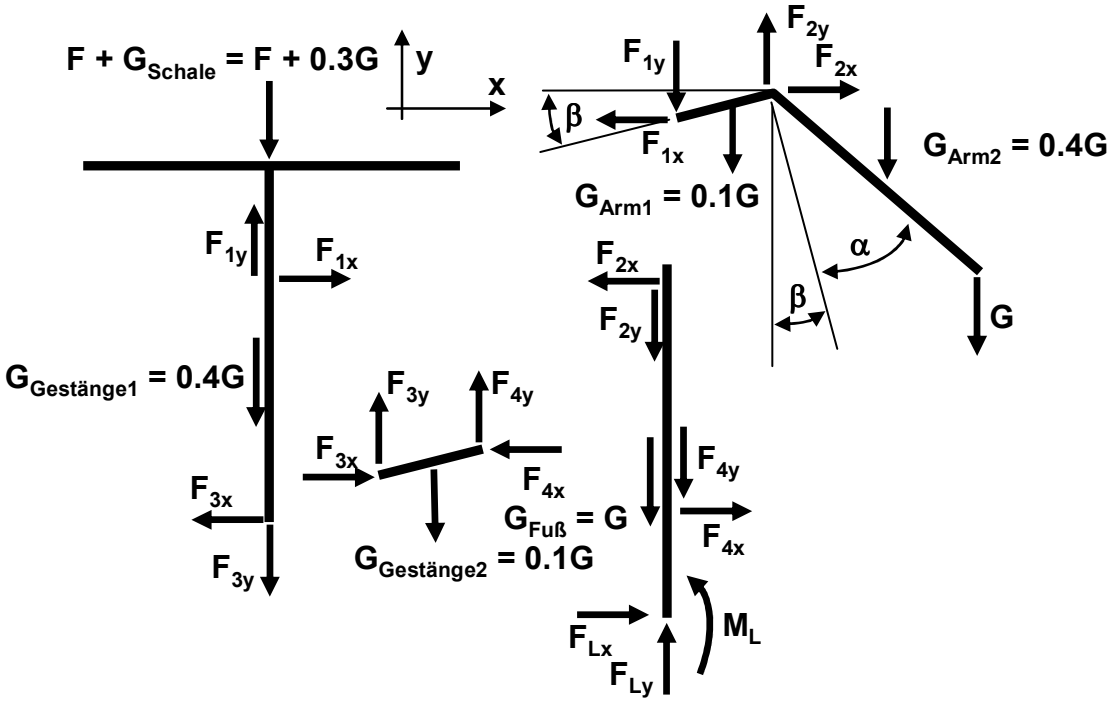
=> $F_{Ly} = 3.3G$

$$\sum M\big|_L = 0: \quad M_L + LG_{Schale} + LG_{Gestänge1} + \frac{L}{2}G_{Gestänge2} + \frac{L}{2}G_{Arm1} - \sin\alpha \cdot 2LG_{Arm2} - \sin\alpha \cdot 4LG$$

$$= M_L + 0.3LG + 0.4LG + 0.05LG + 0.05LG - \frac{2}{15}LG - \frac{2}{3}LG = 0$$

=> $M_L = 0$

b.) Zum Schnittbild von a.) kommt die Kraft F und der zu berücksichtigende Winkel β dazu. Der Schwenkarm und das Gestänge liegen dadurch geneigt.



Betrachtung von Gestänge1 und Schale:
Die Kräfte F_{1x} und F_{3x} sind unverändert gleich null.

Betrachtung von Gestänge2:
Die Kraft F_{4x} ist unverändert gleich null. Die Kräfte F_{3y} = 0.05G und F_{4y} =0.05G bleiben ebenso unverändert.

Betrachtung von Gestänge1 und Schale:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{1y} - F_{3y} - G_{Gestänge1} - G_{Schale} - F = F_{1y} - 0.05G - 0.4G - 0.3G - F = 0$$

=> $F_{1y} = 0.75G + F$

Betrachtung von Arm1 und Arm2:

$$\sum M\big|_2 = 0: \quad \cos\beta LF_{1y} + \cos\beta L/2\, G_{Arm1} - \sin(\alpha+\beta)\cdot 2LG_{Arm2} - \sin(\alpha+)\cdot 4LG$$

$$= \cos\beta(0.75LG + LF) + \cos\beta 0.05LG - \sin(\alpha+\beta)\cdot 0.8LG - \sin(\alpha+\beta)\cdot 4LG$$

$$= \cos\beta(0.75LG + LF) + \cos\beta 0.05LG - \sin(\alpha+\beta)\cdot 4.8LG = 0$$

Der Term sin(α + β) kann durch ein Additionstheorem umgewandelt werden (vgl. Formelsammlung)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Dadurch ändert sich die Bilanz der Momente um den Punkt 2:

=> $\cos\beta(0.75LG+LF)+\cos\beta 0.05LG-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)4.8LG=0$

=> $(0.75LG+LF)+0.05LG-(\sin\alpha+\cos\alpha\tan\beta)4.8LG=0$

=> $\tan\beta=\dfrac{0.8G+F-\sin\alpha\cdot 4.8G}{4.8\cos\alpha\cdot G}=\dfrac{F}{4.8\cos\alpha\cdot G}=\dfrac{F}{4.8\cdot 0.986\cdot G}=\dfrac{F}{4.733G}$

=> $\beta=\arctan\dfrac{F}{4.733G}$

c.) Für F = 5G erhält man für β:

$$\beta=\arctan\frac{5G}{4.733G}=\arctan\frac{5}{4.733}=46.57°$$

Bei der Berechnung von Lagerkräften und Lagermoment berücksichtigt man, dass weiterhin keine waagrechten Kräfte auftreten. Daher bleibt auch F_{Lx} und M_L unverändert gleich null.

$$\sum F_y=0: \quad F_{Ly}-G_{Schale}-G_{Gestänge1}-G_{Gestänge2}-G_{Fuß}-G_{Arm1}-G_{Arm2}-G-F$$
$$=F_{Ly}-0.3G-0.4G-0.1G-G-0.1G-0.4G_{Arm2}-G-5G=0$$

=> $F_{Ly}=8.3G$

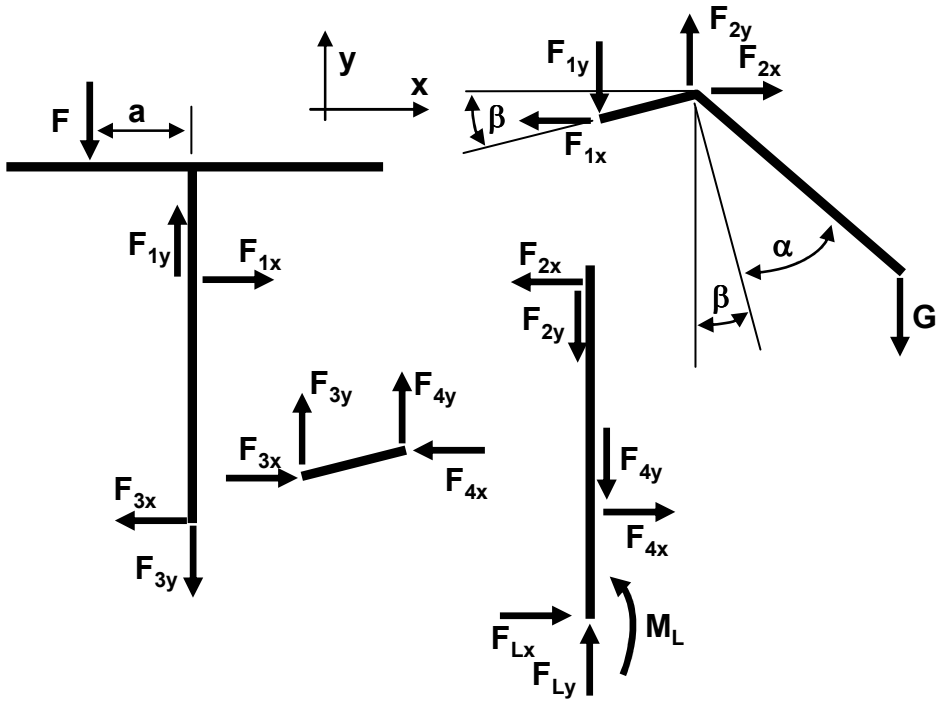
Vernachlässigt man die Gewichtskräfte, nicht aber das Gegengewicht G, bedeutet dies, dass der Winkel α = 0 ist. Daraus resultiert für den Winkel b mit cos(0) = 1:

$$\tan\beta=\frac{F}{4\cos\alpha\cdot G}=\frac{5G}{4G}=\frac{5}{4} \qquad => \qquad \beta=\arctan\frac{5}{4}=51.34°$$

Die Abweichung d beträgt dann:

$$d=100\%\left(\frac{51.34°}{46.57°}-1\right)=10.2\%$$

d.) Ohne Gewichtskräfte und mit einer nicht mehr zentral angreifenden Kraft F ergibt sich das dargestellte Schnittbild.



Betrachtung von Gestänge1 und Schale:

$$\sum M\big|_3 = 0: \quad aF - 3LF_{1x} = 0 \qquad => \qquad F_{1x} = \frac{a}{3L}F$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{1x} - F_{3x} = 0 \qquad => \qquad F_{3x} = \frac{a}{3L}F$$

Betrachtung von Gestänge2:

$$\sum M\big|_4 = 0: \quad \sin\beta \cdot LF_{3x} - \cos\beta \cdot LF_{3y} = 0 \qquad => \qquad F_{3y} = \tan\beta \cdot F_{3x} = \frac{\tan\beta \cdot a}{3L}F$$

Betrachtung von Gestänge1 und Schale:

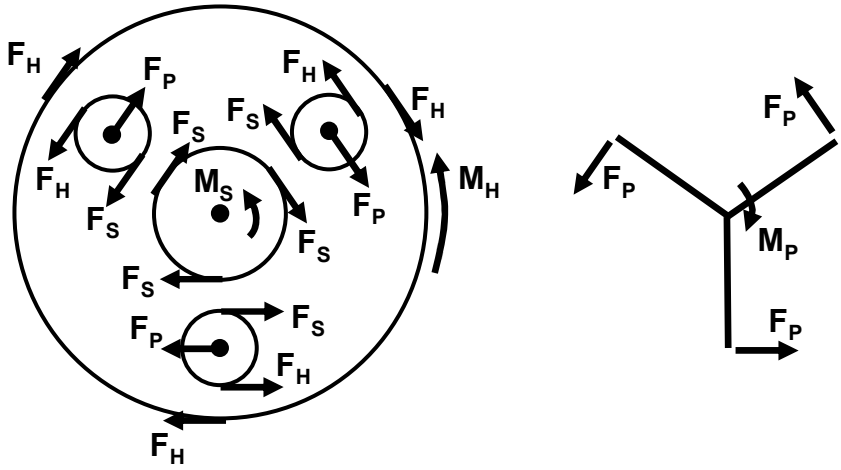
$$\sum F_y = 0: \quad F_{1y} - F_{3y} - F = F_{1y} - \frac{\tan\beta \cdot a}{3L}F = 0 \quad => \qquad F_{1y} = \left(\frac{\tan\beta \cdot a}{3L} + 1\right)F$$

Betrachtung von Arm1 und Arm2 mit α = 0 (keine Gewichtskraft):

$$\begin{aligned}\sum M\big|_2 = 0: \quad & \cos\beta \cdot LF_{1y} - \sin\beta \cdot LF_{1x} - \sin\beta \cdot 4LG \\ &= \cos\beta \cdot L\left(\frac{\tan\beta \cdot a}{3L} + 1\right)F - \sin\beta \cdot \frac{a}{3L}LF - \sin\beta \cdot 4LG \\ &= \sin\beta\frac{a}{3}F + \cos\beta \cdot LF - \sin\beta \cdot \frac{a}{3}F - \sin\beta \cdot 4LG \\ &= \cos\beta \cdot LF - \sin\beta \cdot 4LG = 0\end{aligned}$$

$$=> \qquad \tan\beta = \frac{F}{4G} \qquad => \qquad \beta = \arctan\frac{F}{4G}$$ (β ist unabhängig von a)

Lösungen Aufgabe 14:



a.) Schneidet man Sonne, Planten, Hohlrad und Planetenträger frei, so erhält man das dargestellte Schnittbild.

b.) Die Bilanz der Momente der an der Sonne wirkenden Kräfte und Momente bezüglich des Zentrums S der Sonne lautet:

$$\sum M\big|_S = 0: \quad M_S - 3R_S F_S = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_S = \frac{M_S}{3R_S}$$

Die Bilanz der Momente der an den Planenten wirkenden Kräfte um den jeweiligen Planetenmittelpunkt EP und die Kräftebilanz in Umfangsrichtung ergeben:

$$\sum M\big|_{EP} = 0: \quad \frac{R_H - R_S}{2} F_H - \frac{R_H - R_S}{2} F_S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_H = F_S = \frac{M_S}{3R_S}$$

$$\sum F_{Umfang} = 0: \; F_S + F_H - F_P = 2F_S - F_P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_P = 2F_S = \frac{2M_S}{3R_S}$$

Die Bilanz der Momente am Planententräger um den Planetenträgermittelpunkt P lautet:

$$\sum M\big|_P = 0: \quad 3\frac{R_H + R_S}{2} F_P - M_P = \frac{R_H + R_S}{R_S} M_S - M_P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_P = \frac{R_H + R_S}{R_S} M_S$$

Die Bilanz der Momente am Hohlrad um den Hohlradmittelpunkt H bzw. Sonnenmittelpunkt S lautet:

$$\sum M\big|_H = 0: \quad M_H - 3R_H F_H = M_H - \frac{R_H}{R_S} M_S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_H = \frac{R_H}{R_S} M_S$$

Da von außen auf das Gesamtsystem nur die drei Momente M_S, M_P und M_H und keine Kräfte wirken, muss die Summe der drei Momente null ergeben.

$$M_S - M_P + M_H = M_S - \frac{R_H + R_S}{R_S} M_S + \frac{R_H}{R_S} M_S = 0$$

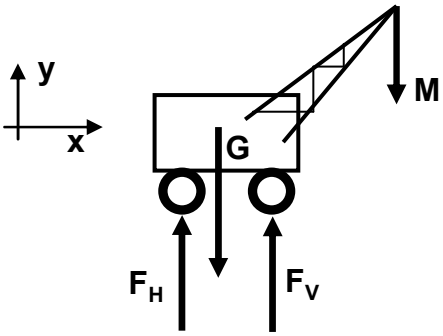
c.) Für $M_P = 5M_S$ gilt:

$$5 = \frac{M_P}{M_S} = \frac{R_H + R_S}{R_S} \qquad \Rightarrow \qquad 5R_S = R_H + R_S \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_H}{R_S} = 4$$

Theoretisch kann man die Planeten beliebig klein wählen. Dies bedeutet, dass R_H gegen R_S strebt. Somit ergibt sich das kleinste Grenzverhältnis min(M_P/M_S):

$$\min \frac{M_P}{M_S} = \frac{R_S + R_S}{R_S} = 2$$

Lösungen Aufgabe 15:



a.) Die Last M ist dadurch beschränkt, dass der Kran nicht nach vorne kippen darf. Für das Kippkriterium schneidet man den Kran frei und zeichnet die Schnittkräfte ein. Kippt er nach vorne, verliert das Hinterrad den Kontakt zur Schiene und es kann am Hinterrad keine Kraft ($F_H = 0$) mehr übertragen werden.

Die kritische Last erreicht man genau dann, wenn F_H gleich null wird. Dies ergibt die Bilanz der Momente um den vorderen Aufstandspunkt V:

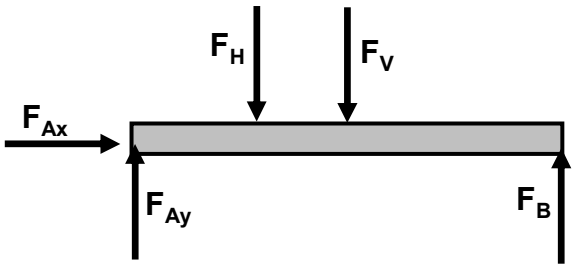
$$\sum M\big|_V = 0: \quad 1.2G - 2M = 0 \qquad => \qquad M = 0.6G$$

b.) Wählt man M = 0.5G resultieren Radaufstandskräfte ungleich null.

$$\sum M\big|_V = 0: \quad 1.2G - 2M - 2F_H = 1.2G - G - 2F_H = 0 \qquad => \qquad F_H = 0.1G$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_H + F_V - G - M = 0.1G + F_V - G - 0.5G = 0 \qquad => \qquad F_V = 1.4G$$

Die Gegenkräfte der Kräfte an den Rädern des Krans wirken auf die Schiene. Sie werden zur Berechnung der Lagerkräfte benötigt.



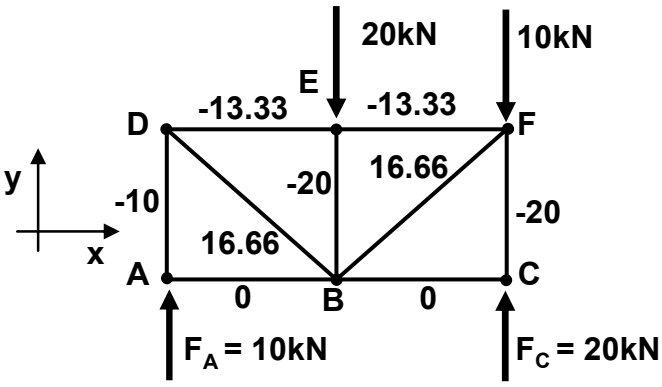
$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -2F_H - 4F_V + 8F_B = -2 \cdot 0.1G - 4 \cdot 1.4G + 8F_B = 0 \qquad => \qquad F_B = 0.725G$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ay} - F_H - F_V + F_B = F_{Ay} - 0.1G - 1.4G + 0.725G = 0 \qquad => \qquad F_B = 0.775G$$

Lösungen Aufgabe 16:

Geometrie 1:



Lagerkräfte:

$\sum M_x\big|_A = 0: \quad 4F_C - 2\cdot 20 - 4\cdot 10 = 0$

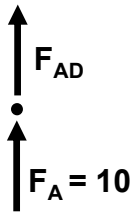
=> $\quad F_C = 20kN$

$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_C - 20 - 10 = 0$

=> $\quad F_A = 10kN$

$\sum F_x = 0: \quad F_{Cx} = 0$ (nicht eingezeichnet)

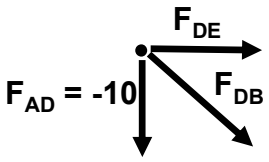
Nullstäbe:
Die Stäbe AB und BC können vorab als Nullstäbe erkannt werden.

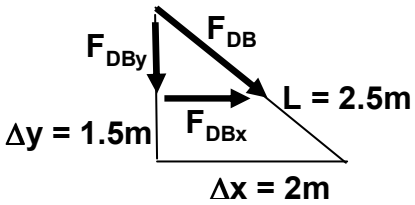


Berechnete Stabkräfte:
Kräftebilanz am Knoten A:

$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_{AD} = 10 + F_{AD} = 0 \quad$ => $\quad F_{AD} = -10$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten D:





Die Kraft F_{DB} muss in Komponenten zerlegt werden. Das geometrische Dreieck ergibt:

$\frac{\Delta x}{L} = \frac{2}{2.5} = 0.8, \quad \frac{\Delta y}{L} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$

Dies ergibt die Kraftkomponenten

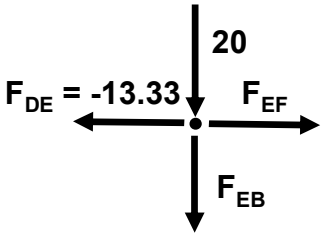
$F_{DBx} = \frac{\Delta x}{L} F_{DB} = 0.8 F_{DB}$ und $F_{DBy} = \frac{\Delta y}{L} F_{DB} = 0.6 F_{DB}$

Die Kräftebilanzen in x- und y-Richtung ergeben:

$\sum F_y = 0: \quad -F_{AD} - F_{DBy} = -(-10) - 0.6F_{DB} = 0 \quad$ => $\quad F_{DB} = 16\frac{2}{3}$ (Zugstab)

$\sum F_x = 0: \quad F_{DE} + F_{DBx} = F_{DE} + 0.8F_{DB} = F_{DE} + 0.8\cdot 16\frac{2}{3} = 0$ => $\quad F_{DE} = -13\frac{1}{3}$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten E:



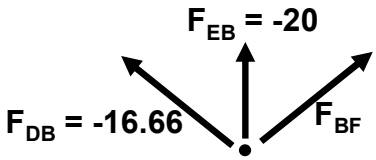
$\sum F_x = 0: \quad -F_{DE} + F_{EF} = -\left(-13\frac{1}{3}\right) + F_{EF} = 0$

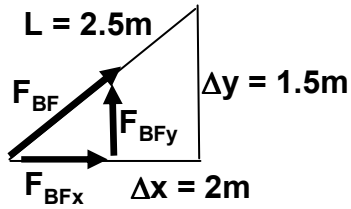
=> $\quad F_{EF} = -13\frac{1}{3}$ (Druckstab)

$\sum F_y = 0: \quad -F_{EB} - 20 = 0$ => $\quad F_{EB} = -20$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten B:
Die Kraft F_{BF} muss in Komponenten zerlegt werden. Das geometrische Dreieck ergibt:

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{2}{2.5} = 0.8\,, \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$$





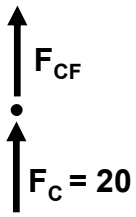
Dies ergibt die Kraftkomponenten

$$F_{BFx} = \frac{\Delta x}{L} F_{BF} = 0.8 F_{BF} \qquad \text{und} \qquad F_{BFy} = \frac{\Delta y}{L} F_{BF} = 0.6 F_{BF}$$

Die Kräftebilanz in x-Richtung ergibt:

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{DEx} + F_{BFx} = -0.8 F_{DE} + 0.8 F_{BF} = -0.8\left(-16\frac{2}{3}\right) + 0.8 F_{BF} = 0$$

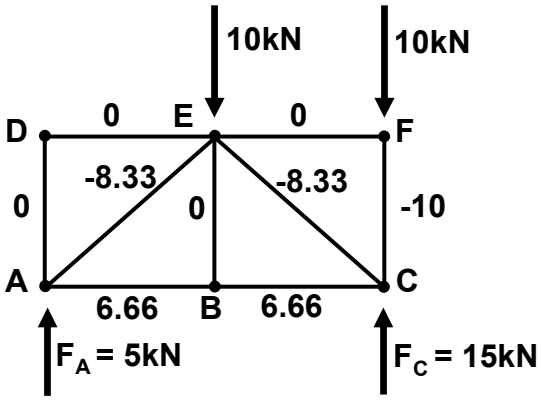
=> $\quad F_{BF} = -16\frac{2}{3}$ (Druckstab)



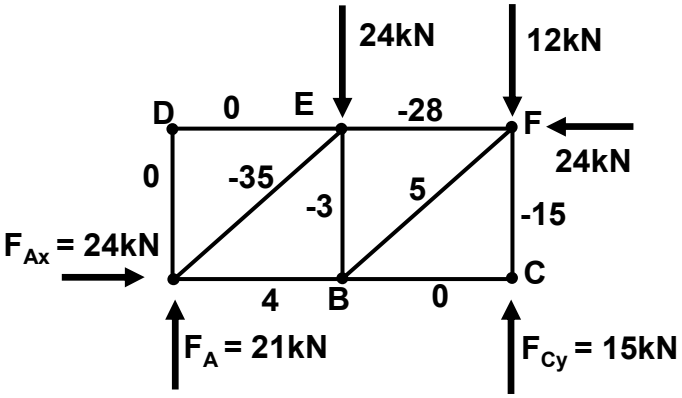
Kräftebilanz am Knoten C:

$$\sum F_y = 0: \qquad F_C + F_{CF} = 20 + F_{CF} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{CF} = -20 \text{ (Druckstab)}$$

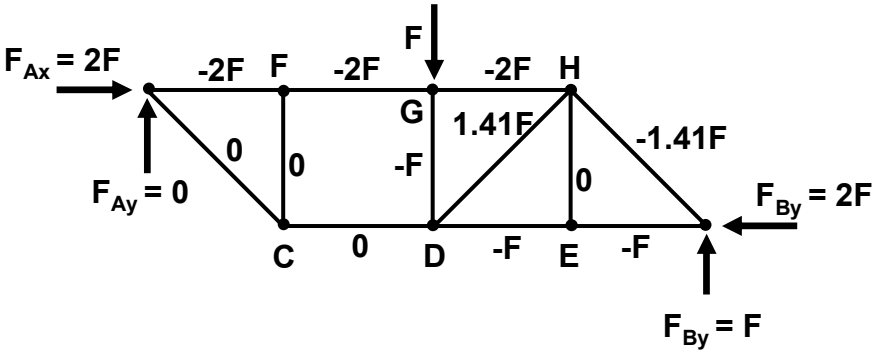
<u>Geometrie 2</u>:



<u>Geometrie 3</u>:

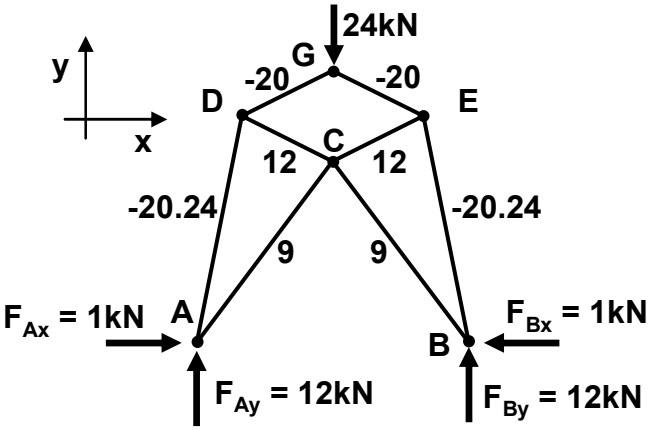


Geometrie 4:



Die Lagerkräfte können vorab nicht bestimmt werden (4 Unbekannte und 3 Gleichungen). Man erkennt aber am Knoten F sofort, dass der Stab CF ein Nullstab sein muss. Betrachtet man dann den Knoten C, so folgt, dass auch AC und CD Nullstäbe sein müssen. Ist AC ein Nullstab, so gilt $F_{Ay} = 0$. Anschließend sind nur noch drei Lagerkräfte unbekannt. Die restlichen Größen können mit der Standardvorgehensweise ermittelt werden.

Geometrie 5:



Berechnung der senkrechten Lagerkräfte. Der Betrag der waagrechten Lagerkräfte kann nicht bestimmt werden, nur dass diese gleich groß sein müssen.

$\sum M_x\big|_A = 0: \quad -9 \cdot 24 + 18 F_{By} = 0$

=> $\quad F_{By} = 12kN$

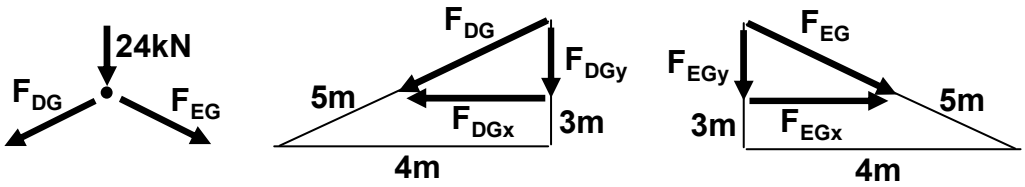
$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - 242 + F_{By} = 0$

=> $\quad F_{Ay} = 12kN$

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Bx} = 0$

=> $\quad F_{Ax} = F_{Bx}$

Kräftebilanz am Knoten G:



Die Kräfte F_{DG} und F_{EG} müssen in ihre Komponenten zerlegt werden. Jeweils gelten die gleichen Richtungskosinus:

$\frac{\Delta x}{L} = \frac{4}{5} = 0.8$ und $\frac{\Delta y}{L} = \frac{3}{5} = 0.6$

Dies ergibt die Kraftkomponenten

$F_{DGx} = \frac{\Delta x}{L} F_{DG} = 0.8 F_{DG}$ und $F_{DGy} = \frac{\Delta y}{L} F_{DG} = 0.6 F_{DG}$

$F_{EGx} = \frac{\Delta x}{L} F_{EG} = 0.8 F_{EG}$ und $F_{EGy} = \frac{\Delta y}{L} F_{EG} = 0.6 F_{EG}$

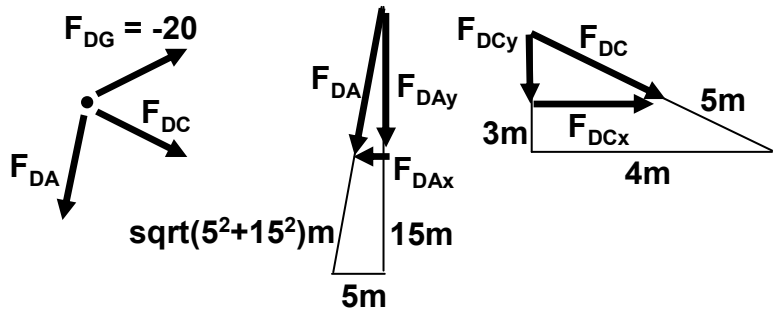
Die Kräftebilanzen in x- und y-Richtung müssen gekoppelt gelöst werden. Sie lauten:

$\sum F_x = 0: \qquad -F_{DGx} + F_{EGx} = -0.8F_{DG} + 0.8F_{EG} = 0$

$\sum F_y = 0: \qquad -F_{DGy} - 24 - F_{EGy} = -0.6F_{DG} - 24 - 0.6F_{EG} = 0$

=> $\quad F_{DG} = -20$ (Druckstab) und $F_{EG} = -20$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten D:



Anmerkung: $sqrt(x) = \sqrt{x}$
(square root)

Die Kräfte F_{DA} muss in ihre Komponenten zerlegt werden. Die Richtungskosinus lauten:

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 15^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{15}{\sqrt{5^2 + 15^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Dies ergibt die Kraftkomponenten

$$F_{DAx} = \frac{\Delta x}{L} F_{DA} = \frac{1}{\sqrt{10}} F_{DA} \qquad \text{und} \qquad F_{DAy} = \frac{\Delta y}{L} F_{DA} = \frac{3}{\sqrt{10}} F_{DA}$$

Auch die Kraft F_{DC} muss in ihre Komponenten zerlegt werden. Die Richtungskosinus lauten:

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{4}{5} = 0.8 \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Dies ergibt die Kraftkomponenten

$$F_{DCx} = \frac{\Delta x}{L} F_{DC} = 0.8F_{DC} \qquad \text{und} \qquad F_{DCy} = \frac{\Delta y}{L} F_{DC} = 0.6F_{DC}$$

Die Kräftebilanzen in x- und y-Richtung müssen gekoppelt gelöst werden. Sie lauten:

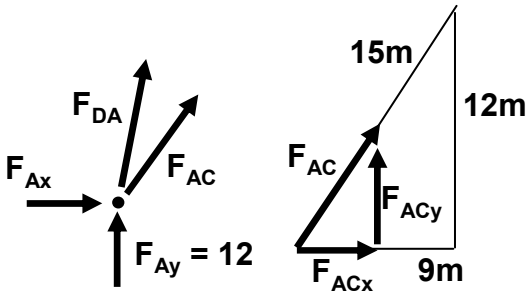
$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{DAx} + F_{DCx} + F_{DGx} = -\frac{1}{\sqrt{10}} F_{DA} + 0.8F_{DC} + 0.8(-20) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad -F_{DAy} - F_{DCy} + F_{DGy} = -\frac{3}{\sqrt{10}} F_{DA} - 0.6F_{DC} + 0.6(-20) = 0$$

=> $\quad F_{DA} = -6.4\sqrt{10} = -20.24$ (Druckstab) und $F_{DC} = -12$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten A:
Die Kräfte F_{AC} muss in ihre Komponenten zerlegt werden.
Die Richtungskosinus lauten:

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{9}{15} = 0.6 \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta y}{L} = \frac{12}{15} = 0.8$$



Dies ergibt die Kraftkomponenten

$$F_{ACx} = \frac{\Delta x}{L} F_{AC} = 0.6 F_{AC} \qquad \text{und} \qquad F_{ACy} = \frac{\Delta y}{L} F_{AC} = 0.8 F_{AC}$$

Die Kräftebilanzen in x- und y-Richtung lauten:

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Ay} + F_{DAy} + F_{ACy} = 12 + \frac{3}{\sqrt{10}}\left(-6.4\sqrt{10}\right) + 0.8 F_{AC} = 0$$

=> $F_{AC} = 9$ (Zugstab)

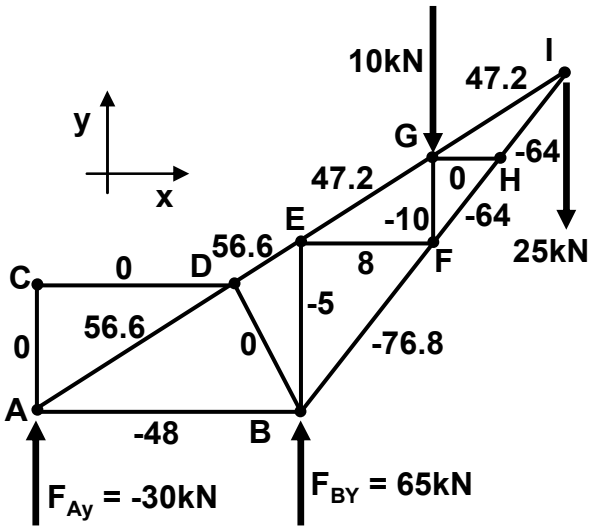
$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} + F_{ACx} + F_{DAx} = F_{Ax} + 0.6 F_{AC} + \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-6.4\sqrt{10}\right) = F_{Ax} + 0.6 \cdot 9 - 6.4 = 0$$

=> $F_{Ax} = 1$ => $F_{Bx} = 1$ (Gleichgewichtsbedingung des Gesamtbauteils)

Die Stäbe BC mit $F_{BC} = 9$ und BE mit $F_{BE} = -20.24$ ergeben sich aus Gründen der Symmetrie.

<u>Lösungen Aufgabe 17:</u>

Aus den Annahmen kann mit F = 5kN für $F_1 = 2F$ und $F_2 = 5F$ gewählt werden.



Lagerkräfte:
Die Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Kranausleger ermöglichen die Ermittlung der Lagerkräfte.

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_x\big|_A = 0:$$

$$4aF_{By} - 6aF_1 - 8aF_2 = 4aF_{By} - 6a2F - 8a5F = 4aF_{By} - 52aF = 0$$

=> $F_{By} = 13F = 65kN$

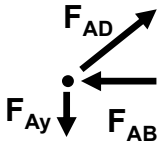
$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Ay} + F_{By} - F_1 - F_2 = F_{Ay} + F_{By} - 2F - 5F = F_{Ay} + 13F - 7F = 0$$

=> $F_{Ay} = -6F = -30kN$

Nullstäbe:
Aus den Regeln für die Nullstäbe erkennt man, dass die Stäbe AC, GH, CD und daher auch BD Nullstäbe sind.

Kräftebilanz am Knoten A:

Die Zerlegung der Kraft F_{AD} in Komponenten liefert:



$$F_{ADx} = \frac{\Delta x}{L} F_{AD} = \frac{4a}{\sqrt{(4a)^2 + (2.5a)^2}} F_{AD} = \frac{8}{\sqrt{89}} F_{AD}$$

$$F_{ADy} = \frac{\Delta y}{L} F_{AD} = \frac{2.5a}{\sqrt{(4a)^2 + (2.5a)^2}} F_{AD} = \frac{5}{\sqrt{89}} F_{AD}$$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung:

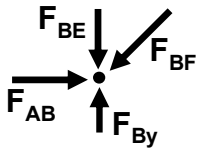
$$\sum F_y = 0: \qquad -F_{Ay} + F_{ADy} = -F_{Ay} + \frac{5}{\sqrt{89}} F_{AD} = 0$$

=> $F_{AD} = 1.2\sqrt{89}F = 56.6kN$ (Zugstab)

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{AB} + F_{ADx} = -F_{AB} + \frac{8}{\sqrt{89}} F_{AD} = F_{AB} + \frac{8}{\sqrt{89}} 1.2\sqrt{89}F = 0$$

=> $F_{AB} = 9.6F = 48kN$ (Zugstab)

Kräftebilanz am Knoten B:



Die Zerlegung der Kraft F_{BF} in Komponenten liefert:

$$F_{BFx} = \frac{\Delta x}{L} F_{BF} = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (2.5a)^2}} F_{BF} = \frac{4}{\sqrt{41}} F_{BF}$$

$$F_{BFy} = \frac{\Delta y}{L} F_{BF} = \frac{2.5a}{\sqrt{(2a)^2 + (2.5a)^2}} F_{BF} = \frac{5}{\sqrt{41}} F_{BF}$$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung:

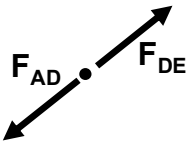
$$\sum F_x = 0: \qquad F_{AB} - F_{BFx} = 9.6F - \frac{4}{\sqrt{41}} F_{BF} = 0$$

=> $F_{BF} = 2.4\sqrt{41}F = 76.8kN$ (Druckstab)

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{By} - F_{BE} - F_{BFy} = 13F - F_{BE} - \frac{5}{\sqrt{41}} 2.4\sqrt{41}F = 0$$

=> $F_{BE} = F = 5kN$ (Druckstab)

Kräftebilanz am Knoten D:

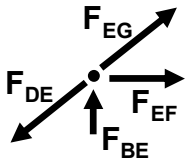


Am Punkt D treffen nur zwei tragende Stäbe, die auf einer Linie liegen, aufeinander. Die Kräftebilanz in Stabrichtung ergibt, dass mit AD auch DE ein Zugstab mit gleicher Kraft $F_{DE} = F_{AD} = 56.6$kN ist.

$$\sum F_{Stabrichtung} = 0: \qquad -F_{AD} + F_{DE} = -F_{AD} + 1.2\sqrt{89}F = 0$$

=> $F_{DE} = 1.2\sqrt{89}F = 56.6kN$ (Zugstab)

Kräftebilanz am Knoten E:



Der Stab EG zeigt in die gleiche Richtung wie DE und somit auch wie AD. Daher können die Richtungskosinus und die Komponentengewichtung vom Stab AD auf den Stab EG übertragen werden.

$$F_{EGx} = \frac{\Delta x}{L} F_{EG} = \frac{8}{\sqrt{89}} F_{EG} \quad \text{und} \quad F_{EGy} = \frac{\Delta y}{L} F_{EG} = \frac{5}{\sqrt{89}} F_{EG}$$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung:

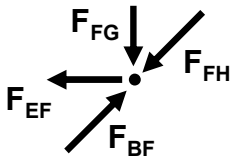
$$\sum F_y = 0: \qquad -F_{DEy} + F_{BE} + F_{EGy} = -\frac{5}{\sqrt{89}} 1.2\sqrt{89}F + F + \frac{5}{\sqrt{89}} F_{EG} = 0$$

=> $F_{EG} = \sqrt{89}F = 47.2kN$ (Zugstab)

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{DEx} + F_{EF} + F_{EGx} = -\frac{8}{\sqrt{89}} 1.2\sqrt{89}F + F_{EF} + \frac{8}{\sqrt{89}} \sqrt{89}F = 0$$

=> $F_{EF} = 1.6F = 8kN$ (Zugstab)

Kräftebilanz am Knoten F:



Der Stab FH zeigt in die gleiche Richtung wie BF. Daher können die Richtungskosinus und die Komponentengewichtung vom Stab BF auf den Stab FH übertragen werden.

$$F_{FHx} = \frac{\Delta x}{L} F_{FH} = \frac{4}{\sqrt{41}} F_{FH} \qquad \text{und} \qquad F_{FHy} = \frac{\Delta y}{L} F_{FH} = \frac{5}{\sqrt{41}} F_{FH}$$

Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung:

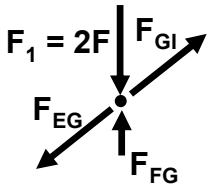
$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{EF} + F_{BFx} + F_{FHx} = -1.6F + \frac{4}{\sqrt{41}} 2.4\sqrt{41}F + \frac{4}{\sqrt{41}} F_{FH} = 0$$

=> $F_{FH} = 2\sqrt{41}F = 64.0kN$ (Druckstab)

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{BFy} - F_{FG} - F_{FHy} = \frac{5}{\sqrt{41}} 2.4\sqrt{41}F - F_{FG} - \frac{5}{\sqrt{41}} 2\sqrt{41}F = 0$$

=> $F_{EG} = 2F = 10kN$ (Druckstab)

Kräftegleichgewicht am Knoten G:



Am Knoten F ist nur eine unbekannte Kraft F_{GI}. Der Stab GI zeigt in die gleiche Richtung wie der Stab EG, also kann dessen Richtungskosinus und Komponentenzerlegung übernommen werden.

$$F_{GIx} = \frac{\Delta x}{L} F_{GI} = \frac{8}{\sqrt{89}} F_{GI} \qquad \text{und} \qquad F_{GIy} = \frac{\Delta y}{L} F_{GI} = \frac{5}{\sqrt{89}} F_{GI}$$

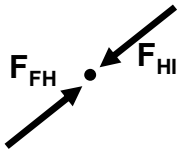
Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{EGx} + F_{GIx} = -\frac{8}{\sqrt{89}} F_{EG} + \frac{8}{\sqrt{89}} F_{GI} = 0$$

=> $F_{GI} = F_{EG} = \sqrt{89}F = 47.2kN$ (Zugstab)

Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man berücksichtigt, dass sich F_1 und F_{FG} neutralisieren. Dann müssen sich auch F_{EG} und F_{GI} neutralisieren. Das bedeutet, Sie müssen den gleichen Betrag besitzen und entgegengesetzt orientiert sein.

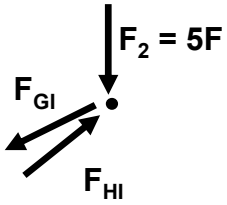
Kräftebilanz am Knoten H:



Am Knoten H sind nur zwei tragende Stäbe. Deshalb muss für die beiden Stabkräfte $F_{HI} = F_{FH}$ gelten.

$$F_{HI} = F_{FH} = 2\sqrt{41}F = 64.0kN \quad \text{(Druckstab)}$$

Kräftebilanz am Knoten I:



Es sind alle Stabkräfte berechnet. Zur Kontrolle muss auch das Kräftegleichgewicht am Knoten I erfüllt sein.

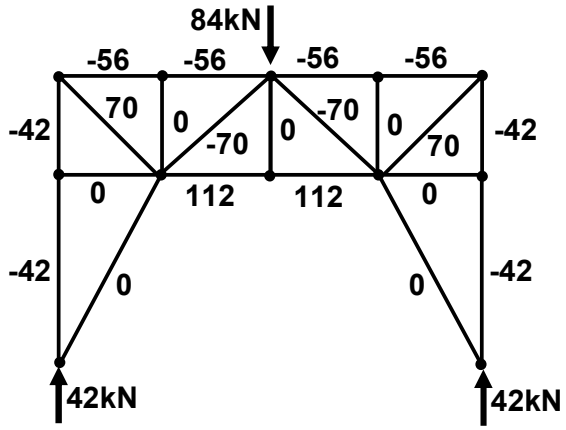
$$\sum F_x = 0: \qquad -F_{GIx} + F_{HIx} = -\frac{8}{\sqrt{89}}F_{GI} + \frac{4}{\sqrt{41}}F_{HI}$$

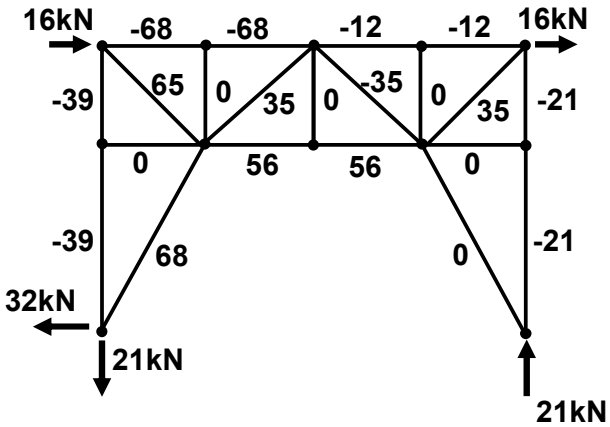
$$= -\frac{8}{\sqrt{89}}\sqrt{89}F + \frac{4}{\sqrt{41}}2\sqrt{41}F = 0$$

$$\sum F_x = 0: -F_{GIy} + F_{HIy} - F_2 = \frac{5}{\sqrt{89}}F_{GI} + \frac{5}{\sqrt{41}}F_{HI} - F_2 = -\frac{5}{\sqrt{89}}\sqrt{89}F + \frac{5}{\sqrt{41}}2\sqrt{41}F - 5F = 0$$

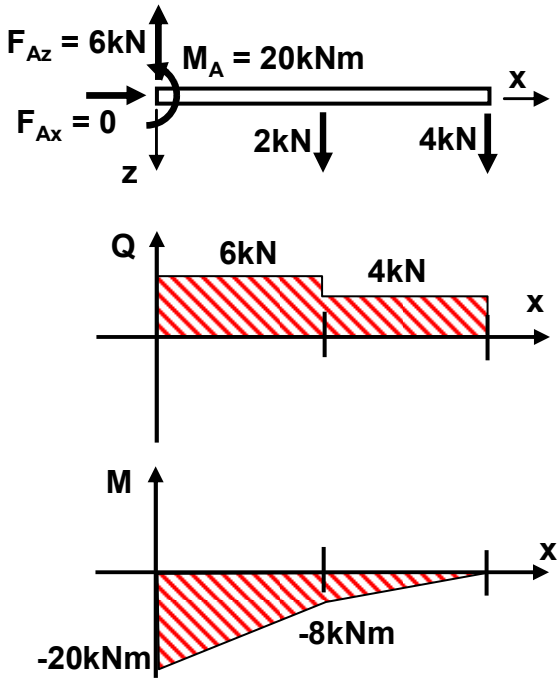
<u>Lösungen Aufgabe 18:</u>

<u>Geometrie 1, Lastfall 1 und 2</u>:





Lösungen Aufgabe 19:



Geometrie 1:

An der Stelle x = 0 erfährt die Querkraft Q infolge der negativen Kraft F_{Az} = 6kN einen positiven Sprung um den Betrag der Kraft 6kN. Das Moment M springt infolge des positiven Momentes M_A = 20kNm negativ nach unten.

=> $Q(x=0)=6$, $M(x=0)=-20$

Intervall 1 (0 <= x < 2):

$Q(x)=6$

$M(x)=6x-20$

Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx}=Q(x)$$

=> $M(x)=6x+c_1$

Die Integrationskonstante c_1 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=0)=-20$ => $c_1=-20$

An der Stelle x = 2 erfährt die Querkraft Q infolge der positiven Kraft 2kN einen negativen Sprung um den Betrag 2kN. Es wirkt kein äußeres Moment, also hat das innere Moment M_A keine Sprungstelle.

=> $Q(x=2)=4$, $M(x=2)=-8$

Intervall 2 (2 <= x < 4):

$Q(x)=4$

$M(x)=4x-16$

Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx}=Q(x) \quad => \quad M(x)=4x+c_2$$

Die Integrationskonstante c_2 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=2)=-8$ => $c_2=-16$

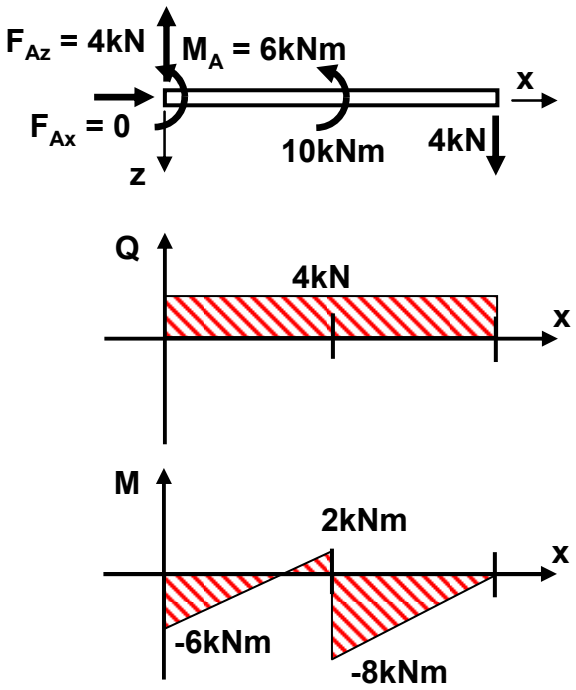
An der Stelle x = 4 springt die Querkraft Q infolge der positiven Kraft 4kN negativ um den Betrag 4kN. Es wirkt kein äußeres Moment, also hat das innere Moment M_A keine Sprungstelle.

=> $Q(x=4)=0$, $M(x=4)=0$

Geometrie 2:

Intervall 1 (0 <= x < 2):
$Q(x) = 4$
$M(x) = 4x - 6$

Intervall 2 (2 <= x < 4):
$Q(x) = 4$
$M(x) = 4x - 16$

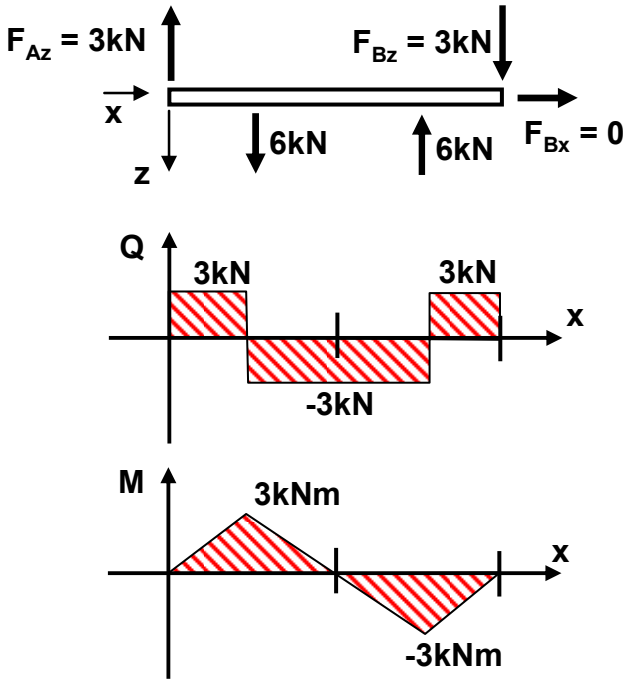


Geometrie 3:

Intervall 1 (0 <= x < 1):
$Q(x) = 3$
$M(x) = 3x$

Intervall 2 (1 <= x < 3):
$Q(x) = -3$
$M(x) = -3x + 6$

Intervall 3 (3 <= x < 4):
$Q(x) = 3$
$M(x) = 3x - 12$



Geometrie 4:

Intervall 1 (0 <= x < 1):
$Q(x) = 4$
$M(x) = 4x$

Intervall 2 (1 <= x < 3):
$q(x) = 4$
$Q(x) = -4x + 8$
$M(x) = -2x^2 + 8x - 2$

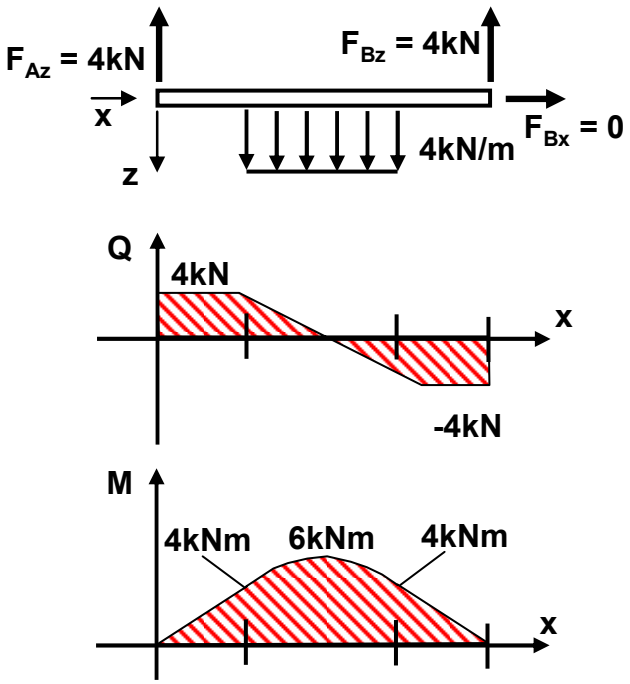
Die Querkraft erhält man durch Aufleiten der Streckenlast:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

=> $Q(x) = -4x + c_1$

Die Integrationskonstante c_1 ergibt sich aus der Randbedingung:

$Q(x=1) = 4$ => $c_1 = 8$



Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \Rightarrow$$

$$M(x) = -2x^2 + 8x + c_2$$

Die Integrationskonstante c_2 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=1) = 4$ => $c_2 = -2$

An der x-Position, an der die Querkraft gleich null ist, hat das Moment einen Extremwert.

$Q(x) = 0$ => $x = 2$ =>

$M(x=2) = 6$

Intervall 3 (3 <= x < 4):

$Q(x) = -4$

$M(x) = -4x + 16$

<u>Geometrie 5</u>:

Intervall 1 (0 <= x < 1):

$N(x) = -10$

$Q(x) = 0$

$M(x) = 0$

Intervall 2 (1 <= x < 2):

$N(x) = -10$

$Q(x) = 12$

$M(x) = 12x - 12$

Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \Rightarrow \quad M(x) = 12x + c_1$$

Die Integrationskonstante c_1 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=1) = 0$ => $c_1 = -12$

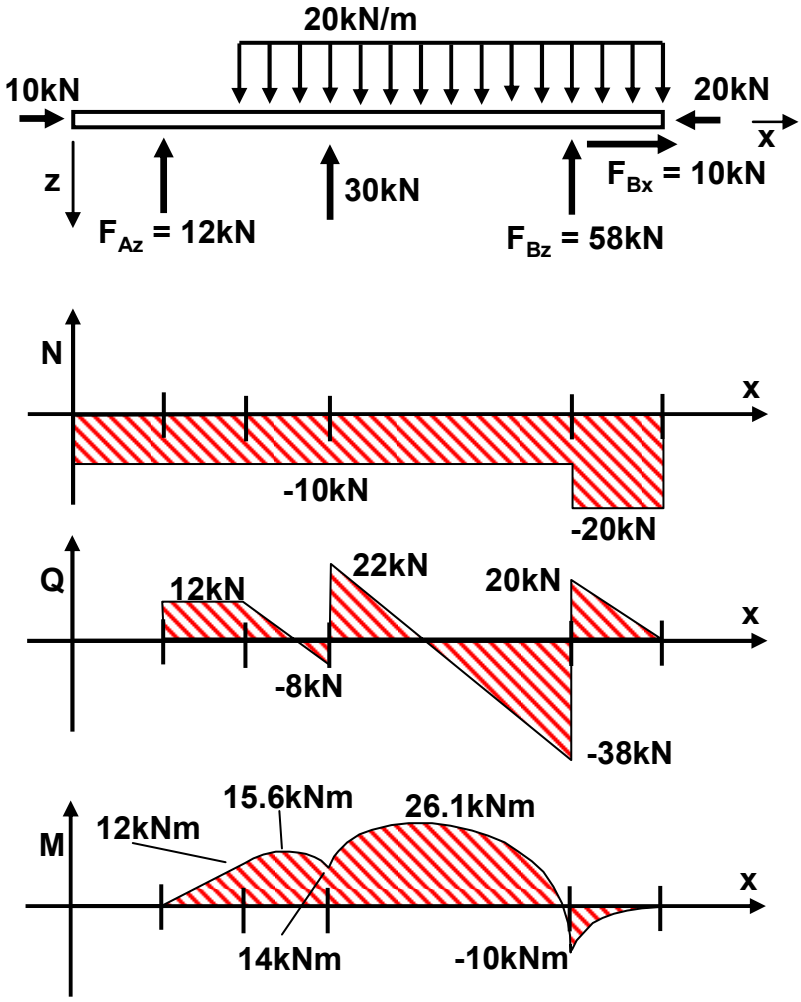
Intervall 3 (2 <= x < 3):

$N(x) = -10$

$q(x) = 20$

$Q(x) = -20x + 52$

$M(x) = -10x^2 + 52x - 52$



Die Querkraft erhält man durch Aufleiten der Streckenlast:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

=> $Q(x) = -20x + c_2$

Die Integrationskonstante c_2 ergibt sich aus der Randbedingung:

$Q(x=2) = 12$

=> $c_2 = 52$

Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

=> $M(x) = -10x^2 + 52x + c_3$

Die Integrationskonstante c_3 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=2) = 12$

=> $c_3 = -52$

An der x-Position, an der die Querkraft gleich null ist, hat das Moment einen Extremwert.

$Q(x) = 0$ => $x = 2.6$ => $M(x=2.6) = 15.6$

Intervall 4 (3 <= x < 6):

$N(x) = -10$

$q(x) = 20$

$Q(x) = -20x + 82$

$M(x) = -10x^2 + 82x - 142$

Die Querkraft erhält man durch Aufleiten der Streckenlast:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad => \quad Q(x) = -20x + c_4$$

Die Integrationskonstante c_4 ergibt sich aus der Randbedingung:

$Q(x=3) = 22$ => $c_4 = 82$

Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad => \quad M(x) = -10x^2 + 82x + c_5$$

Die Integrationskonstante c_5 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=3)=14$ => $c_5=-142$

An der x-Position, an der die Querkraft gleich null ist, hat das Moment einen Extremwert.

$Q(x)=0$ => $x=4.1$ => $M(x=4.1)=26.1$

Intervall 5 (6 <= x < 7):

$N(x)=-20$

$q(x)=20$

$Q(x)=-20x+140$

$M(x)=-10x^2+140x-490$

Die Querkraft erhält man durch Aufleiten der Streckenlast:

$\frac{dQ(x)}{dx}=-q(x)$ => $Q(x)=-20x+c_6$

Die Integrationskonstante c_6 ergibt sich aus der Randbedingung:

$Q(x=6)=20$ => $c_6=140$

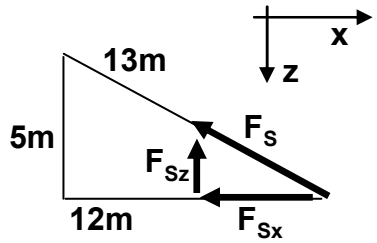
Das Moment M erhält man durch Aufleiten der Querkraft:

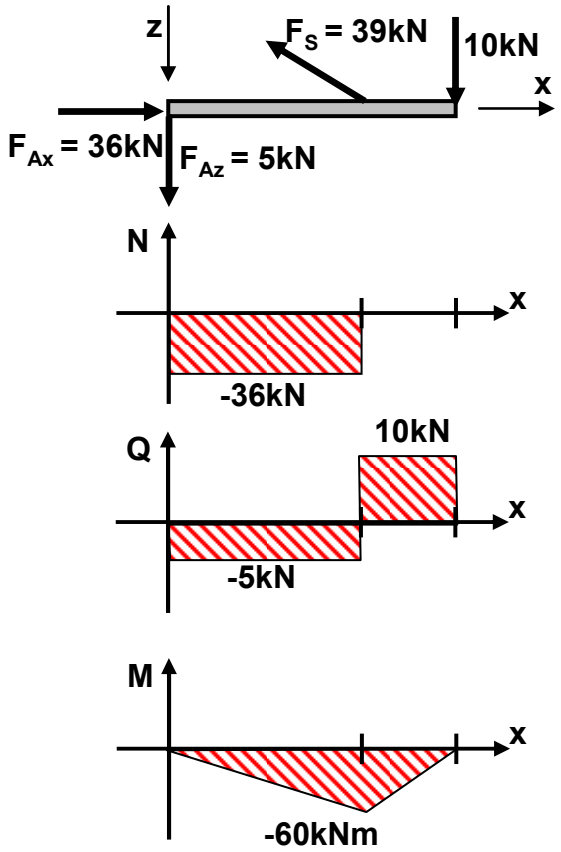
$\frac{dM(x)}{dx}=Q(x)$ => $M(x)=-10x^2+140x+c_7$

Die Integrationskonstante c_7 ergibt sich aus der Randbedingung:

$M(x=6)=-10$ => $c_7=-490$

<u>Lösungen Aufgabe 20:</u>





Mit Hilfe des geometrischen Dreiecks und des Kräftedreiecks ermittelt man die Komponenten der Seilkraft F_S.

$F_{Sx}=\frac{12}{13}F_S$ und $F_{Sz}=\frac{5}{13}F_S$

<u>Geometrie 1</u>:

Lagerkräfte und Seilkraft:

$\sum F_x=0: \quad F_{Ax}-F_{Sx}=0$

$\sum F_z=0: \quad F_{Az}-F_{Sz}=0$

$\sum M|_A=0: \quad 12F_{Sz}-18\cdot 10=0$

=> $F_S=39kN$, $F_{Sx}=36kN$, $F_{Sz}=15kN$

$F_{Ax}=36kN$ und $F_{Az}=5kN$

Geometrie 2:

Lagerkräfte und Seilkraft:

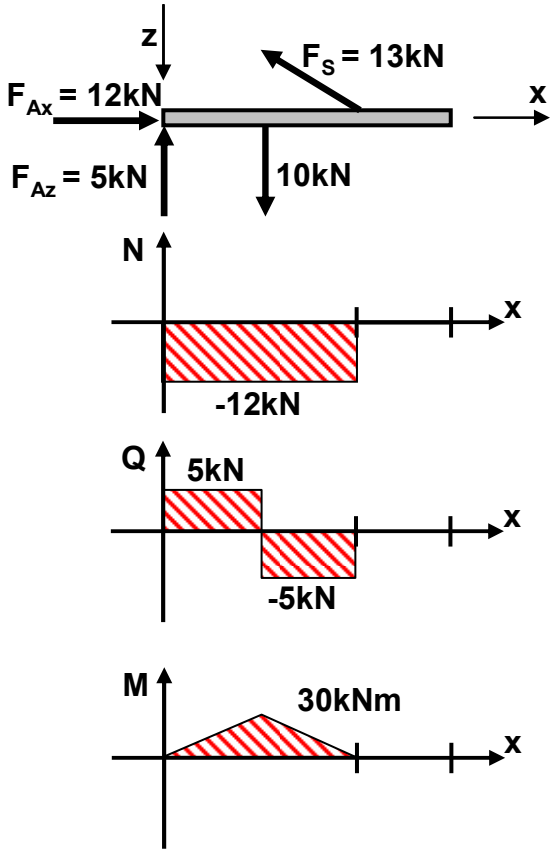
$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Sx} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} - F_{Sz} = 0$

$\sum M\big|_A = 0: \quad 12F_{Sz} - 6 \cdot 10 = 0$

=> $F_S = 13kN$, $F_{Sx} = 12kN$, $F_{Sz} = 5kN$

$F_{Ax} = 12kN$ und $F_{Az} = 5kN$



Geometrie 3:

Ersatzkraft bei x = 9m:

$F_{Ersatz} = \frac{10}{27} 18 = 6\frac{2}{3} kN$

Lagerkräfte und Seilkraft:

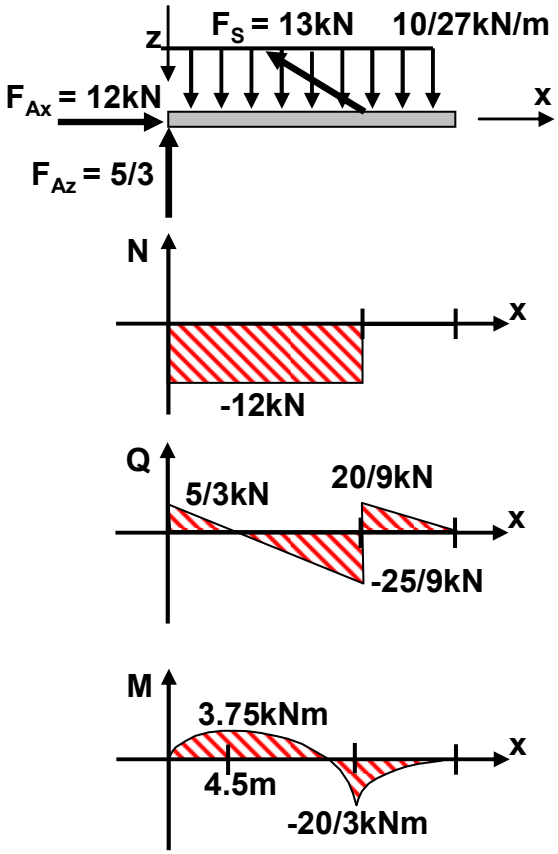
$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Sx} = 0$

$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} - F_{Sz} = 0$

$\sum M\big|_A = 0: \quad 12F_{Sz} - 9F_{Ersatz} = 0$

=> $F_S = 13kN$, $F_{Sx} = 12kN$, $F_{Sz} = 5kN$

$F_{Ax} = 12kN$ und $F_{Az} = \frac{5}{3} kN$



Intervall 1 (0 <= x < 12):

$q(x) = \frac{10}{27}, \quad Q(x) = -\frac{10}{27}x + \frac{5}{3}$

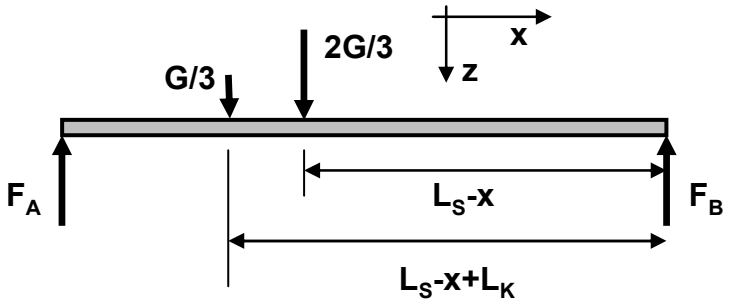
und $\quad M(x) = -\frac{5}{27}x^2 + \frac{5}{3}x$

Intervall 2 (12 <= x < 18):

$q(x) = \frac{10}{27}, \quad Q(x) = -\frac{10}{27}x + \frac{20}{3}$

und $\quad M(x) = -\frac{5}{27}x^2 + \frac{20}{3}x - 60$

Lösungen Aufgabe 21:



Zuerst wird die senkrechte Lagerkraft F_A im linken Lager A in Abhängigkeit von der Kranposition x berechnet. Dazu wertet man das Momentengleichgewicht um das rechte Lager B aus.

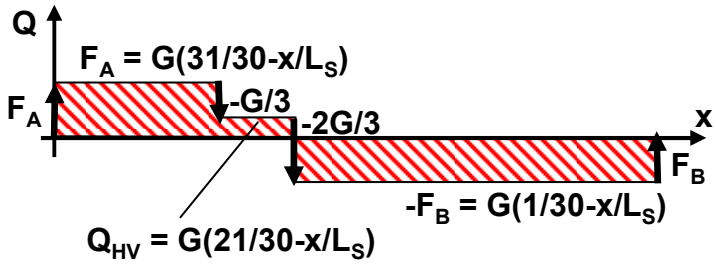
$$\sum M\big|_A = 0: \quad -F_A L_S + \frac{G}{3}(L_S - x + L_K) + \frac{2G}{3}(L_S - x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_A = \frac{1}{L_S}\left[\frac{G}{3}(L_S - x + L_K) + \frac{2G}{3}(L_S - x)\right] = \frac{1}{3L_S}(GL_S - Gx + GL_K + 2GL_S - 2Gx)$$

mit $L_K = L_S/10$ folgt:

$$F_A = \frac{1}{3L_S}(3GL_S + GL_K - 3Gx) = G + \frac{GL_K}{3L_S} - G\frac{x}{L_S} = G + \frac{G\frac{L_S}{10}}{3L_S} - G\frac{x}{L_S} = G\left(\frac{31}{30} - \frac{x}{L_S}\right)$$

Dies ergibt den dargestellten Querkraftverlauf. Je nach Position x des Krans ist die Querkraft Q_{HV} zwischen Hinterachse und Vorderachse positiv oder negativ.



$$\frac{x}{L_S} < \frac{21}{30} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{HV} > 0$$

$$\frac{x}{L_S} > \frac{21}{30} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{HV} < 0$$

Ist die Querkraft Q_{HV} zwischen den beiden Achsen positiv, steigt das Moment vom Lager A bis zur Vorderachse, an welcher das maximale Moment erreicht wird. Ist die Querkraft Q_{HV} zwischen den beiden Achsen negativ, steigt das Moment vom Lager A bis zur Hinterachse an, wo der Maximalwert erreicht wird.

$Q_{HV} > 0$:

Maximales Moment M_V an der Vorderachse in Abhängigkeit von x:

$$M_V = F_A(x - L_K) + \left(F_A - \frac{G}{3}\right)L_K = F_A x - \frac{G}{3}L_K = G\left(\frac{31}{30} - \frac{x}{L_S}\right)x - \frac{G}{3}\frac{L_S}{10} = G\left(\frac{31}{30}x - \frac{x^2}{L_S} - \frac{L_S}{30}\right)$$

Um die Position x_{Vmax} zu bestimmen, an der M_{Vmax} maximal wird, leitet man dieses nach x ab und setzt die Ableitung gleich null.

$$\frac{dM_V}{dx} = G\left(\frac{31}{30} - 2\frac{x}{L_S}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{V\max} = \frac{31}{60}L_S$$

Die Lösung erfüllt auch die obige, notwendige Bedingung:

$$x_{V\max} < \frac{21}{30} L_S$$

Der Maximalwert lautet:

$$M_{V\max} = G\left(\frac{31}{30} x_{V\max} - \frac{x_{V\max}^2}{L_S} - \frac{L_S}{30}\right) = G\left(\frac{31}{30}\frac{31}{60} L_S - \frac{\left(\frac{31}{60} L_S\right)^2}{L_S} - \frac{L_S}{30}\right) = \frac{841}{3600} L_S G$$

$Q_{HV} < 0$:

Maximales Moment M_H an der Hinterachse in Abhängigkeit von x:

$$M_V = F_A(x - L_K) = G\left(\frac{31}{30} - \frac{x}{L_S}\right)\left(x - \frac{L_S}{10}\right) = G\left(\frac{34}{30} x - \frac{x^2}{L_S} - \frac{31}{300} L_S\right)$$

Um die Position x_{Hmax} zu bestimmen, an der M_{Hmax} maximal wird, leitet man dieses nach x ab und setzt die Ableitung gleich null.

$$\frac{dM_H}{dx} = G\left(\frac{34}{30} - 2\frac{x}{L_S}\right) = 0 \quad => \quad x_{H\max} = \frac{34}{60} L_S$$

Die Lösung erfüllt die obige, notwendige Bedingung

$$x > \frac{21}{30} L_S$$

nicht. Da diese Bedingung aber erfüllt werden muss, muss

$$x_{H\max} = \frac{21}{30} L_S$$

sein. Dann ist die Querkraft Q_{HV} gleich null und das Moment an Hinterachse und Vorderachse gleich.

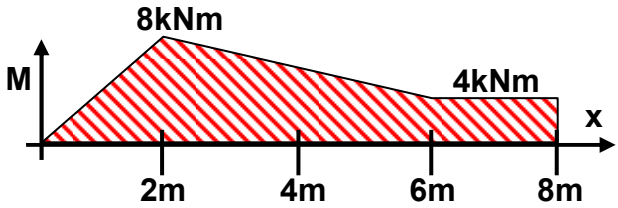
Der Maximalwert lautet:

$$M_{H\max} = G\left(\frac{34}{30} x_{H\max} - \frac{x_{H\max}^2}{L_S} - \frac{31}{300} L_S\right) = G\left(\frac{34}{30}\frac{21}{30} L_S - \frac{\left(\frac{21}{30} L_S\right)^2}{L_S} - \frac{31}{300} L_S\right) = \frac{720}{3600} L_S G$$

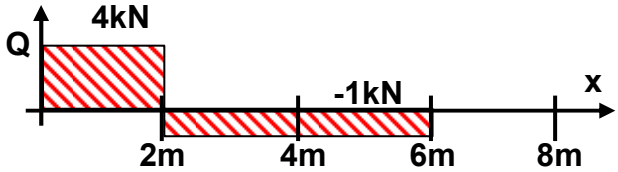
Damit erhält man die maximale Belastung des Balkens:

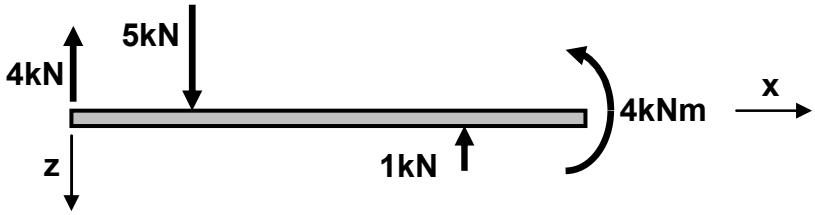
$x = \frac{31}{60} L_S$ (Position der Vorderachse) => $M_{\max} = \frac{841}{3600} L_S G$ (unterhalb der Vorderachse)

Lösungen Aufgabe 22:



Im Intervall 1 (0 <= x < 2m) steigt das Moment auf der Länge 2m um 8kNm an. Daher muss die Steigung des Momentes und somit die Querkraft 4kN sein. Da bedeutet, dass am linken Ende des Balkens eine Kraft von 4kN in negative z-Richtung zeigen muss.





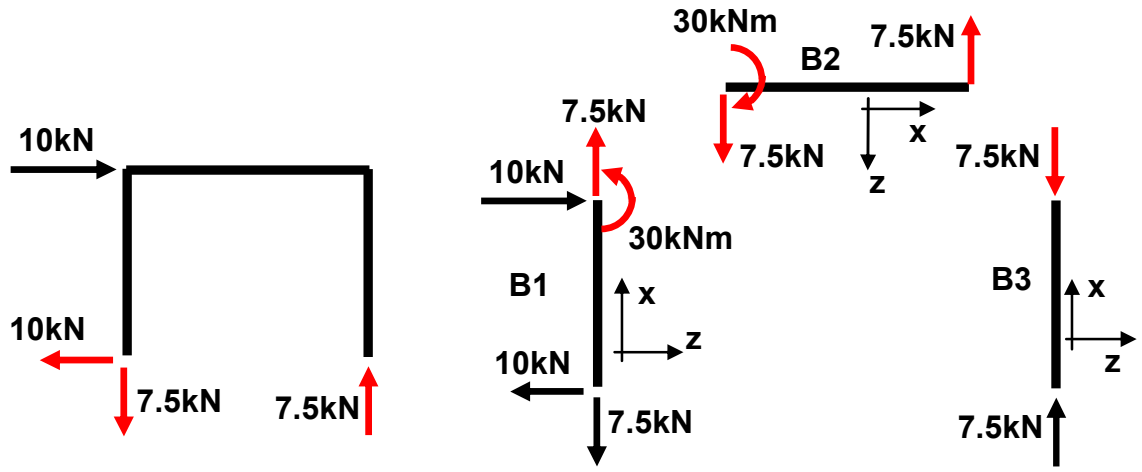
Im Intervall 2 (2m <= x < 6m) fällt das Moment auf der Länge 4m um 4kNm an. Daher muss die Steigung des Momentes und auch die Querkraft -1kN sein.
Deshalb muss an der Position x = 2m eine Kraft von 5kN in positiver z-Richtung wirksam sein, die die Querkraft von 4kN auf -1kN reduziert.

Im Intervall 3 (6m <= x < 8m) ist das Moment konstant und somit die Querkraft gleich null. Deshalb muss an der Position x = 6m eine Kraft von 1kN in negativer z-Richtung wirksam sein, die die Querkraft -1kN auf null erhöht. Am rechten Ende des Balkens hat der Verlauf der Momente eine Sprungstelle. Das Moment wird um 4kNm reduziert, also muss an dieser Stelle ein positives Moment 4kNm wirksam sein.

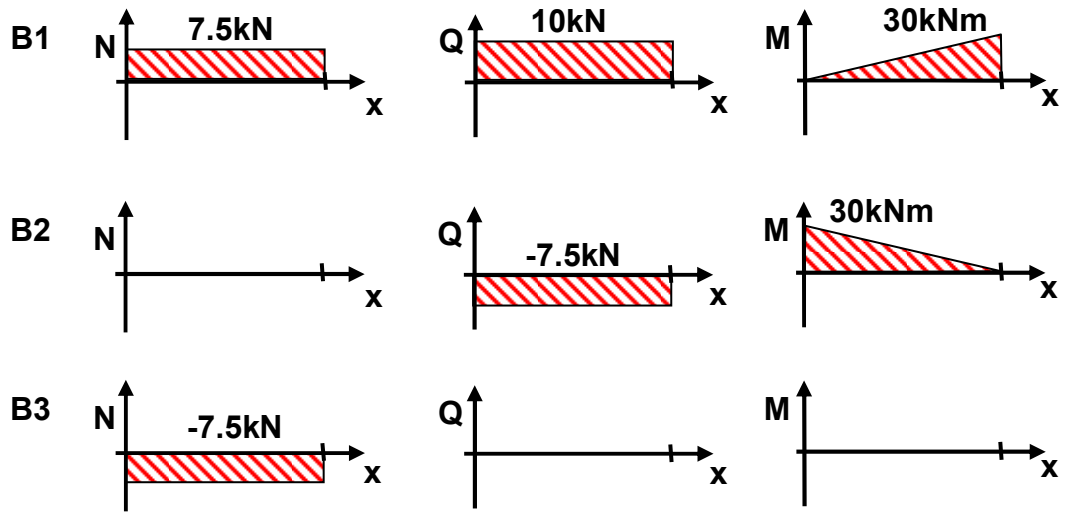
Lösungen Aufgabe 23:

Geometrie 1:

Lagerkräfte und Schnittgrößen:

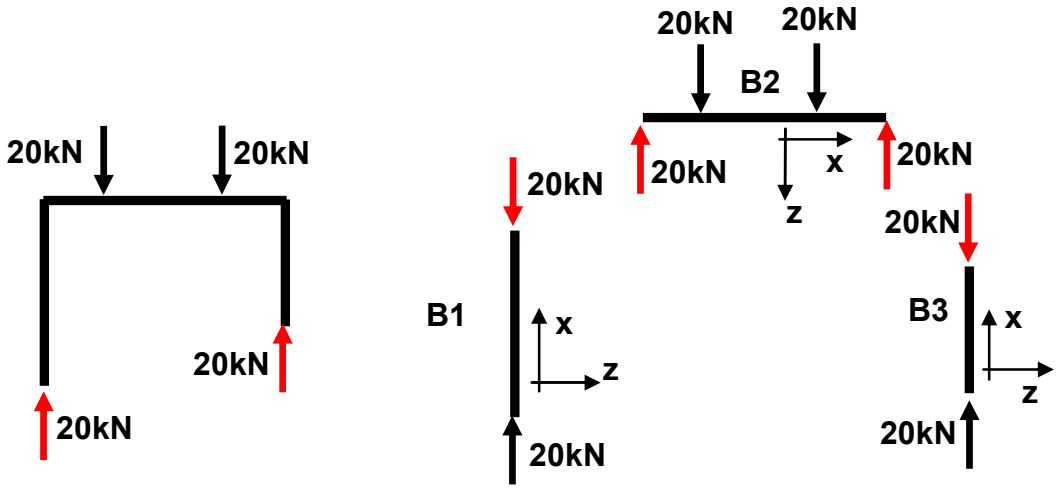


Innere Kräfte und innere Momente:

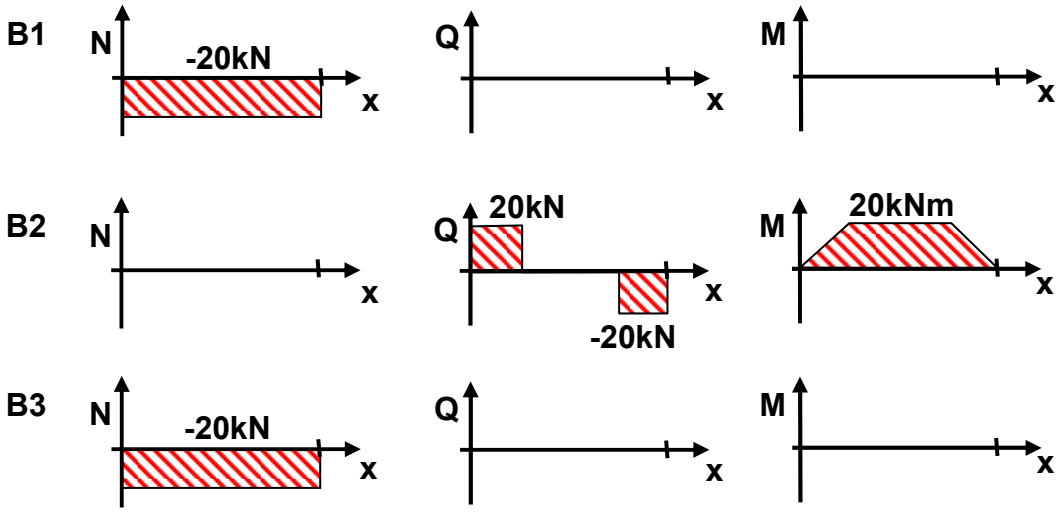


Geometrie 2:

Lagerkräfte und Schnittgrößen:

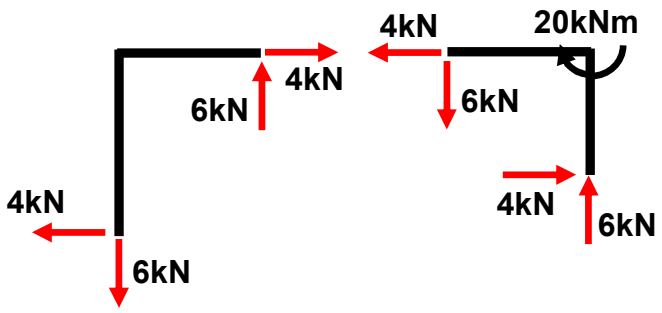


Innere Kräfte und innere Momente:

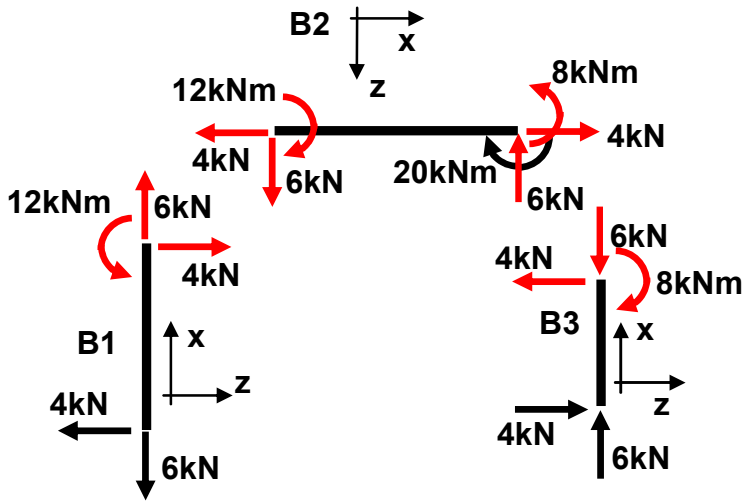


Geometrie 3:

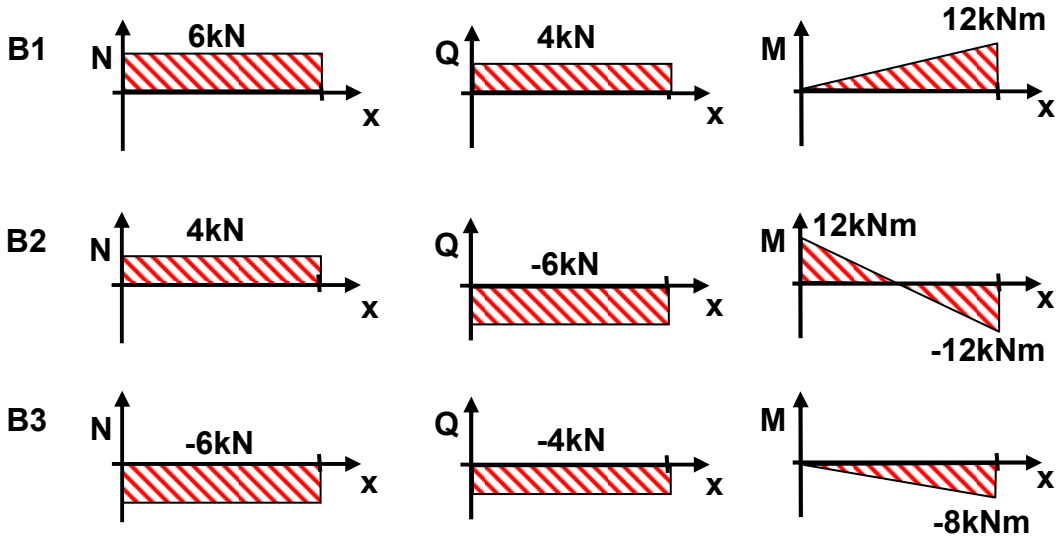
Lagerkräfte und Gelenkkräfte:



Schnittgrößen:

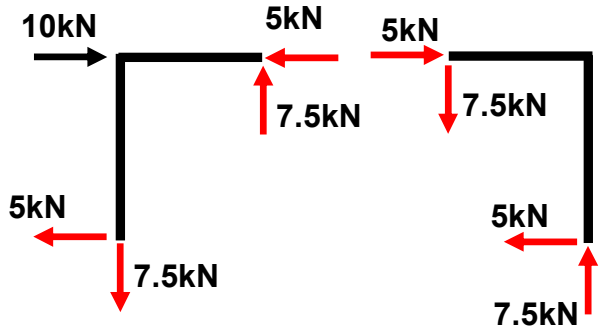


Innere Kräfte und innere Momente:

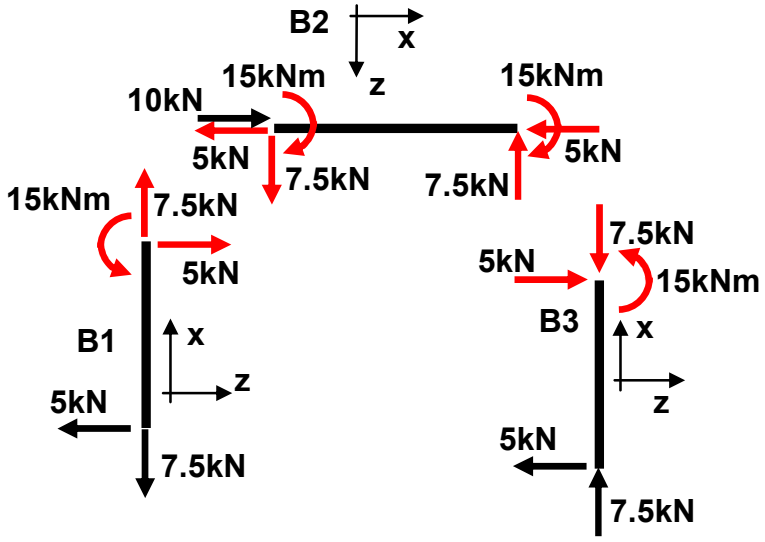


Geometrie 4:

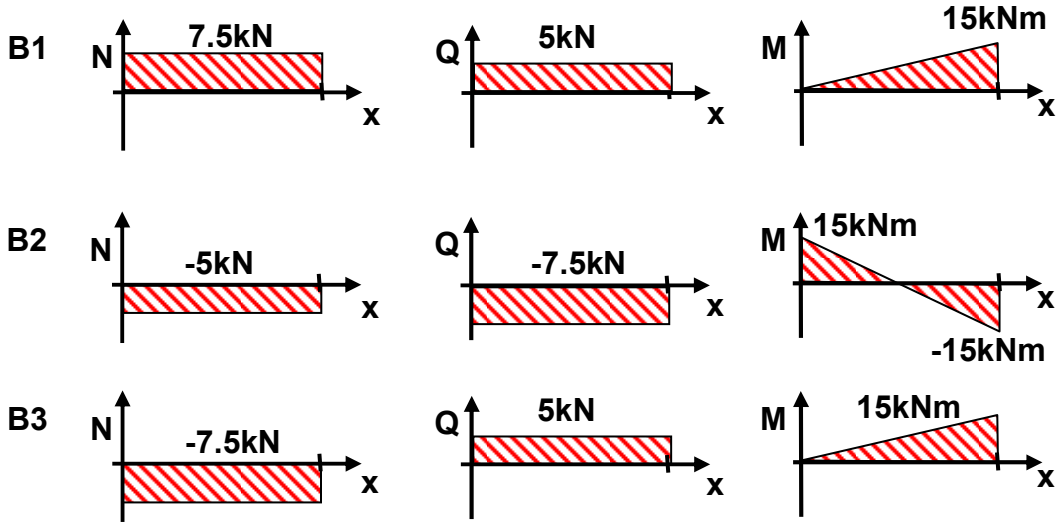
Lagerkräfte und Gelenkkräfte:



Schnittgrößen:

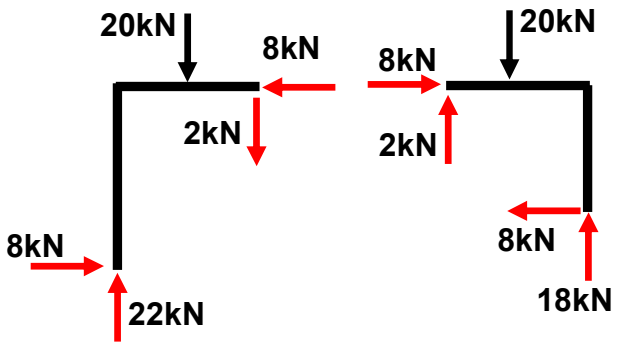


Innere Kräfte und innere Momente:

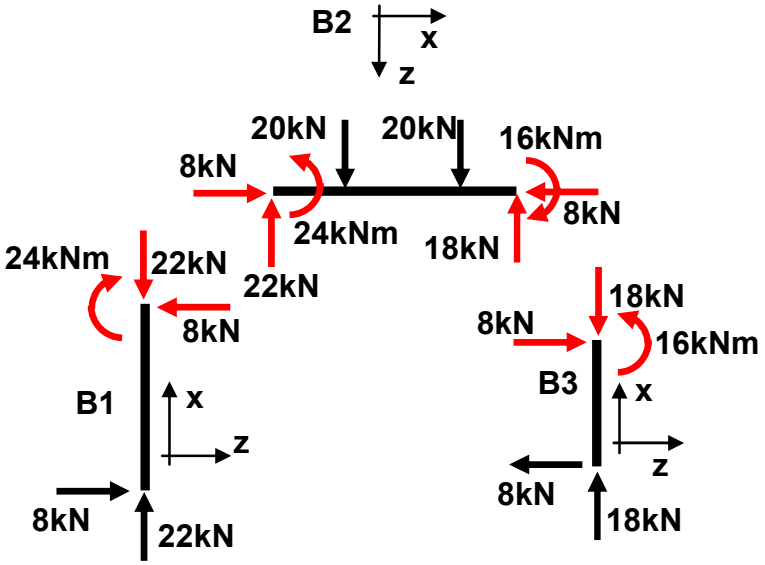


Geometrie 5:

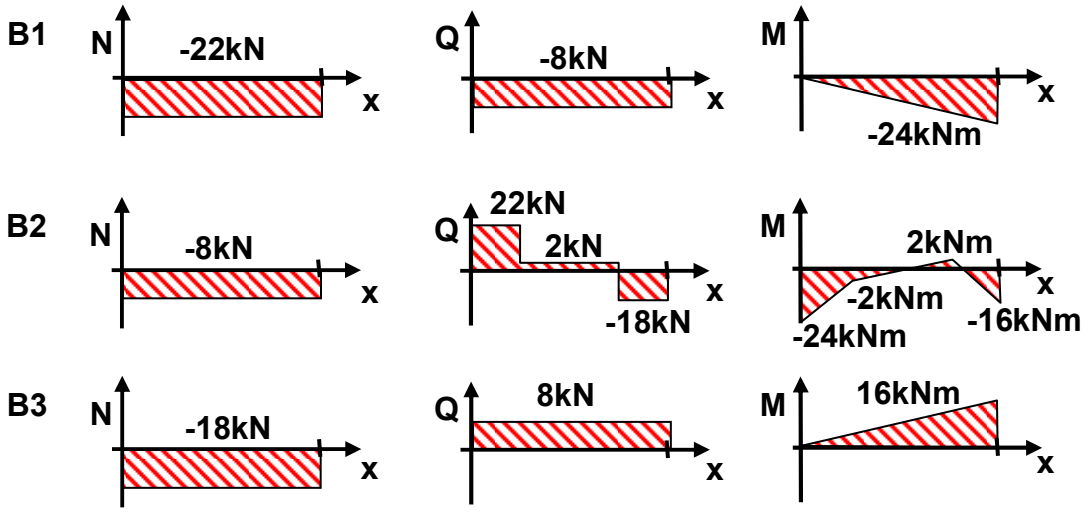
Lagerkräfte und Gelenkkräfte:



Schnittgrößen

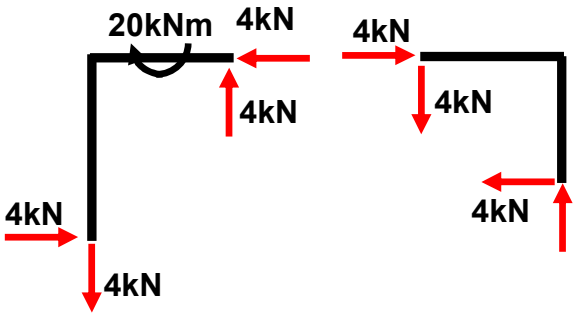


Innere Kräfte und innere Momente:

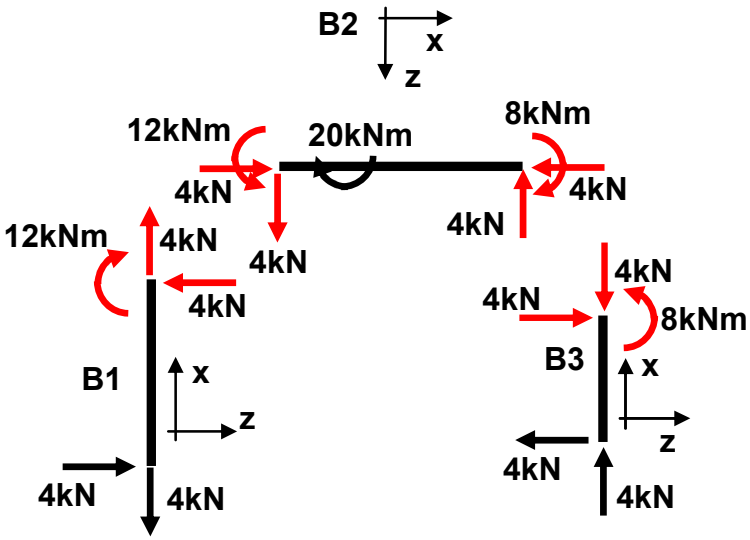


Geometrie 6:

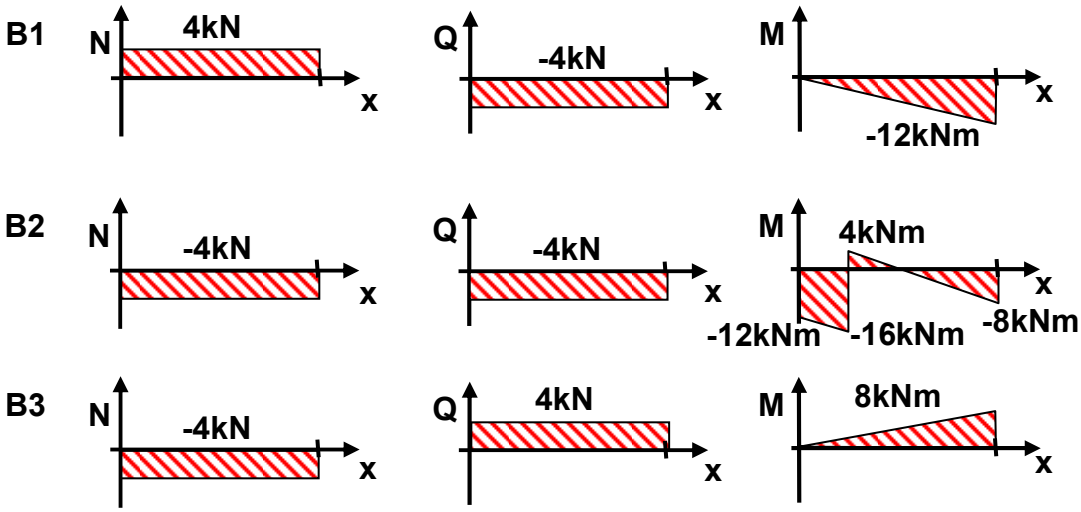
Lagerkräfte und Gelenkkräfte:



Schnittgrößen



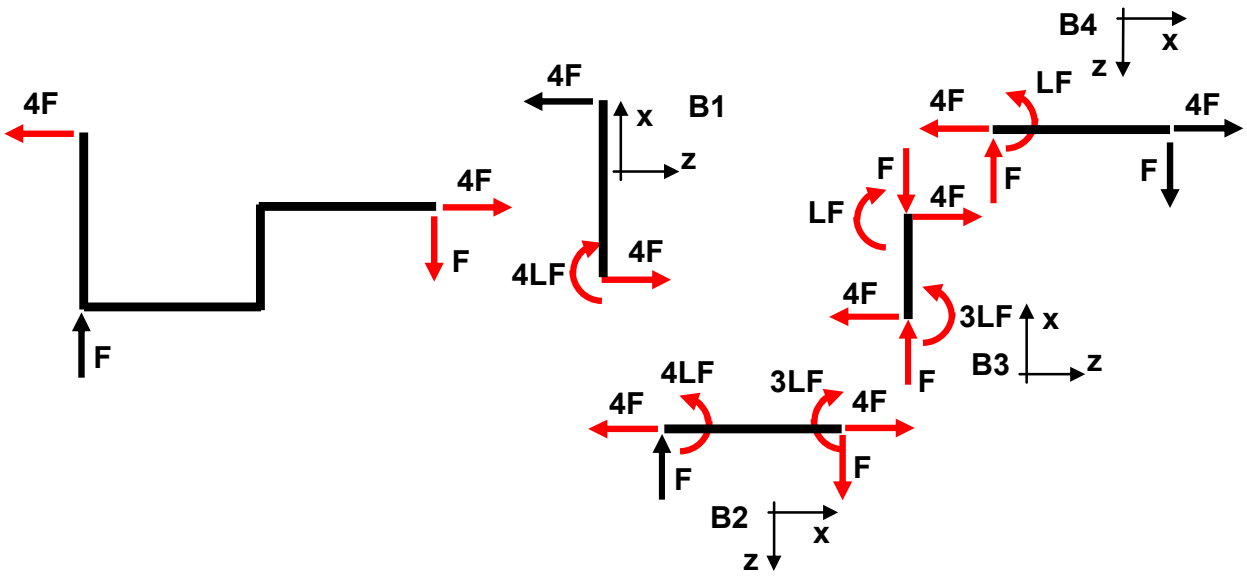
Innere Kräfte und innere Momente:



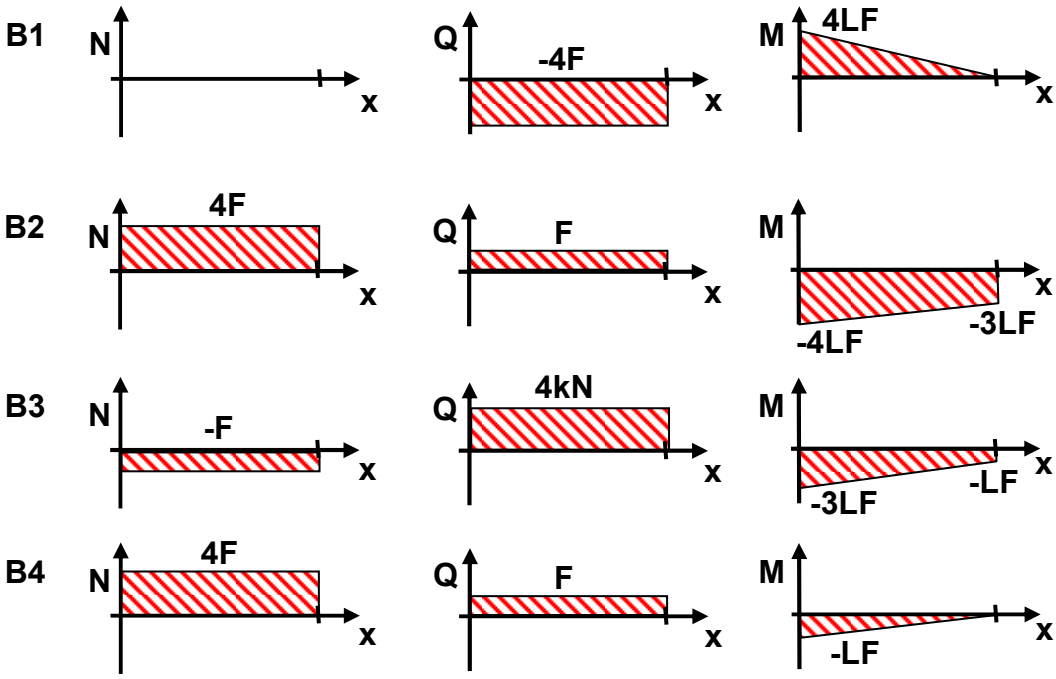
Lösungen Aufgabe 24:

Geometrie 1:

Lagerkräfte und Schnittgrößen:

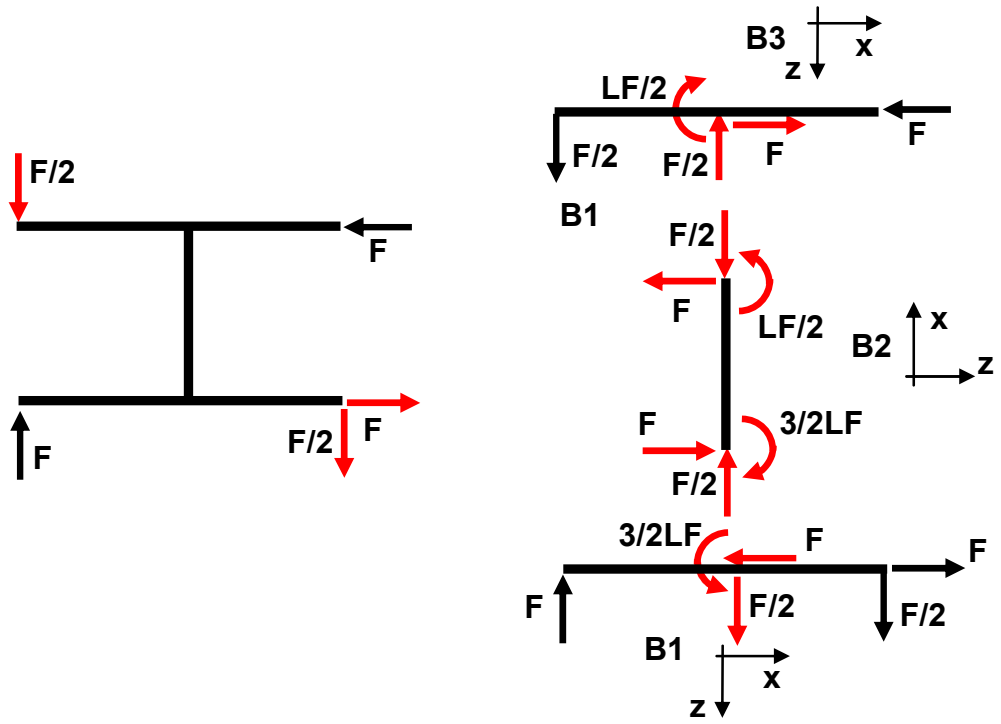


Innere Kräfte und innere Momente:

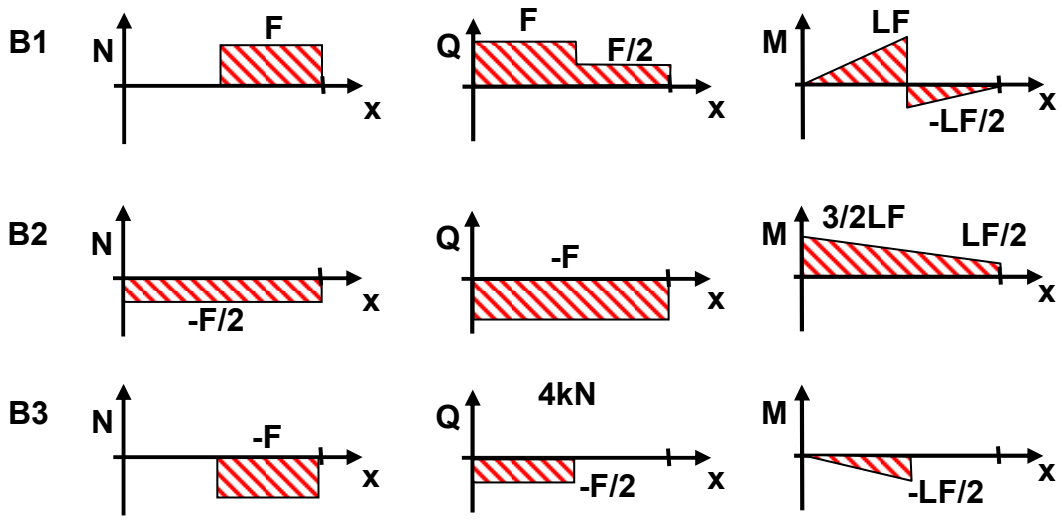


Geometrie 2:

Lagerkräfte und Schnittgrößen:



Innere Kräfte und innere Momente:



Lösungen Aufgabe 25:

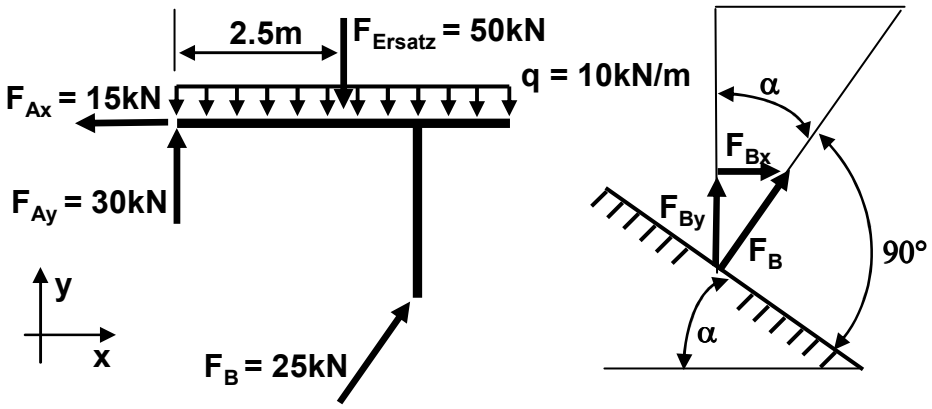
Geometrie 1:

Zur Berechnung der Lagerkräfte wird die resultierende Kraft der Flächenlast mit dem Betrag $F_{Ersatz} = 50kN$ verwendet. Sie greift mit einem Abstand von 2.5m vom Lager A an. Die Schiefe Ebene kann nur eine Kraft F_B ausüben, die senkrecht auf der Ebene steht. Aus den geometrischen Angaben

$\tan\alpha = 0.75$ => $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$

können die Komponenten F_{Bx} und F_{By} der Kraft F_B angegeben werden.

$F_{Bx} = \sin\alpha F_B = 0.6F_B$ und $F_{By} = \cos\alpha F_B = 0.8F_B$



Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtbauteil ergeben:

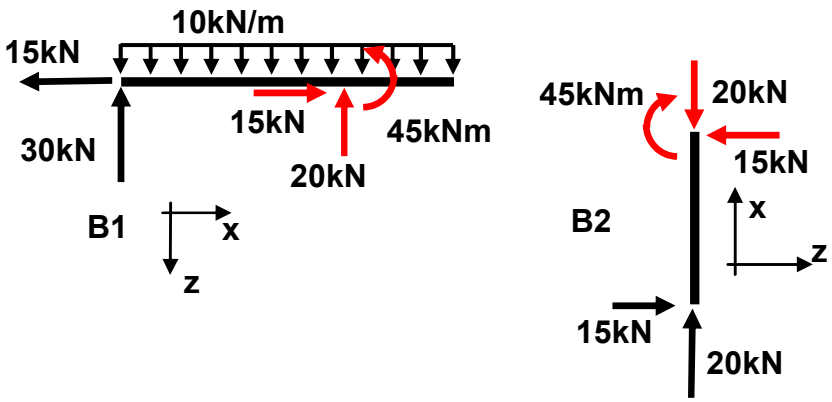
$\sum M|_A = 0: \quad 3F_{Bx} + 4F_{By} - 2.5F_{Ersatz} = 3\cdot 0.6F_B + 4\cdot 0.8F_B - 2.5\cdot 50 = 5F_B - 125 = 0$

=> $F_B = 25kN$ => $F_{Bx} = 15kN$ und $F_{By} = 20kN$

$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F_{Bx} = 0$ => $F_{Ax} = 15kN$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{By} - F_{Ersatz} = 0$ => $F_{Ay} = 30kN$

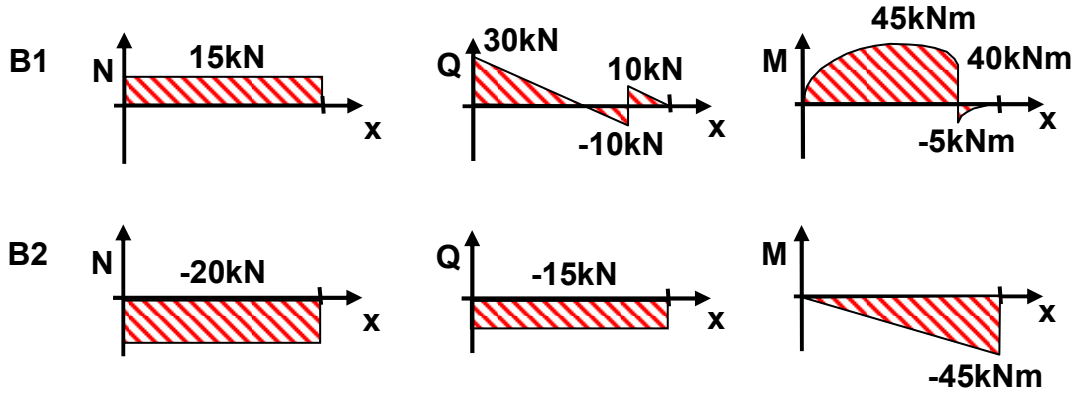
Schnittgrößen:



Innere Kräfte und innere Momente:

Balken B1, Intervall 2 (0 <= x < 4):
$q(x) = 10$
$Q(x) = -10x + 30$
$M(x) = -5x^2 + 30x$
An der x-Position, an der die Querkraft null ist, hat das Moment ein Maximum.
$Q(x) = 0$ => $x = 3$ => $M(x = 3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 45$

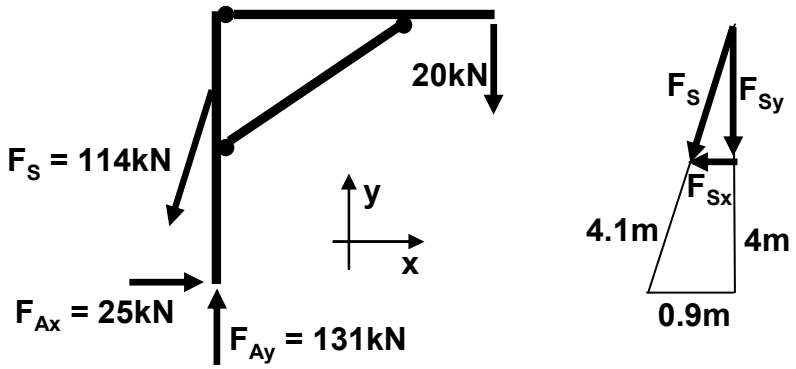
Balken B1, Intervall 2 (4 <= x < 5):
$q(x) = 10$
$Q(x) = -10x + 50$
$M(x) = -5x^2 + 50x - 125$



<u>Geometrie 2</u>:

Die Seilkraft F_S muss in Komponenten zerlegt werden. Mit dem geometrischen Dreieck und dem Kräftedreieck folgt:

$$F_{Sx} = \frac{0.9}{4.1} F_S = \frac{9}{41} F_S \quad \text{und} \quad F_{Sy} = \frac{4.0}{4.1} F_S = \frac{40}{41} F_S$$



Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtbauteil ergeben:

$$\sum M\big|_A = 0: \quad 4F_{Sx} - 5 \cdot 20 = 4\frac{9}{41} F_S - 5 \cdot 20 = 0$$

=> $F_S = 114kN$ (gerundet) => $F_{Sx} = 25kN$ und $F_{Sy} = 111kN$ (gerundet)

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Sx} = 0 \quad => \quad F_{Ax} = 25kN$$
$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{Sy} - 20 = 0 \quad => \quad F_{Ay} = 131kN$$

Bei der Bestimmung der Schnittkräfte, ist es günstig, mit der Berechnung Kraft F_{Cy} zu beginnen.

$$\sum M\big|_D = 0: \quad 4F_{Cy} - 5 \cdot 20 = 0 \quad => \quad F_{Cy} = 25kN$$

Ist die Kraft F_{Cy} bekannt, kann die Kraft F_{Cx} berechnet werden. Dies erfolgt entweder über das Momentengleichgewicht des Stabes B3 um E

$$\sum M\big|_E = 0: \quad 3F_{Cx} - 4F_{Cy} = 0 \quad => \quad F_{Cx} = 33\frac{1}{3}kN$$

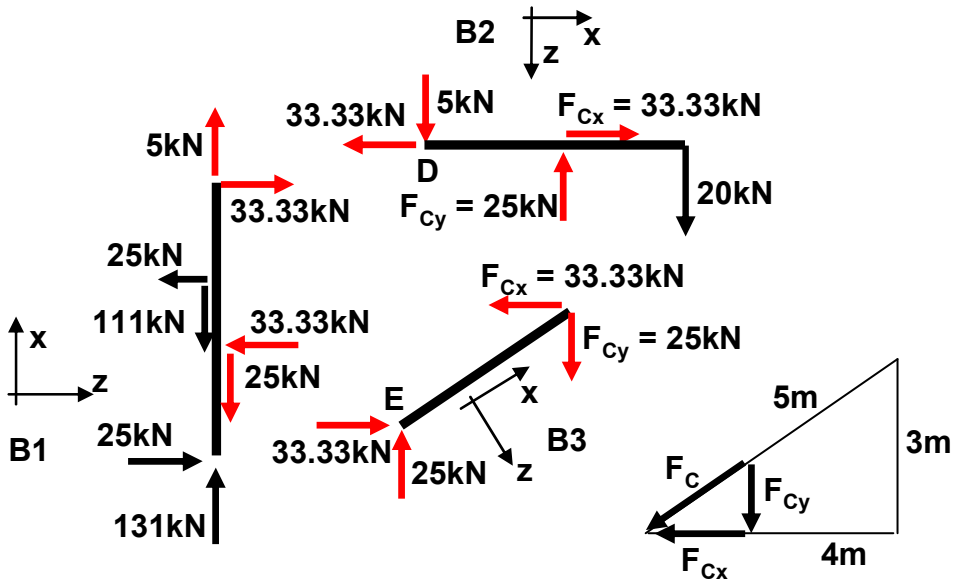
oder man nützt die Lagerung des Stabes B3 aus. Der Stab B3 ist an beiden Enden gelenkig gelagert, im Zwischenbereich sind keine weiteren Kräfte wirksam. Dadurch kann der Stab B3 nur Kräfte in Stabrichtung übertragen. Das bedeutet, die Gesamtkraft F_C zeigt in Stabrichtung. Dann folgt aus dem geometrischen Dreieck und dem Kräftedreieck mit

$$F_{Cx} = \frac{4}{5}F_C \quad \text{und} \quad F_{Cy} = \frac{3}{5}F_C$$

die Beträge der Kräfte F_{Cx} und F_C.

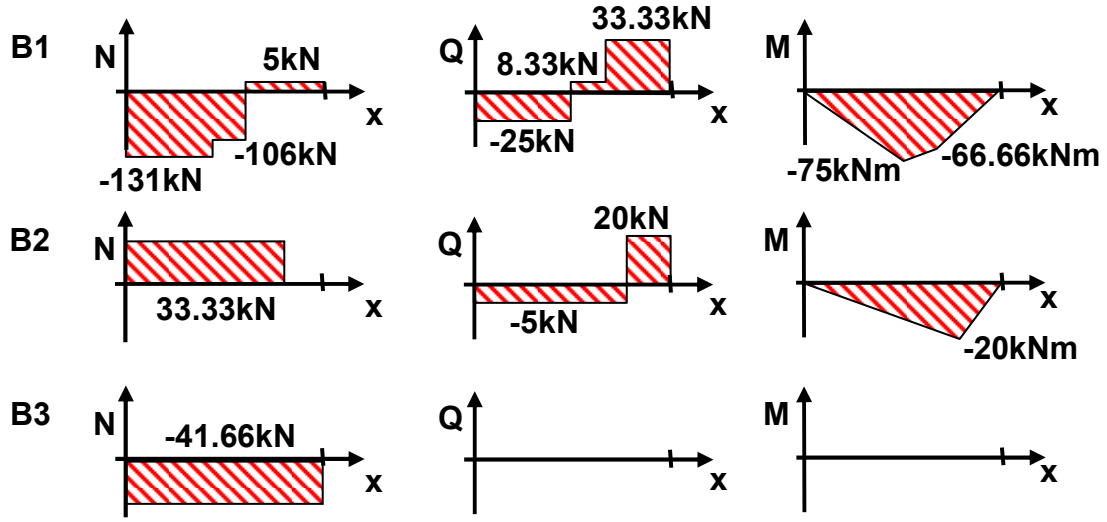
$$F_C = \frac{5}{3}F_{Cy} = 41\frac{2}{3}kN \quad => \quad F_{Cx} = \frac{4}{5}F_C = \frac{4}{5}41\frac{2}{3} = 33\frac{1}{3}kN$$

Die restlichen Schnittkräfte folgen aus den Kräftegleichgewichte für die einzelnen Stäbe.



Innere Kräfte und innere Momente:

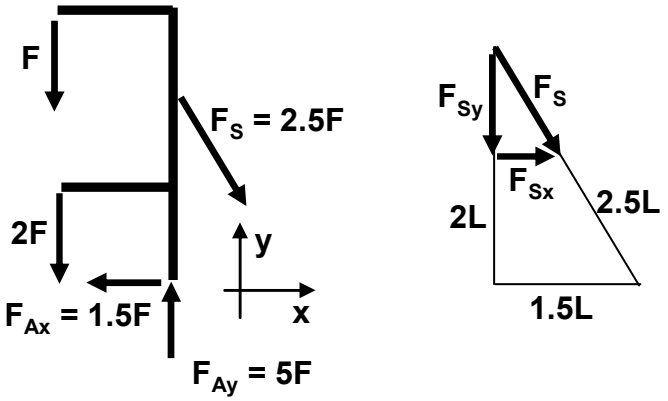
Beim Stab B3 wird ausgenützt, dass dieser nur Kräfte in Stabrichtung übertragen kann, und somit bei diesem Stab nur eine Normalkraft ungleich null existiert.



Geometrie 3:

Die Seilkraft F_S muss in Komponenten zerlegt werden. Mit dem geometrischen Dreieck und dem Kräftedreieck folgt:

$$F_{Sx} = \frac{1.5L}{2.5L} F_S = 0.6F_S \qquad \text{und} \qquad F_{Sy} = \frac{2L}{2.5L} F_S = 0.8F_S$$



Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtbauteil ergeben:

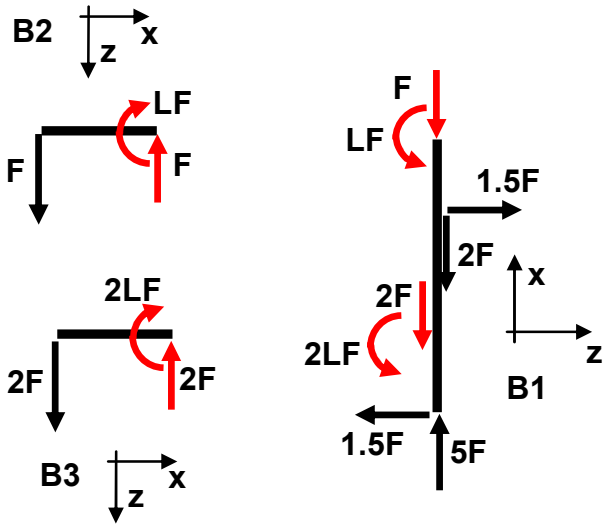
$$\sum M\big|_A = 0: \quad -2LF_{Sx} + L \cdot 2F + LF = -2L \cdot 0.6F_S + 3LF = -1.2LF_S + 3LF = 0$$

=> $F_S = 2.5F$ => $F_{Sx} = 1.5F$ und $F_{Sy} = 2F$

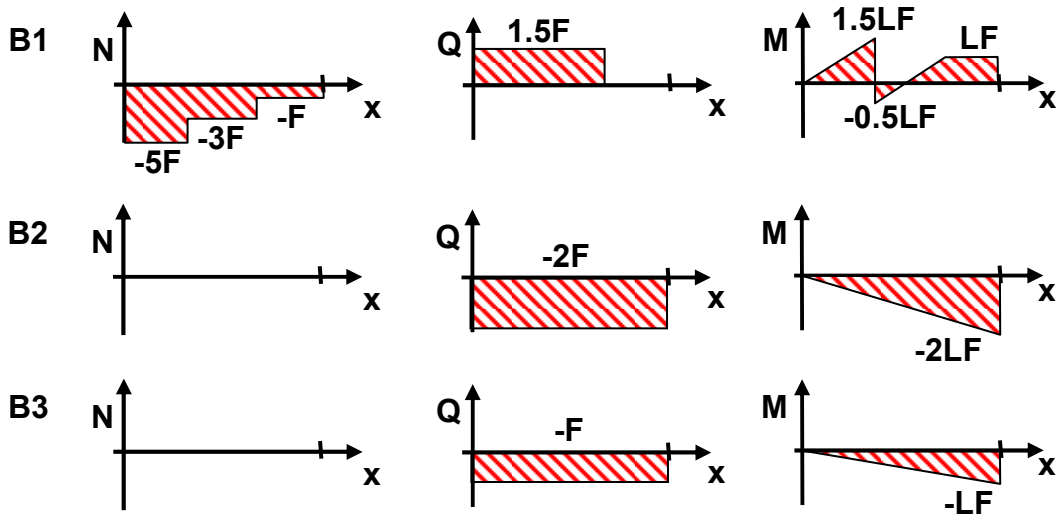
$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F_{Sx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ax} = 1.5F$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{Sy} - 2F - F = F_{Ay} - 2F - 3F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ay} = 5F$$

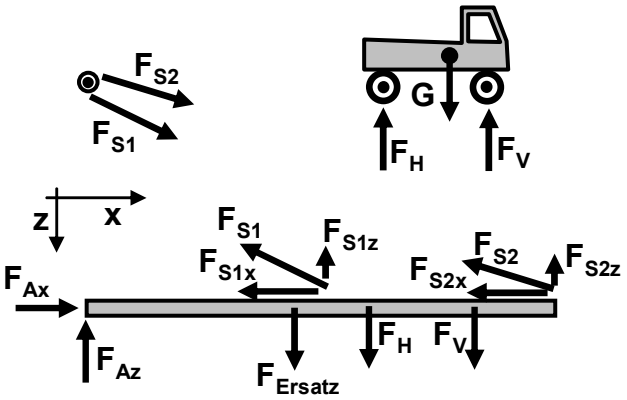
Schnittgrößen:



Innere Kräfte und innere Momente:



Lösungen Aufgabe 26:



Die Gewichtskraft G beträgt 30000N, die in der Balkenmitte wirkende Ersatzkraft F_{Ersatz} erhält man mit:

$$F_{Ersatz} = 18q = 18 \cdot 1400 = 25200N$$

Für die Berechnung der am Balken angreifenden Kräfte muss das Bauteil wie dargestellt frei geschnitten werden.
An der Seilrolle erkennt man mit dem Momentengleichgewicht den Zusammenhang zwischen den Seilkräfte F_{S1} und F_{S2}.

$$F_{S1} = F_{S2} = F_S$$

Die Beiden Seilkräfte müssen in ihre Komponenten zerlegt werden. Aus den geometrischen Abmessungen erhält man:

$$F_{S1x} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 7.5^2}} F_{S1} = \frac{4}{5} F_{S1} = \frac{4}{5} F_S, \qquad F_{S1z} = \frac{7.5}{\sqrt{10^2 + 7.5^2}} F_{S1} = \frac{3}{5} F_{S1} = \frac{3}{5} F_S$$

$$F_{S2x} = \frac{18}{\sqrt{18^2 + 7.5^2}} F_{S2} = \frac{12}{13} F_{S2} = \frac{12}{13} F_S \quad \text{und} \quad F_{S2z} = \frac{7.5}{\sqrt{18^2 + 7.5^2}} F_{S2} = \frac{5}{13} F_{S2} = \frac{5}{13} F_S$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen für das Fahrzeug ermittelt man die Kräfte F_H und F_V.

$$\sum M\big|_H = 0: \quad 3LF_V - 2LG = 0 \quad \Rightarrow \quad F_V = \frac{2}{3} G = 20000N$$

$$\sum F_z = 0: \quad G - F_H - F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = \frac{1}{3} G = 10000N$$

Im nächsten Schritt können die Lagerkräfte F_{Ax}, F_{Az} und die Seilkraft F_S berechnet werden.

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -9F_{Ersatz} + 10F_{S1z} - 12F_H - 15F_V + 18F_{S2z} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_S = 50050N$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{S1x} - F_{S2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 86240N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_{Ersatz} - F_{S1z} + F_H + F_V - F_{S2z} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = 5920N$$

Alle am Balken angreifenden Kräfte sind bekannt. Für die Berechnung von Querkraft und Momente muss der Balken in 4 Intervalle zerlegt werden.

Intervall 1 (0 <= x < 10):

$$q(x) = 1400, \quad Q(x) = -1400x + 5920$$

und $\quad M(x) = -700x^2 + 5920x \quad \Rightarrow \quad M(x = 10) = -10800Nm$

Die Querkraft ist zuerst positiv und dann negativ. Das bedeutet, dass das Moment im inneren des Intervalls ein lokales Maximum besitzt.

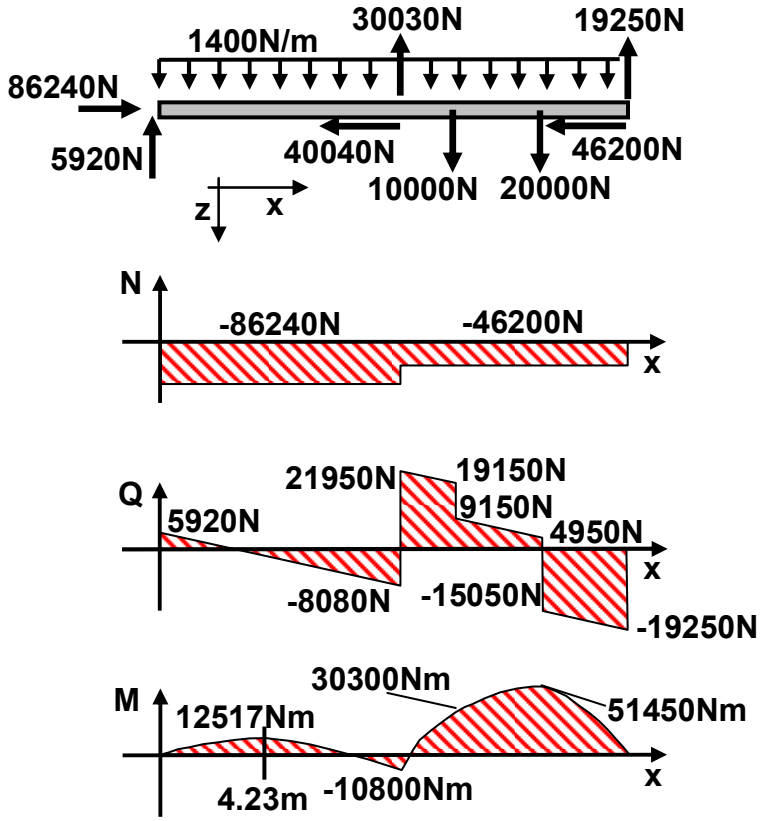
$$Q(x) = -1400x + 5920 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5920}{1400} = 4.23 \quad \Rightarrow \quad M(x = 4.23) = 12517Nm$$

Der Wert am Ende des ersten Intervalls ist der Anfangswert des zweiten Intervalls, der Momenten verlauf hat keine Sprungstellen.

Intervall 2 (10 <= x < 12):
$q(x) = 1400$, $Q(x) = -1400x + 35950$
und $M(x) = -700x^2 + 35950x + 300300$ => $M(x = 12) = 30030Nm$

Intervall 3 (12 <= x < 15):
$q(x) = 1400$, $Q(x) = -1400x + 25950$
und $M(x) = -700x^2 + 25950x - 180300$ => $M(x = 15) = 51450Nm$

Intervall 4 (15 <= x < 18):
$q(x) = 1400$, $Q(x) = -1400x + 5950$
und $M(x) = -700x^2 + 5950x + 119700$ => $M(x = 18) = 0$

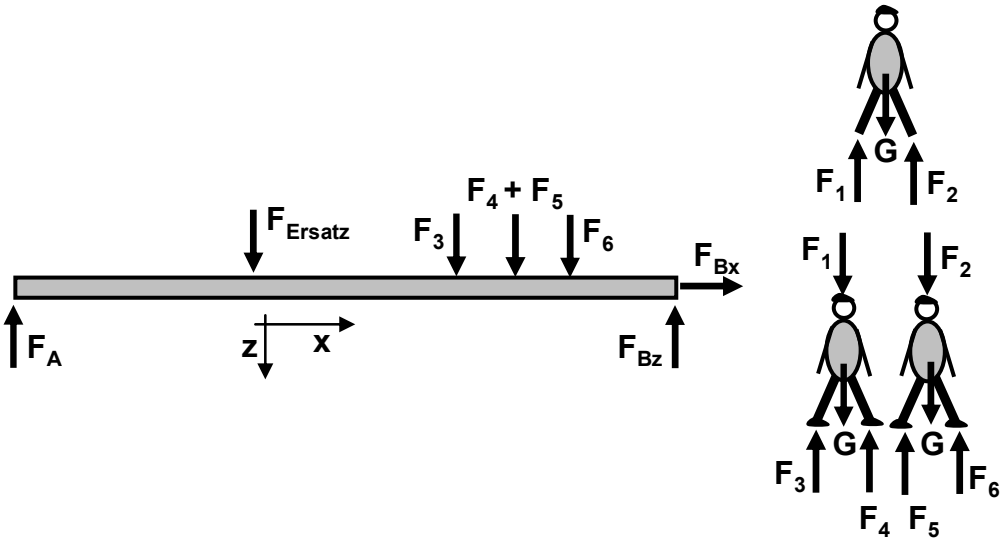


<u>Lösungen Aufgabe 27:</u>

Die Ersatzkraft F_{Ersatz} für die Kiste wirkt in einem Abstand 2.25L vom linken Lager A. Ihr Betrag errechnet sich durch:

$$F_{Ersatz} = qL = \frac{2G}{L} L = 2G$$

Für die Berechnung der am Balken angreifenden Kräfte muss das Bauteil wie dargestellt frei geschnitten werden



Mit den Gleichgewichtsbedingungen für den oberen Akrobat erhält man:

$\sum M\big|_1 = 0: \quad 0.5LF_2 - 0.25G = 0 \quad => \quad F_2 = 0.5G$

$\sum F_z = 0: \quad G - F_1 - F_2 = 0 \quad => \quad F_1 = 0.5G$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen für den unteren, linken Akrobat erhält man:

$\sum M\big|_3 = 0: \quad 0.5LF_4 - 0.25G - 0.25F_1 = 0 \quad => \quad F_4 = 0.75G$

$\sum F_z = 0: \quad G + F_1 - F_3 - F_4 = 0 \quad => \quad F_3 = 0.75G$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen für den unteren, rechten Akrobat erhält man:

$\sum M\big|_5 = 0: \quad 0.5LF_6 - 0.25G - 0.25F_2 = 0 \quad => \quad F_6 = 0.75G$

$\sum F_z = 0: \quad G + F_2 - F_5 - F_6 = 0 \quad => \quad F_5 = 0.75G$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Balken ergeben die Lagerkräfte.

$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} = 0$

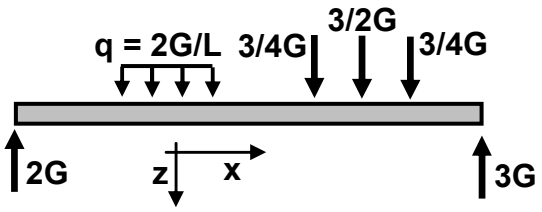
$\sum M\big|_A = 0: \quad -2.25LF_{Ersatz} - 4LF_3 - 4.5L(F_4 + F_5) - 5LF_6 + 6LF_{Bz} = 0 \quad => \quad F_{Bz} = 3G$

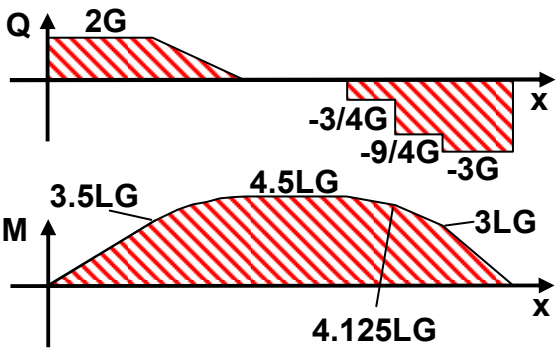
$\sum F_z = 0: \quad -F_A + F_{Ersatz} + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 - F_{Bz} = 0 \quad => \quad F_A = 2G$

Im Bereich der Kiste beträgt der Funktionsverlauf von Querkraft und Moment:

$$Q(x) = 5.5G - 2\frac{G}{L}x$$

$$M(x) = 5.5Gx - \frac{G}{L}x^2 - 3.0625LG$$

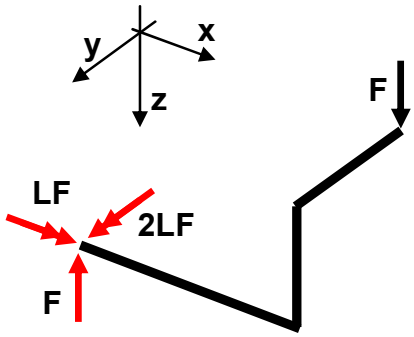




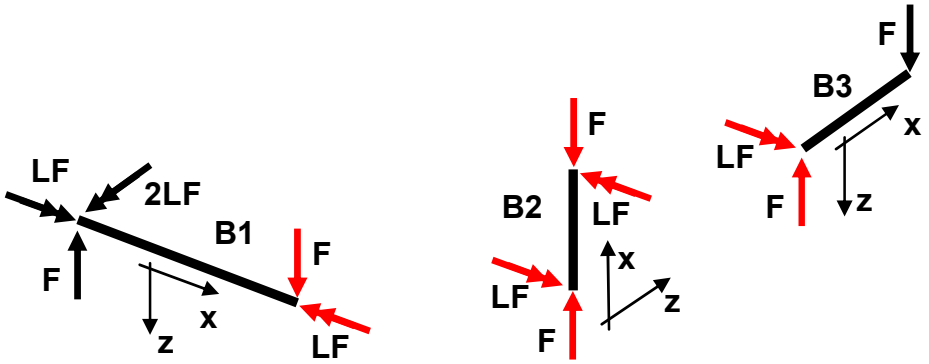
Lösungen Aufgabe 28:

Geometrie 1:

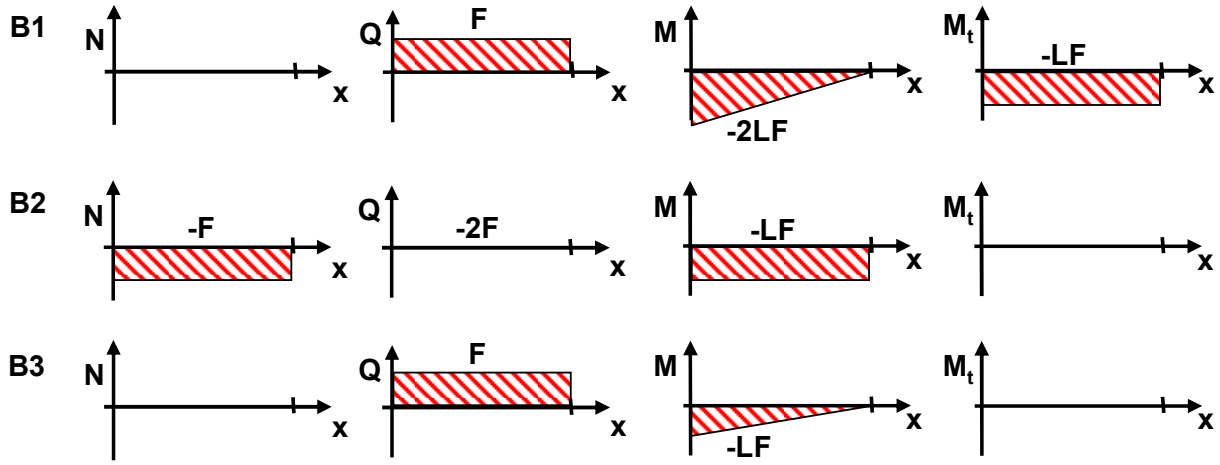
Lagerkräfte:



Schnittgrößen:

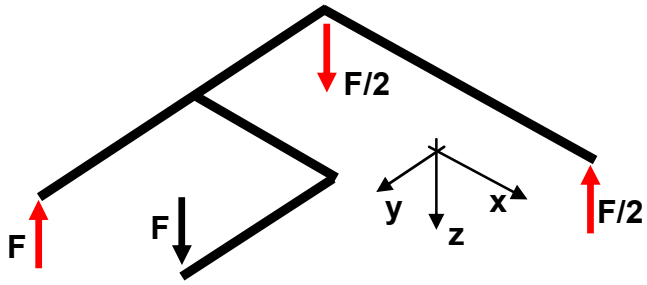


Innere Kräfte und Momente:

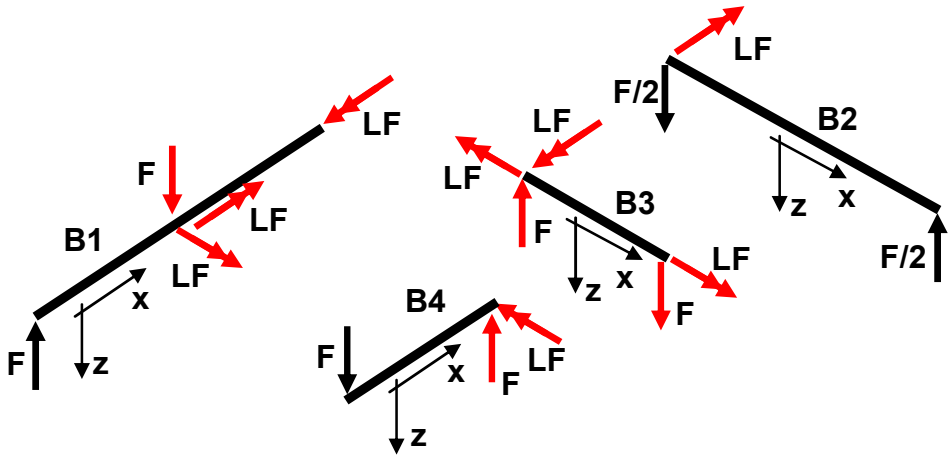


Geometrie 2:

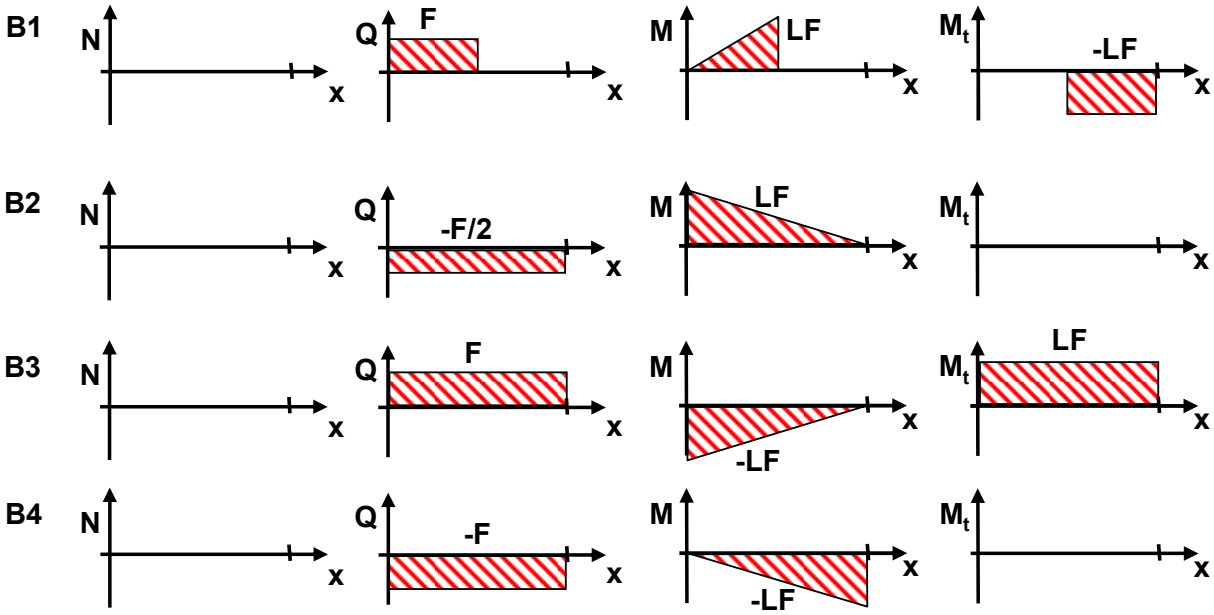
Lagerkräfte:



Schnittgrößen:

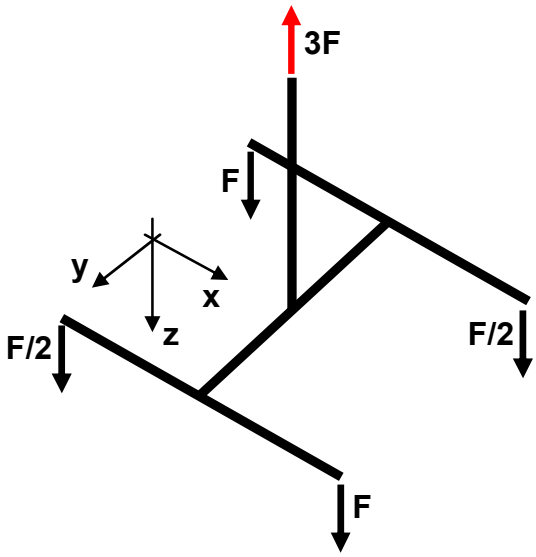


Innere Kräfte und Momente:

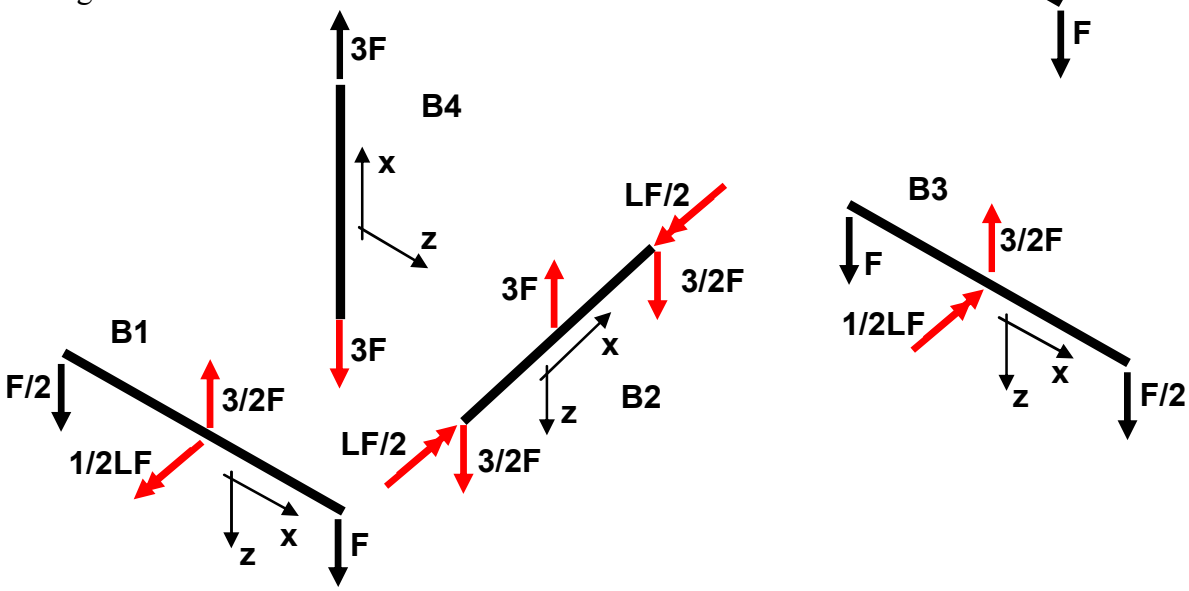


Geometrie 3:

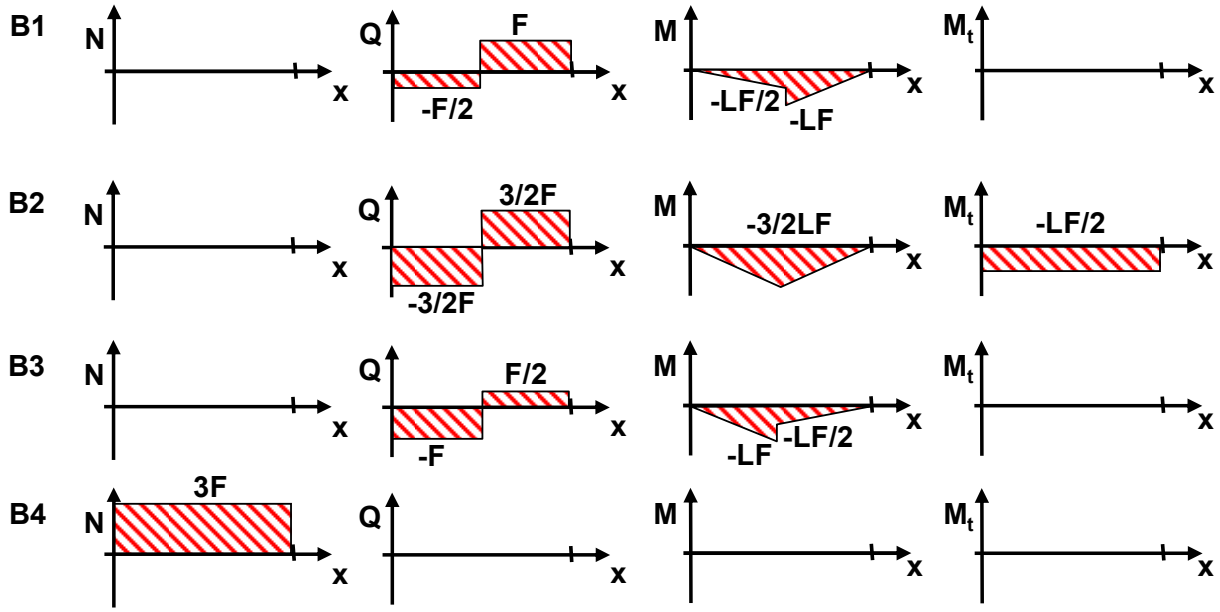
Lagerkräfte:



Schnittgrößen:

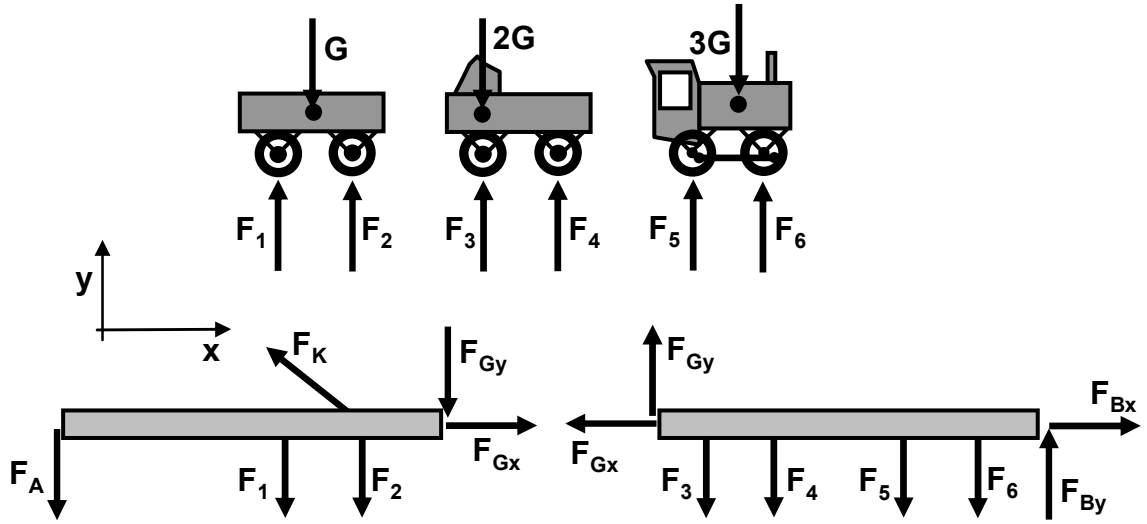


Innere Kräfte und Momente:



Lösungen Aufgabe 29:

Die Lokomotive, die beiden Wagen, Kette und die beiden Brückenteile müssen frei geschnitten werden. Die Kräfte F_1 bis F_6 können mit den Gleichgewichtsbedingungen für die zwei Wagen und die Lokomotive ermittelt werden. Da weitere 4 noch unbekannte Kräfte an der Brücke wirksam sind, muss für deren Berechnung die Brücke am Gelenk zerteilt werden.



Die Gleichgewichtsbedingungen für den linken Wagen lauten:

$\sum M\big|_1 = 0: \quad -LG + 2LF_2 = 0 \qquad => \qquad F_2 = 0.5G$

$\sum F_y = 0: \quad F_1 - G + F_2 = 0 \qquad => \qquad F_1 = 0.5G$

Die Gleichgewichtsbedingungen für den rechten Wagen lauten:

$\sum M\big|_3 = 0: \quad 2LF_4 = 0 \qquad => \qquad F_4 = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_3 - 2G + F_4 = 0 \qquad => \qquad F_3 = 2G$

Mit dem Längenverhältnis a/b und dem Radstand der Lokomotive

$\frac{a}{b} = 2$ bzw. $b = \frac{a}{2}$ und $a + b = 2L \quad => \quad a + \frac{a}{2} = 2L \quad => \quad a = \frac{2L}{1.5} = \frac{4}{3}L$

ergeben die Gleichgewichtsbedingungen für die Lokomotive:

$\sum M\big|_5 = 0: \quad -a3G + 2LF_6 = -\frac{4}{3}L3G + 2LF_6 = 0 \qquad => \qquad F_6 = 2G$

$\sum F_y = 0: \quad F_5 - 3G + F_6 = 0 \qquad => \qquad F_5 = G$

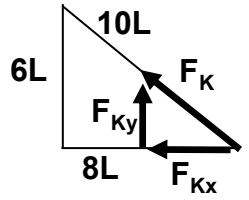
Am rechten Brückenteil können die Kräfte F_{By} und F_{Gy} ermittelt werden.

$\sum M\big|_G = 0: \quad -LF_3 - 3LF_4 - 6LF_5 - 8LF_6 + 10LF_{By} = -2LG - 6LG - 16LG + 10LF_{By} = 0$

$=> \quad F_{By} = 2.4G$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Gy} - F_3 - F_4 - F_5 - F_6 + F_{By} = F_{Gy} - 2G - G - 2G + 2.4G = 0$

$=> \quad F_{Gy} = 2.6G$



Anschließend werden die noch fehlenden Kräfte des linken Brückenteils bestimmt. Dazu muss die Kettenkraft F_K in eine waagrechte und in eine senkrechte Komponente zerlegt werden. Aus dem geometrischen Dreieck und dem Kräftedreieck folgt:

$$\frac{F_{Kx}}{F_{Ky}} = \frac{8L}{6L} = \frac{4}{3} \qquad => \qquad F_{Kx} = \frac{4}{3} F_{Ky}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für den linken Brückenteil ergeben:

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -6LF_1 - 8LF_2 + 8LF_{Ky} - 10LF_{Gy} = -3LG - 4LG + 8LF_{Ky} - 26LG = 0$$

$$=> \qquad F_{Ky} = 4.125G \qquad => \qquad F_{Kx} = \frac{4}{3} F_{Ky} = \frac{4}{3} 4.125G = 5.5G$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_A - F_1 - F_2 + F_{Ky} - F_{Gy} = -F_A - 0.5G - 0.5G + 4.125G - 2.6G = 0$$

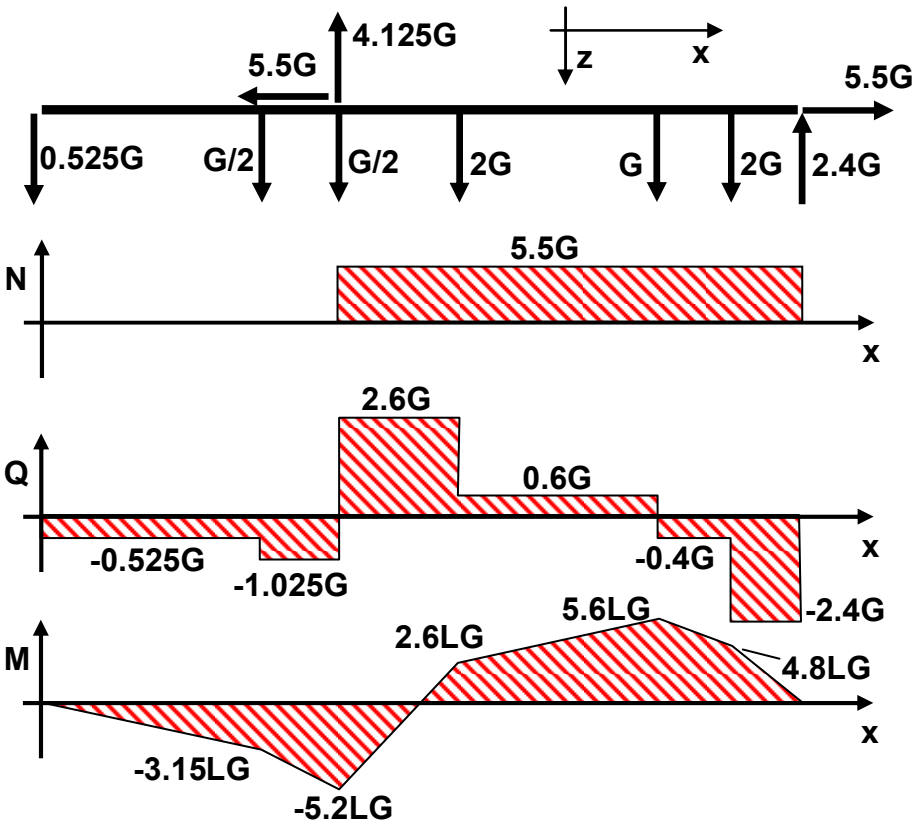
$$=> \qquad F_A = 0.525G$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Kx} + F_{Gx} = -5.5G + F_{Gx} = 0 \qquad => \qquad F_{Gx} = 5.5G$$

Am rechten Brückenteil kann die letzte fehlende Kraft F_{Bx} ermittelt werden.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Gx} + F_{Bx} = -5.5G + F_{Bx} = 0 \qquad => \qquad F_{Bx} = 5.5G$$

Innere Kräfte und Momente:



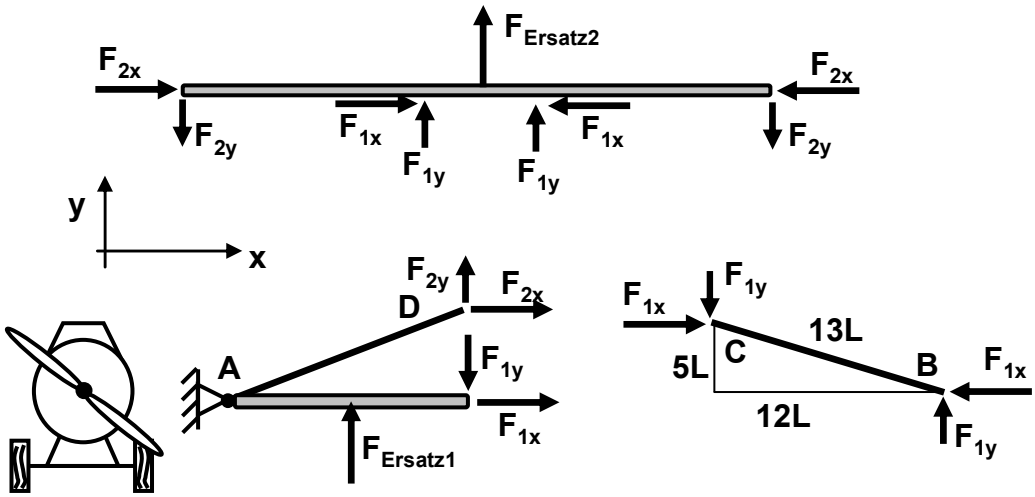
<u>Lösungen Aufgabe 30:</u>

a.) Die Ersatzkraft (Auftriebskraft) der gesamten Streckenlast muss gleich der Gewichtskraft des Flugzeuges G sein.

$$G = (12L + 5L + 12L + 2 \cdot 12L)q = 53Lq = 53 \cdot 300 \cdot 1 = 15900N$$

b.) Der Flieger wird wie dargestellt frei geschnitten. Bei den unteren Flügeln und bei den Verbindungsstreben kann die Symmetrie des Flugzeuges ausgenutzt werden. Da die Verbindungskräfte bei A nicht benötigt werden, müssen diese nicht eingetragen werden. Die Verbindung Flugzeugrumpf/Flügel wird durch ein gelenkiges Lager ersetzt. Die Verbindungsstreben AD und BC sind beidseitig gelenkig gelagert. Daher können sie nur Kräfte in Stabrichtung übertragen. Am unteren und oberen Flügel werden die Ersatzkräfte $F_{Ersatz1}$ und $F_{Ersatz2}$ eingeführt. Sie greifen jeweils in der Mitte des Flügels an.

$F_{Ersatz1} = 12Lq = 12 \cdot 300 \cdot 1 = 3600N$ und $F_{Ersatz2} = 29Lq = 29 \cdot 300 \cdot 1 = 8700N$



Momentengleichgewicht am unteren Flügel:

$\sum M\big|_A = 0: \quad 6LF_{Ersatz1} - 12LF_{1y} = 0 \qquad => \qquad F_{1y} = 6Lq = 1800N$

Der Stab BC überträgt nur Kräfte in Stabrichtung. Das bedeutet, die resultierende von F_{1x} und F_{1y} muss in Stabrichtung zeigen.

$\frac{F_{1x}}{F_{1y}} = \frac{12L}{5L} \qquad => \qquad F_{1x} = \frac{12L}{5L} F_{1y} = \frac{12}{5} 6Lq = 14.4Lq = 4320N$

Kräftegleichgewicht in senkrechter Richtung am unteren Flügel:

$\sum F_y = 0: \quad 2F_{1y} + F_{Ersatz2} - 2F_{2y} = 0 \qquad => \qquad F_{2y} = 20.5Lq = 6150N$

Der Stab AD überträgt nur Kräfte in Stabrichtung. Das bedeutet, die resultierende von F_{2x} und F_{2y} muss in Stabrichtung zeigen.

$\frac{F_{2x}}{F_{2y}} = \frac{12L}{5L} \qquad => \qquad F_{2x} = \frac{12L}{5L} F_{2y} = \frac{12}{5} 20.5Lq = 49.2Lq = 14760N$

Innere Kräfte und Momente am oberen Flügel:

Intervall 1 (0 <= x < 12L):

$q(x) = -q, \qquad Q(x) = qx - 20.5Lq$

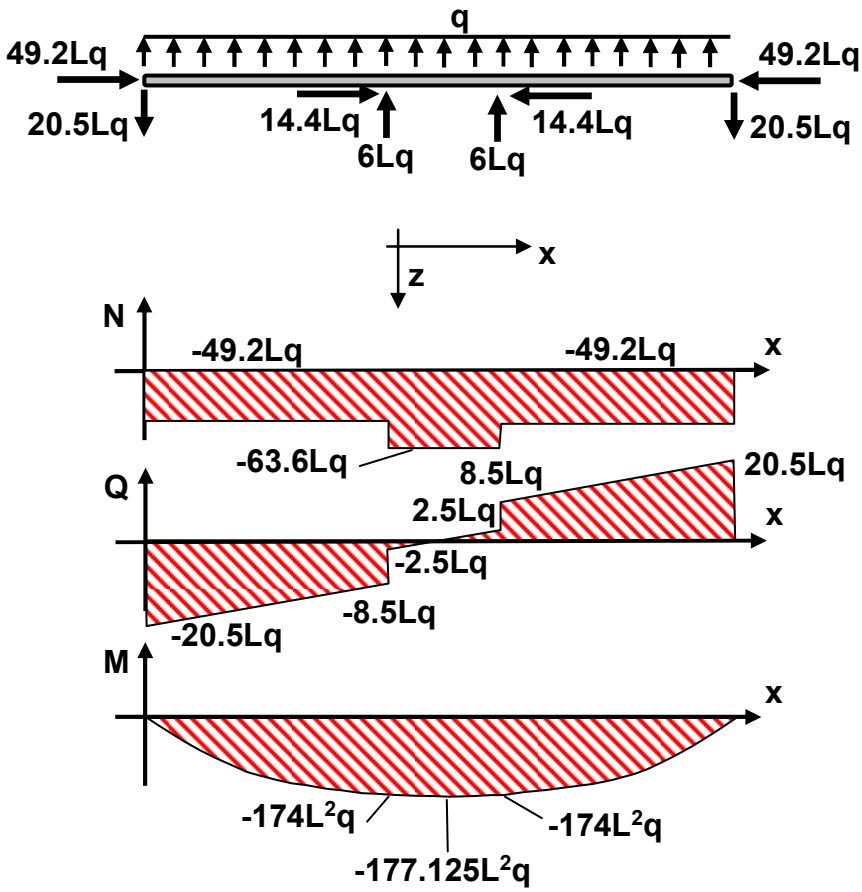
und $M(x) = \frac{q}{2}x^2 - 20.5Lqx \qquad => \qquad M(x = 12L) = -174L^2q$

Intervall 2 (12L <= x < 14.5L):

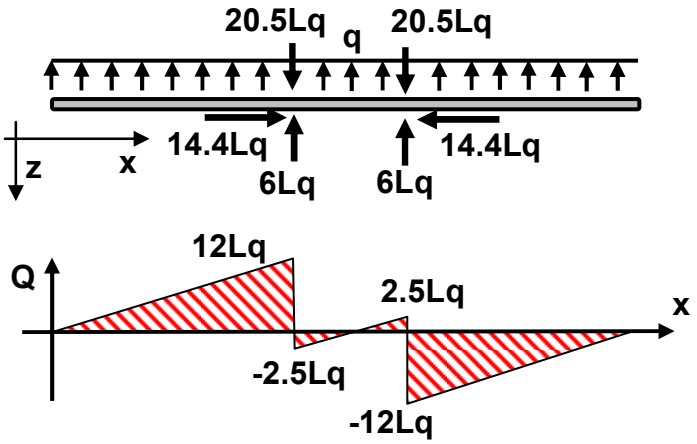
$q(x) = -q, \qquad Q(x) = qx - 14.5Lq$

und $M(x) = \frac{q}{2}x^2 - 14.5Lqx - 72L^2q$ => $M(x = 14.5L) = -177.125L^2q$

Die zweite Hälfte des Flügels ist symmetrisch zur ersten.



c.) Die Streckenlast und die Kräfte F_{1x} und F_{1y} bleiben unverändert. Der Stab AD überträgt nur noch eine senkrechte Kraft. Das Kräftegleichgewicht in senkrechter Richtung ergibt, dass F_{2y} vom Betrag unverändert bleibt, nur der Angriffspunkt wandert in die Mitte zum Punkt C.



Lösungen Aufgabe 31:

Die Normalkraft ist im gesamten Stab N = F. Da die Querschnittsfläche im Teilstab 1 konstant ist, ist auch die Spannung im Teilstab 1 konstant.

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{4F}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 20^2} = 31.8 \frac{N}{mm^2}$$

Analog gilt im Teilstab 2:

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} D_2^2} = \frac{4F}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10^2} = 127.3 \frac{N}{mm^2}$$

Da auch der Elastizitätsmodul E konstant ist, ergeben sich auch in jedem Teilstab konstante Dehnungen.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{31.8}{10000} = 3.18 \cdot 10^{-3} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{127.3}{10000} = 0.0127$$

Im linken Teilstab 1 erhält man die Verschiebung:

$$u_1(x) = \varepsilon_1 x = \frac{\sigma_1}{E} x = \frac{4F}{\pi E D_1^2} x = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10000 \cdot 20^2} x = 3.18 \cdot 10^{-3} x$$

Am Verbindungspunkt Teilstab 1/Teilstab 2 gilt x = L_1.

$$u_1(x = L_1) = \varepsilon_1 x = \frac{\sigma_1}{E} x = \frac{4F}{\pi E D_1^2} L_1 = \frac{4 \cdot 10000}{\pi 10000 \cdot 20^2} 500 = 1.59 mm$$

Im Teilstab 2 erhält man mit der Anfangsverschiebung u_1 (x = L_1) = 1.59mm durch den Teilstab 1 eine lokale Verschiebung von:

$$u_2(x) = \varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 (x - L_1) = u_1(x = L_1) + \frac{4F}{\pi E D_2^2}(x - L_1) = 1.59 + \frac{4 \cdot 10000}{\pi 10000 \cdot 10^2}(x - 500)$$

=> $$u_2(x) = 1.59 + 0.0127(x - 500)$$

Setzt man in diesen Ausdruck die x-Koordinate des Endpunktes ein, erhält man die Stabverlängerung.

$$u_2(x = L_1 + L_2) = 1.59 + 0.0127(1000 - 500) = 1.59 + 6.35 = 7.94 mm$$

Lösungen Aufgabe 32:

Die Gesamtkraft F = mg setzt sich aus den n Drahtkräften F_D zusammen (n: Anzahl der Drähte).

$$F = mg = nF_D = n\sigma_{\max} A_D = n\sigma_{\max} \frac{\pi}{4} D^2$$

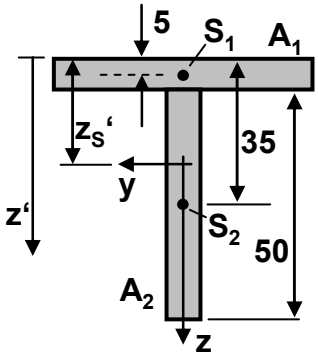
Löst man dies nach n auf, erhält man die gesuchte Anzahl n = 1250 an Drähten.

$$n = \frac{4F}{\pi \sigma_{\max} D^2} = \frac{4 \cdot 10000 \cdot 9.81}{\pi \cdot 100 \cdot 1^2} = 1249.06$$

Lösungen Aufgabe 33:

Der Gesamtflächenmittelpunkt aller Geometrien liegt im Koordinatenursprung (y = 0, z = 0).

Geometrie 1 (exaktes Flächenträgheitsmoment):



Da die Geometrie nicht symmetrisch zu einer waagrechten Linie ist, muss für die Berechnung des exakten Flächenträgheitsmoments vorab die Lage des Gesamtflächenmittelpunkt ermittelt werden. Ein Bezugskoordinatensystem z' wird eingeführt, welches an der Bauteiloberkante seinen Ursprung hat. Die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes ist dann durch den Abstand z_s' gegeben. Für die Berechnung dieses Abstandes wird die Geometrie wie dargestellt in 2 Teilflächen zerlegt. Man benötigt die Flächeninhalte A_i der Teilflächen und die Lage ihrer Schwerpunkte S_i im Bezugskoordinatensystem z'. Die Skizze ergibt:

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z'_{S1} = 5mm$

$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 mm^2$ und $z'_{S2} = 35mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

Damit ermittelt man den Abstand z_s', welchen man für die Berechnung der Steinerschen Anteile des Flächenträgheitsmoments benötigt.

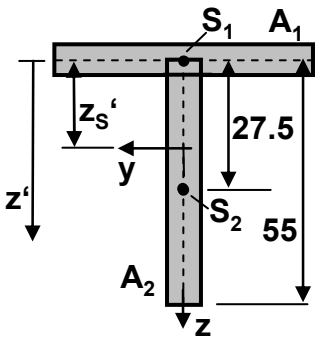
$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2}\left(A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2}\right) = \frac{1}{600+500}\left(600 \cdot 5 + 500 \cdot 35\right) = 18.64mm$$

Bei den Steinerschen Anteilen der Teilflächen muss jeweils der Abstand in z-Richtung zwischen dem Gesamtflächenmittelpunkt und dem Flächenmittelpunkt der Teilfläche berücksichtigt werden.

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(z'_{S1} - z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600\left(5 - 18.64\right)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500\left(35 - 18.64\right)^2 = 354621 mm^4$$

Geometrie 1 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments):



Beim dünnwandigen Ansatz reduziert man die Querschnittsfläche auf einzelne Linien (Profilmittellinien, gestrichelt dargestellt), welchen man die Wandstärke als Dicke zuordnet. Überlappende und vernachlässigte Flächen werden akzeptiert, da deren Einfluss durch die Dünnwandigkeit nur gering ist. Alle Maße werden auf die Profilmittellinien bezogen.

Wieder muss vorab die Lage des Gesamtflächenmittelpunkt ermittelt werden. Ein Bezugskoordinatensystem z' wird eingeführt, welches an der Profilmittellinie der waagrechten Teilfläche seinen Ursprung hat. Man benötigt die Flächeninhalte A_i der Teilflächen und die Lage ihrer Schwerpunkte S_i im Bezugskoordinatensystem z'. Die Skizze ergibt:

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z'_{S1} = 0$

$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 55 = 550 mm^2$ und $z'_{S2} = 27.5mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

Damit ermittelt man den Abstand z_S', welchen man für die Berechnung der Steinerschen Anteile des Flächenträgheitsmoments benötigt.

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2}\left(A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2}\right) = \frac{1}{600+550}\left(600 \cdot 0 + 550 \cdot 27.5\right) = 13.15mm$$

Flächenträgheitsmoment:

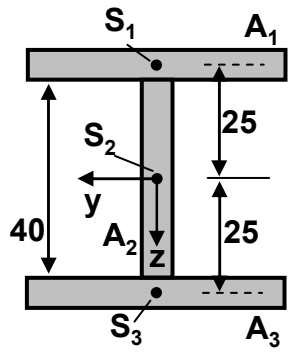
$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(z'_{S1} - z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(0 - 13.15)^2 + \frac{10 \cdot 55^3}{12} + 550(27.5 - 13.15)^2 = 360657mm^4$$

<u>Fehler ε bei Geometrie 1 mit dünnwandigem Ansatz</u>:

$$\varepsilon = \left|\frac{354621 - 360657}{354621}\right| \cdot 100\% = 1.7\%$$

<u>Geometrie 2 (exaktes Flächenträgheitsmoment)</u>:



Die Geometrie ist symmetrisch zur waagrechten Mittellinie. Das bedeutet, die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes liegt auf dieser Mittellinie und muss nicht ausgerechnet werden. Die Querschnittsfläche wird in drei Teilflächen zerlegt. Die Abstände der Schwerpunkte S_i der Teilflächen vom Gesamtflächenmittelpunkt können direkt angegeben werden.

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600mm^2$ und $z_{S1} = -25mm$

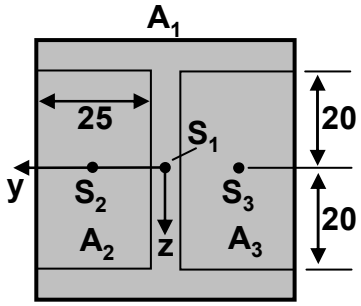
$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 40 = 400mm^2$ und $z_{S2} = 0$

$A_3 = B_3 H_3 = 60 \cdot 10 = 600mm^2$ und $z_{S3} = 25mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 {z_{S1}}^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 {z_{S2}}^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 {z_{S3}}^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(-25)^2 + \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400 \cdot 0^2 + \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600 \cdot 25^2 = 813333mm^4$$



Alternativ kann man das Flächenträgheitsmoment berechnen, wenn man die Querschnittsfläche aus einem Quadrat der Breite 60 minus zwei Rechtecke der Breite 25 und der Höhe 40 betrachtet.

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 60 = 3600mm^2$ und $z_{S1} = 0$

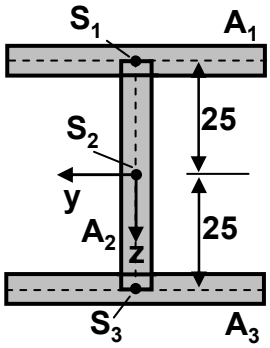
$A_2 = B_2 H_2 = 25 \cdot 40 = 1000mm^2$ und $z_{S2} = 0$

$A_3 = B_3 H_3 = 25 \cdot 40 = 1000mm^2$ und $z_{S3} = 0$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 z_{S1}{}^2 - \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 z_{S2}{}^2 - \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 z_{S3}{}^2 = \frac{B_1 H_1^3}{12} - \frac{B_2 H_2^3}{12} - \frac{B_3 H_3^3}{12}$$

$$= \frac{60 \cdot 60^3}{12} - \frac{25 \cdot 40^3}{12} - \frac{25 \cdot 40^3}{12} = 813333 mm^4$$



<u>Geometrie 2 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments)</u>:

Beim dünnwandigen Ansatz bezieht man alle Abmessungen auf die Profilmittellinien und weist diesen Dicken zu.

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z_{S1} = -25 mm$

$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 mm^2$ und $z_{S2} = 0$

$A_3 = B_3 H_3 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z_{S3} = 25 mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

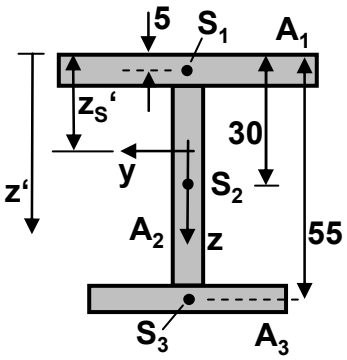
Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 z_{S1}{}^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 z_{S2}{}^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 z_{S3}{}^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(-25)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500 \cdot 0^2 + \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600 \cdot 25^2 = 864167 mm^4$$

<u>Fehler ε bei Geometrie 2 mit dünnwandigem Ansatz</u>:

$$\varepsilon = \left| \frac{813333 - 864167}{813333} \right| \cdot 100\% = 6.25\%$$



<u>Geometrie 3 (exaktes Flächenträgheitsmoment)</u>:

Die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes muss vorab berechnet werden. Die Querschnittsfläche wird in drei Teilflächen zerlegt. Das Bezugskoordinatensystem z' hat seinen Ursprung an der oberen Kante des Querschnittes.

$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z'_{S1} = 5 mm$

$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 40 = 400 mm^2$ und $z'_{S2} = 30 mm$

$A_3 = B_3 H_3 = 45 \cdot 10 = 450 mm^2$ und $z'_{S3} = 55 mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2} + A_3 z'_{S3}\right) = \frac{1}{600 + 400 + 450}\left(600 \cdot 5 + 400 \cdot 30 + 450 \cdot 55\right) = 27.41 mm$$

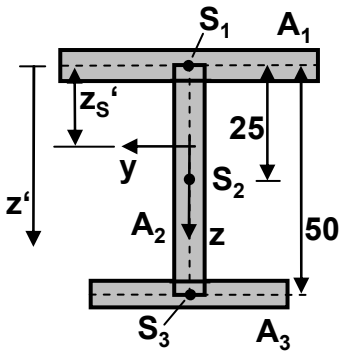
Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(z'_{S1} - z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3\left(z'_{S3} - z'_S\right)$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(5 - 27.41)^2 + \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400(30 - 27.41)^2 + \frac{45 \cdot 10^3}{12} + 450(55 - 27.41)^2 = 708635 mm^4$$

Geometrie 3 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments):

Flächeninhalte und z_S'-Koordinaten der Flächenmittelpunkte der Teilflächen. Das Bezugskoordinatensystem z' hat seinen Ursprung auf der Profilmittellinie der oberen waagrechten Teilfläche.



$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 mm^2$ und $z'_{S1} = 0$

$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 mm^2$ und $z'_{S2} = 25 mm$

$A_3 = B_3 H_3 = 10 \cdot 45 = 450 mm^2$ und $z'_{S3} = 45 mm$

(B_i: Breite, H_i: Höhe)

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2} + A_3 z'_{S3}\right) = \frac{1}{600 + 500 + 450}\left(600 \cdot 0 + 500 \cdot 25 + 450 \cdot 50\right) = 22.58 mm$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(z'_{S1} - z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3\left(z'_{S3} - z'_S\right)$$

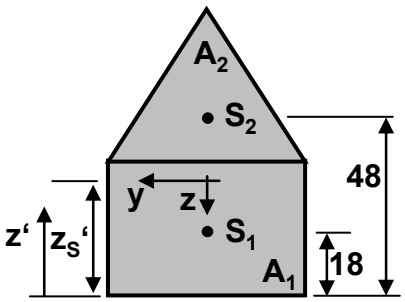
$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(0 - 22.58)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500(25 - 22.58)^2 + \frac{45 \cdot 10^3}{12} + 450(50 - 22.58)^2 = 760094 mm^4$$

Fehler ε bei Geometrie 3 mit dünnwandigem Ansatz:

$$\varepsilon = \left|\frac{708635 - 760094}{708635}\right| \cdot 100\% = 7.26\%$$

Geometrie 4:

Die Querschnittsfläche wird in ein Rechteck A_1 und in ein Dreieck A_2 zerlegt. Im Bezugskoordinatensystem z' gelten die folgenden Abmessungen:



$A_1 = B_1 H_1 = 45 \cdot 36 = 1620 mm^2$ und $z'_{S1} = 18$

$A_2 = \frac{B_2 H_2}{2} = \frac{45 \cdot 36}{2} = 810 mm^2$ und $z'_{S2} = 48 mm$

(vgl. Aufgabe 5 und 6)

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2}\left(A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2}\right) = \frac{1}{1620 + 810}\left(1620 \cdot 18 + 810 \cdot 48\right) = 28 mm$$

Flächenträgheitsmoment:

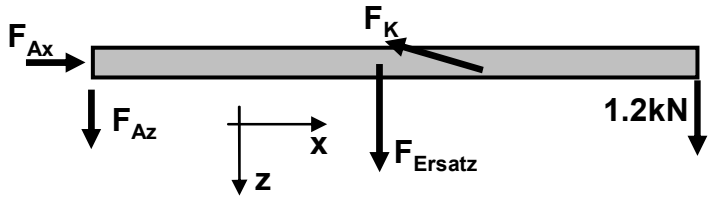
$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(-z'_{S1} + z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(-z'_{S2} + z'_S\right)^2$$

$$= \frac{45 \cdot 36^3}{12} + 1620(-18 + 28)^2 + \frac{45 \cdot 36^3}{36} + 810(-48 + 28)^2 = 719280 mm^4$$

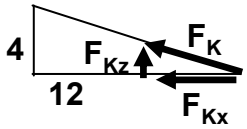
Lösungen Aufgabe 34:

Der Balken wird frei geschnitten, wobei für die Berechnung der Kettenkraft F_K und der Lagerkräfte die Streckenlast durch die Ersatzkraft F_{Ersatz}, die bei x = 10m wirkt, ersetzt wird.

$F_{Ersatz} = qL = 0.1 \cdot 20 = 2kN$



Die Kettenkraft muss in eine waagrechte und in eine senkrechte Komponente zerlegt werden. Das geometrische Dreieck und das Kräftedreieck ergeben:



$$\frac{F_{Kx}}{F_{Kz}} = \frac{12}{4} = 3 \qquad => \qquad F_{Kx} = 3F_{Kz}$$

Gleichgewichtbedingungen:

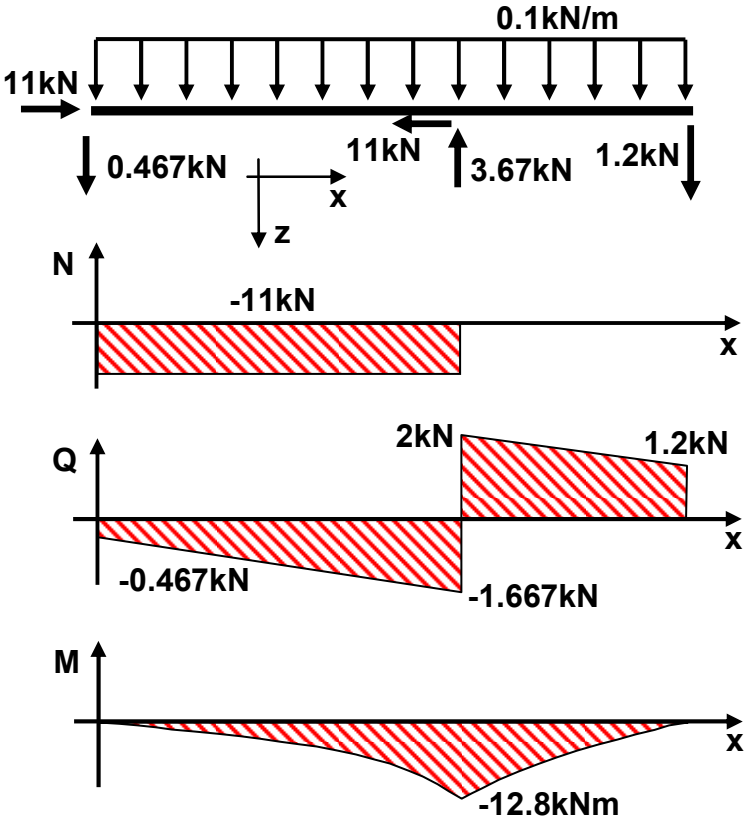
$$\sum M\big|_A = 0: \quad -10F_{Ersatz} + 12F_{Kz} - 20 \cdot 1.2 = -10 \cdot 2 + 12F_{Kz} - 20 \cdot 1.2 = 0$$

$$=> \quad F_{Kz} = \frac{11}{3}kN = 3.667kN \qquad => \qquad F_{Kx} = 3F_{Kz} = 11kN$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Kx} = 0 \qquad => \qquad F_{Ax} = 11kN$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Ersatz} - F_{Kz} + 1.2 = F_{Az} + 1.2 - 3.667 + 2 = 0 \qquad => \qquad F_A = 0.467G$$

Innere Kräfte und Momente:



Das Flächenträgheitsmoment I_y kann von Aufgabe 33, Geometrie 2 übernommen werden. Die Querschnittsfläche setzt sich aus den Flächeninhalten der drei Teilflächen zusammen.

$I_y = 813333 mm^4$ und $A = A_1 + A_2 + A_3 = 600 + 400 + 600 = 1600 mm^2$

Zuerst werden die **Normalspannungen $\sigma_{Biegung}$ infolge des Biegemoments** berechnet. Es werden die maximalen Spannungen gesucht. Diese befinden sich an der Stelle des maximalen Moments bei x = 12m. Daher muss in der Formel für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments das maximale Moment M_{max} = -12.8kNm verwendet werden.

$$\sigma_{Biegemoment}(z) = \frac{M_{\max}}{I_y} z = \frac{-12.8 \cdot 10^6}{813333} z = -15.74 z$$

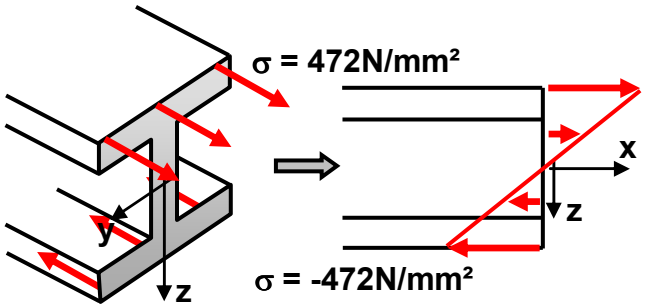
Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein negativer z-Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte negative Wert beträgt z = -30mm. Dann befindet man sich an der Oberseite des Profils. An dieser Seite wird das Profil infolge des Biegemoments in x-Richtung auseinander gezogen.

$$\sigma_{\max Zug, Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z = -30) = -15.74 \cdot (-30) = 472 \frac{N}{mm^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein positiver z-Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der betragsmäßig größte positive Wert lautet z = 30mm. Dann befindet man sich an der Unterseite des Profils. An dieser Seite wird das Profil infolge des Biegemoments in x-Richtung zusammen gedrückt.

$$\sigma_{\max Druck, Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z = 30) = -15.74 \cdot 30 = -472 \frac{N}{mm^2}$$

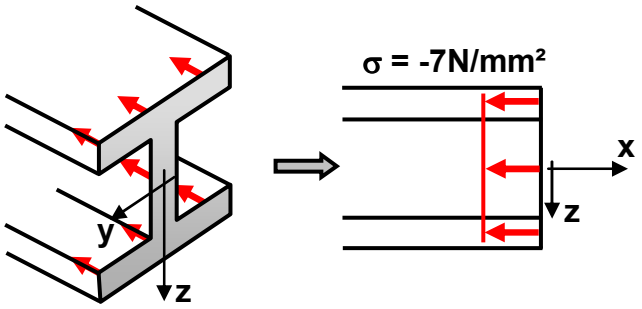
Zeichnet man die Maximalwerte an Ober- und Unterseite in das Profil ein, kann man den Spannungsverlauf in Abhängigkeit von z darstellen. Die Formel für die Berechnung der Biegespannung ist linear. Daher können die Extremwerte durch eine Gerade verbunden werden. Der Spannungsverlauf wird durch diese Gerade dargestellt.



Auch die **Normalkraft erzeugt Normalspannungen**. Diese sind über dem Querschnitt konstant. Da die Querschnittsfläche des Balkens sich nicht ändert, erhält man im Bereich der maximalen Normalkraft N_{max} = -11kN die maximale Normalspannung infolge Normalkraft.

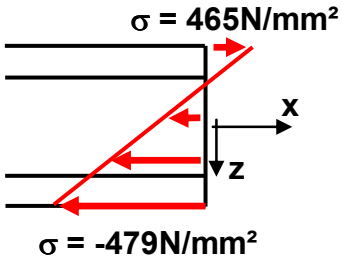
$$\sigma_{Normalkraft} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{-11000}{1600} = -6.875 \approx -7 \frac{N}{mm^2}$$

Auch diese negative Normalspannungen bzw. Druckspannungen infolge Normalkraft können in der Querschnittsfläche eingetragen werden.



Sind nun die maximalen Normalspannungen im Bauteil gesucht, muss man die Normalspannungen infolge Biegemoments und die Normalspannungen infolge Normalkraft überlagern. Der hier untersuchte Balken hat im Bereich von x = 12m sein maximales Moment. Da sich die Normalkraft aber an dieser Position ändert (N = -11kN bei x <12m bzw. N = 0 bei x > 12m) muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Es muss eine Position unmittelbar vor x = 12m und unmittelbar nach x = 12m betrachtet werden. Die dabei auftretenden Maximalwerte stellen die maximalen Zug- und Druckspannungen dar.

Position 1, $x < 12m$:



Das Biegemoment und die Normalkraft sind ungleich null und werden überlagert. Das bedeutet, dass die Normalspannungen infolge des Biegemoments und infolge Normalkraft addiert werden. Dies ergibt die Extremwerte an Unter- und Oberseite:

Unterseite: $\sigma_{Druck,1} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft} = -472 - 7 = -479 \frac{N}{mm^2}$

Oberseite: $\sigma_{Zug,1} = \sigma_{\max Zug,Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft} = 472 - 7 = 465 \frac{N}{mm^2}$

Position 2, $x > 12m$:

Hier ist nur das Biegemoment ungleich null. Daher entspricht der überlagerte Spannungsverlauf dem Spannungsverlauf infolge des Biegemoments.

Unterseite: $\sigma_{Druck,2} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment} = -472 \frac{N}{mm^2}$

Oberseite: $\sigma_{Zug,2} = \sigma_{\max Zug,Biegemoment} = 472 \frac{N}{mm^2}$

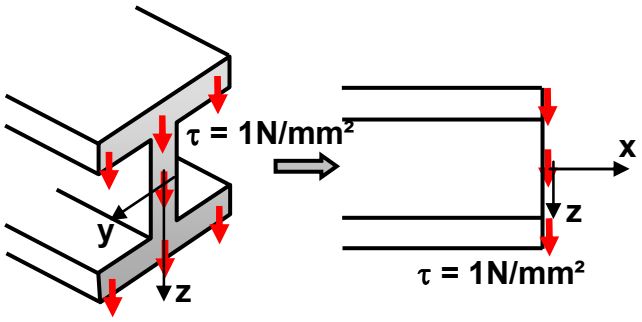
Maximale Normalspannungen im Balken:

$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{Druck,1} = -479 \frac{N}{mm^2}$ und $\sigma_{\max Zug} = \sigma_{Zug,2} = 472 \frac{N}{mm^2}$

In diesem Beispiel ist die Normalspannung infolge Normalkraft viel kleiner als die Normalspannung infolge des Biegemoments. Dies tritt sehr häufig auf. Daher ist es oft zulässig, die Normalspannung infolge Normalkraft zu vernachlässigen und nur die Normalspannungen infolge des Biegemoments zu berücksichtigen.

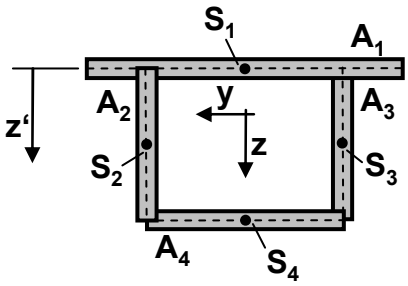
Die **Querkraft verursacht die Schubspannung infolge Querkraft**. Mit den in der Vorlesung gewählten Annahmen ist sie über der Querschnittsfläche konstant. Die maximale Schubspannung infolge Querkraft erhält man im Bereich der maximalen Querkraft Q_{max} an der Position x = 12m. Da im Balken keine Torsion auftritt, ist sie die einzige Schubspannung. Auch Sie kann in die Querschnittsfläche eingezeichnet werden.

$$\sigma_{\max Schub} = \sigma_{Schub,Querkraft} = \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{2000}{1600} = 1.25\frac{N}{mm^2}$$



Im Verhältnis zu den Normalspannungen ist die Schubspannung infolge der Querkraft sehr klein. Außer bei sehr kurzen Balken tritt dies immer ein. Daher kann häufig die Schubspannung infolge Querkraft vernachlässigt werden.

<u>Lösungen Aufgabe 35:</u>



Zuerst wird das Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Querschnitts berechnet. Dazu wird die Gesamtquerschnittsfläche in vier Teilflächen zerlegt. Für die Berechnung des Gesamtflächenmittelpunktes wird auf Höhe der oberen Profilmittellinie der Ursprung des Bezugskoordinatensystem z' gewählt.

$A_1 = B_1 H_1 = 700 \cdot 2 = 1400 mm^2$ und $z'_{S1} = 0$

$A_2 = A_3 = B_2 H_2 = 2 \cdot 300 = 600 mm^2$ und $z'_{S2} = z'_{S3} = 150 mm$

$A_4 = B_4 H_4 = 400 \cdot 2 = 800 mm^2$ und $z'_{S4} = 300 mm$ (B_i: Breite, H_i: Höhe)

Die Flächen A_2 und A_3 verhalten sich bei der Berechnung identisch. Statt den Werten für die Fläche A_3 können die Werte der Fläche A_2 zweimal verwendet werden.

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + 2A_2 + A_4}\left(A_1 z'_{S1} + 2A_2 z'_{S2} + A_4 z'_{S4}\right)$$

$$= \frac{1}{1400 + 2 \cdot 600 + 800}\left(1400 \cdot 0 + 2 \cdot 600 \cdot 150 + 800 \cdot 300\right) = 123.5 mm$$

Flächenträgheitsmoment:

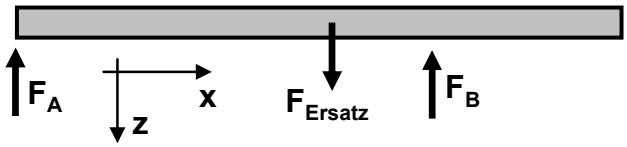
$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1\left(z'_{S1} - z'_S\right)^2 + 2\frac{B_2 H_2^3}{12} + 2A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2\left(z'_{S2} - z'_S\right)^2$$

$$= \frac{700 \cdot 2^3}{12} + 1400(0 - 123.5)^2 + 2\frac{2 \cdot 300^3}{12} + 2 \cdot 600(150 - 123.5)^2 + \frac{400 \cdot 2^3}{12} + 800(300 - 123.5)^2$$

$$= 466\frac{2}{3} + 21353150 + 2 \cdot 4500000 + 2 \cdot 421350 + 266\frac{2}{3} + 24921800 = 56118383\frac{1}{3} \approx 56.1 \cdot 10^6 mm^4$$

Der Balken wird frei geschnitten und die Streckenlast durch die Ersatzkraft $F_{Ersatz,}$ ersetzt. Diese greift bei x = 3.5m an.

$F_{Ersatz} = qL = 40 \cdot 7 = 280kN$



Gleichgewichtbedingungen:

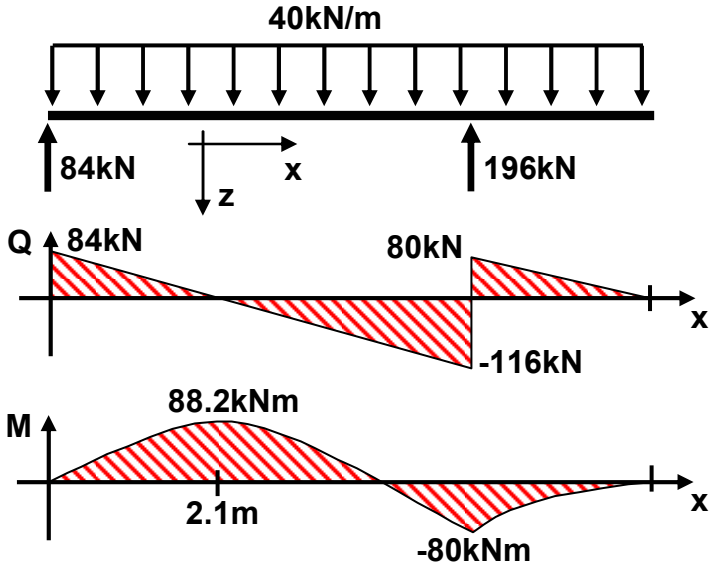
$\sum M|_A = 0: \quad -3.5F_{Ersatz} + 5F_B = -3.5 \cdot 280 + 5F_B = 0 \quad => \quad F_{Kz} = 196kN$

$\sum F_x = 0:$ es wirken keine Kräfte in x-Richtung

$\sum F_z = 0: \quad -F_A + F_{Ersatz} - F_B = -F_A + 289 - 196 = 0 \quad => \quad F_A = 84N$

Innere Kräfte und Momente:

Es wirken keine Kräfte in x-Richtung. Das Moment hat ein Maximum bei x =2.1m und ein Minimum bei x = 5m.



Im Balken sind nur **Normalspannungen infolge des Biegemoments** vorhanden. Allerdings ist die Querschnittsfläche des Balkens nicht symmetrisch zur y-Achse. Daher gilt nicht automatisch, dass an der Stelle des größten Betrages des Momentes auch die betragsmäßig größten Spannungen wirken. Daher müssen die Normalspannungen am Ort des Maximums des Momentes M_{max} = 88.2kNm und am Ort des Minimums des Momentes M_{min} = -80kNm untersucht werden. Die an beiden Positionen gefundenen maximalen Beträge stellen die Maximalspannungen (Zug– und Druckspannungen) im Bauteil dar.

Position 1, $x = 2.1m$:

$$\sigma_{Biegemoment,1}(z) = \frac{M_{\max}}{I_y} z = \frac{88.2 \cdot 10^6}{56.1 \cdot 10^6} z = 1.57z$$

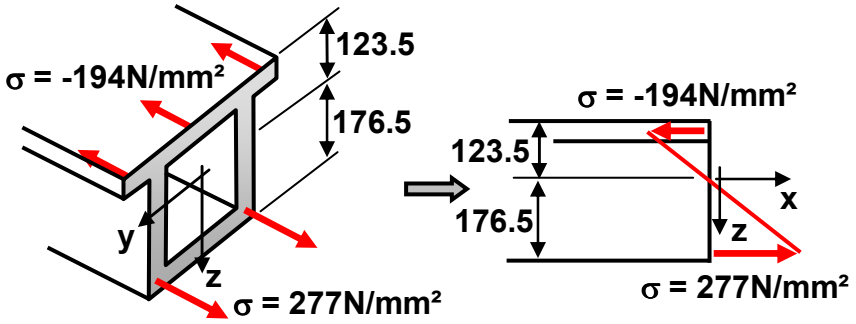
Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein positiver z-Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte positive Wert beträgt z = 176.5mm. Dabei wird berücksichtigt, dass das Profil dünnwandig ist. Man nimmt an, dass bei dünnwandigen Profilen sich die Spannung über der Wandstärke kaum bzw. nicht ändert. Dann gilt, dass auf den Außenflächen des Profils die gleichen Spannungswerte wie auf der Profilmittellinie wirksam sind. Daher ist es zulässig, die z-Koordinaten der Profilmittellinie einzusetzen. An der Unterseite sind die maximalen Zugspannungen.

$$\sigma_{\max Zug,Biegemoment,1} = \sigma_{Biegemoment,1}(z = 176.5) = 1.57 \cdot 176.5 = 277 \frac{N}{mm^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein negativer z-Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der betragsmäßig größte negative Wert lautet z = -123.5mm. Auch hier wird die Dünnwandigkeit ausgenutzt. An der Oberseite des Balkens sind die maximalen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max Druck,Biegemoment,1} = \sigma_{Biegemoment,1}(z = -123.5) = 1.57 \cdot (-123.5) = -194 \frac{N}{mm^2}$$

Die Ergebnisse kann man über der Querschnittsfläche darstellen. Da die Spannungen linear von z abhängig sind, kann man die Extremwerte an Ober und Unterseite mit einer Geraden verbinden und erhält den Verlauf der Spannungen an der Position 1, x = 2.1m.



Position 2, $x = 5m$:

$$\sigma_{Biegemoment,2}(z) = \frac{M_{\min}}{I_y} z = \frac{-80.0 \cdot 10^6}{56.1 \cdot 10^6} z = -1.43z$$

Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein negativer z-Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte negative Wert beträgt z = -123.5mm. An der Oberseite sind die maximalen Zugspannungen.

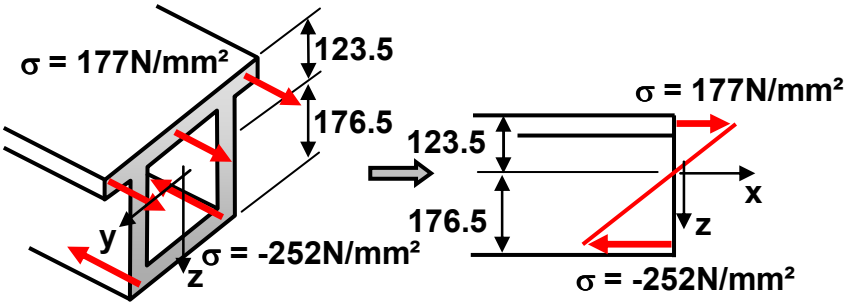
$$\sigma_{\max Zug,Biegemoment,2} = \sigma_{Biegemoment,2}(z = -123.5) = -1.43 \cdot (-123.5) = 177 \frac{N}{mm^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein positiver z-Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der

betragsmäßig größte positive Wert lautet z = 176.5mm. An der Oberseite des Balkens sind die maximalen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max Druck,Biegemoment,1} = \sigma_{Biegemoment,2}(z = 176.5) = -1.43 \cdot 176.5 = -252 \frac{N}{mm^2}$$

Wieder wird der Spannungsverlauf über dem Querschnitt dargestellt.

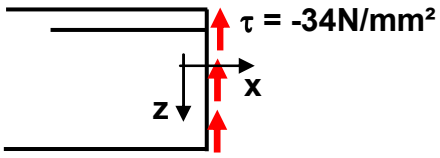


Maximale Zug- und Druckspannungen im Bauteil:

$$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment,1} = -252 \frac{N}{mm^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{\max Zug} = \sigma_{\max Zug,Biegemoment1} = 277 \frac{N}{mm^2}$$

Die **Querkraft verursacht die Schubspannung infolge Querkraft**. Es wird angenommen, dass Sie über dem Querschnitt konstant ist, Den maximalen Betrag der Schubspannung infolge Querkraft erhält man im Bereich der betragsmäßig größten Querkraft Q_{min} = -116kN an der Position x = 5m. Da im Balken keine Torsion auftritt, ist sie die einzige Schubspannung. Auch Sie kann in die Querschnittsfläche eingezeichnet werden. Sie zeigt in Richtung der negativen z-Richtung und hat den Betrag 34N/mm².

$$\sigma_{\min Schub} = \sigma_{Schub,Querkraft} = \frac{Q_{\min}}{A} = \frac{Q_{\min}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{-116000}{3400} = -34 \frac{N}{mm^2}$$



<u>Lösungen Aufgabe 36:</u>

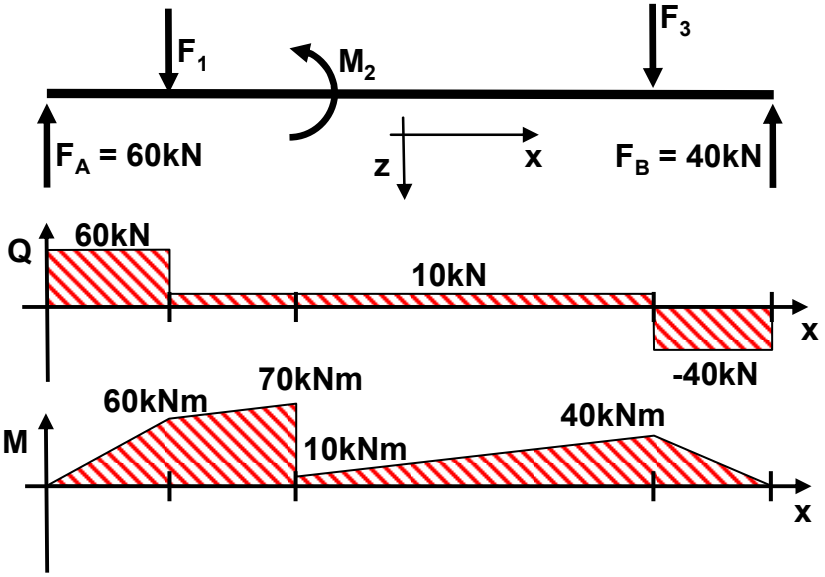
Die Lagerkräfte ersetzen die Lager und werden mit den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt.

$\sum F_x = 0$: keine Kräfte in x-Richtung

$\sum M\big|_A = 0$: $-1 \cdot F_1 + M_2 - 5F_3 + 6F_B = -1 \cdot 50 + 60 - 5 \cdot 50 + 6F_B = 0$ => $F_B = 40kN$

$\sum F_y = 0$: $-F_A + F_1 + F_2 - F_B = -F_A + 50 + 50 - 40 = 0$ => $F_A = 60kN$

Innere Kräfte und Momente:



Mit i = 1,2 (erster und zweiter Wellenabschnitt) lautet das Flächenträgheitsmoment für die kreisrunde Vollwelle:

$$I_{y,i} = \frac{\pi}{4} R_i^4 = \frac{\pi}{64} D_i^4$$ (R_i: Radius, D_i: Durchmesser)

Am Außenradius $R_i = D_i/2$ erhält man die maximalen Spannungen.

$$\sigma_{\max,i} = \frac{M_{\max,i}}{I_y} \frac{D_i}{2} = \frac{32 M_{\max,i}}{\pi D_i^3}$$

Aufgelöst nach dem Durchmesser D_i erhält man mit $\sigma_{\max,1} = \sigma_{\max,2} = \sigma_{\max} = 150 N/mm^2$:

$$D_i = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max,i}}{\pi \sigma_{\max}}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \sigma_{\max}}} \sqrt[3]{M_{\max,i}} = 0.408 \sqrt[3]{M_{\max,i}}$$

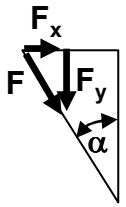
1. Wellenabschnitt (auf ganze Zahlen aufgerundet):

$$M_{\max,1} = 70 kNm = 70 \cdot 10^6 Nmm \quad => \quad D_1 = 0.408 \sqrt[3]{70 \cdot 10^6} = 169 mm$$

2. Wellenabschnitt (auf ganze Zahlen aufgerundet):

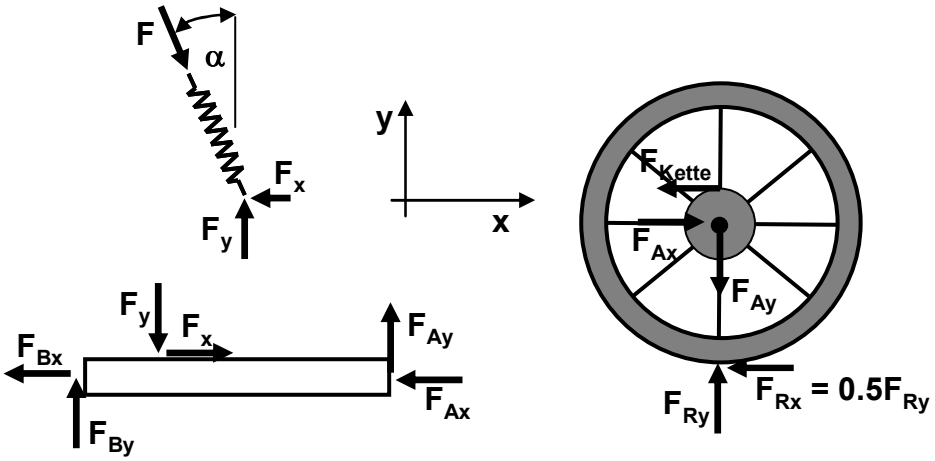
$$M_{\max,2} = 40 kNm = 40 \cdot 10^6 Nmm \quad => \quad D_2 = 0.408 \sqrt[3]{40 \cdot 10^6} = 140 mm$$

Lösungen Aufgabe 37:



Die frei geschnittenen Bauteile ergeben das dargestellte Schnittbild. Federn können nur Kräfte in Federrichtung übertragen. Das bedeutet, dass am unteren Ende der Feder auch die Kraft F wirksam sein muss. Man zerlegt die obere und untere Kraft F in ihre waagrechten und senkrechten Komponenten. Kräftedreieck und geometrisches Dreieck sind winkelgleich (kongruent).

$\frac{F_x}{F} = \sin\alpha = 0.6$ => $F_x = 0.6F$ und $\frac{F_y}{F} = \cos\alpha = 0.8$ => $F_y = 0.8F$



b.) An der Schwinge werden die Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet.

$\sum M\big|_A = 0: \quad 5LF_{Ay} - LF_y = 5LF_{Ay} - 0.8LF = 0$ => $F_{Ay} = 0.16F$

$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - F_y + F_{Ay} = F_B - 0.8F + 0.16F = 0$ => $F_{By} = 0.64F$

$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} + F_x - F_{Ax} = -F_{Bx} + 0.6F - F_{Ax} = 0$ => keine konkrete Aussage

Mit der bekannten Kraft F_{Ay} betrachtet man die Gleichgewichtsbedingungen am Rad.

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + F_{Ry} = -0.16F + F_{Ry} = 0$ => $F_{Ry} = 0.16F$

=> $F_{Rx} = 0.5F_{Ry} = 0.08F$

$\sum M\big|_A = 0: \quad R_2 F_{Kette} - R_1 F_{Rx} = 0$ => $F_{Kette} = \frac{R_1}{R_2} F_{Rx} = 5 \cdot 0.08F = 0.4F$

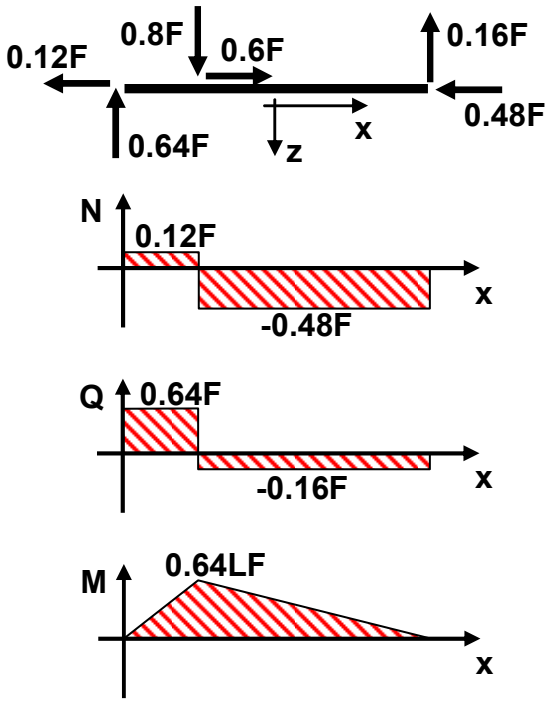
c.) Das verbleibende Kräftegleichgewicht in x-Richtung am Rad wird noch ausgewertet.

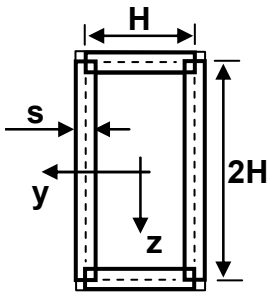
$\sum F_x = 0: \quad -F_{Kette} - F_{Rx} + F_{Ax} = -0.4F - 0.08F + F_{Ax} = 0$ => $F_{Ax} = 0.48F$

Mit F_{Ax} wechselt man zurück zur Schwinge und wertet das jetzt aussagefähige Kräftegleichgewicht in x-Richtung aus.

$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} + F_x - F_{Ax} = -F_{Bx} + 0.6F - F_{Ax} = 0$ => $F_{Bx} = 0.12F$

Innere Kräfte und Momente in der Schwinge:





d.) Für die Berechnung der Spannungen wird die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment benötigt. Das dünnwandige Rechteck wird in vier Teilflächen zerlegt. Die Querschnittsfläche beträgt dann:
$A = 2 \cdot s2H + 2 \cdot Hs = 6Hs$

Für das Flächenträgheitsmoment gilt:

$$I_y = 2\frac{s(2H)^3}{12} + 2\frac{Hs^3}{12} + 2 \cdot H^2 Hs = \frac{10}{3}H^3 s + \underbrace{\frac{1}{6}Hs^3}_{\approx 0} = \frac{10}{3}H^3 s$$

Dabei ist berücksichtigt, dass bei dünnwandigen Profilen s << H gilt und somit der Term Hs^3 vernachlässigbar klein gegenüber dem Term H^3s ist.

Am Punkt x = L hat man das größte Biegemoment. Da die Normalkraft bei x < L unterschiedlich zu x > L ist, muss man beide Fälle betrachten. Position 1 liegt ein „kleines Stück“ vor x = L, Position 2 liegt ein „kleines Stück“ hinter x = L. An beiden Positionen wirkt ungefähr das maximale Moment.

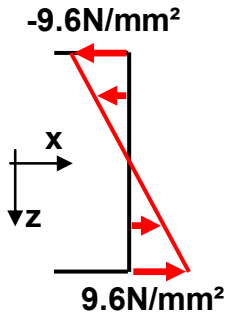
Position 1:

Zuerst werden die **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet:

$$\sigma_{Biegemoment,1}(z) = \frac{M_{\max}}{I_y} z = \frac{0.64FL}{\frac{10}{3}H^3 s} z = 0.192\frac{FL}{H^3 s} z = 0.192\frac{F\frac{H}{2}}{H^3 s} z = 0.096\frac{F}{H^2 s} z$$

Die maximalen Zugspannungen sind positiv, daher muss für z der größte mögliche positive z-Wert eingesetzt werden. Mit z = H befindet man sich an der Unterseite der Schwinge. Dabei

ist wieder die Dünnwandigkeit des Bleches berücksichtigt. Über die kleine Wandstärke kann die Spannung näherungsweise konstant betrachtet werden. Daher ist es ausreichend die Spannung auf der Profilmittellinie zu berechnen.

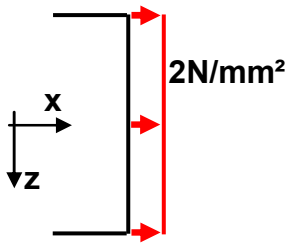


$$\sigma_{\max Zug,Biegemoment,1} = \sigma_{Biegemoment,1}(z=H) = 0.096\frac{F}{sH} = 0.096\cdot 100 = 9.6\frac{N}{mm^2}$$

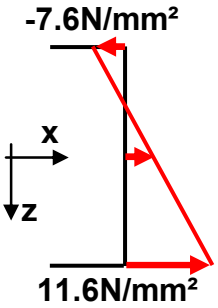
Die maximalen Druckspannungen infolge Biegemoment findet man dann an der Oberseite der Schwinge bei z = -H.

$$\sigma_{\max Druck,Biegemoment,1} = \sigma_{Biegemoment,1}(z=-H) = -0.096\frac{F}{sH} = -0.096\cdot 100 = -9.6\frac{N}{mm^2}$$

Auch die **Normalkraft erzeugt eine Normalspannung**.



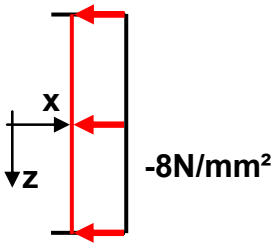
$$\sigma_{Normalkraft,1} = \frac{N}{A} = \frac{0.12F}{6Hs} = 0.02\frac{F}{sH} = 0.02\cdot 100 = 2\frac{N}{mm^2}$$



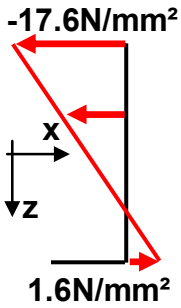
Die Normalspannungsverteilung, die im Querschnitt anzutreffen ist, setzt sich aus der Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannung infolge Normalkraft zusammen. Man findet an der Unterseite die maximalen Zugspannungen 11.6N/mm² und an der Oberseite die maximalen Druckspannungen -7.6N/mm².

Position 2:

Die **Normalspannungen infolge Biegemoment** sind identisch zu jenen an der Position 1. Für die **Normalspannungen infolge Normalkraft** erhält man:



$$\sigma_{Normalkraft,2} = \frac{N}{A} = \frac{-0.48F}{6Hs} = -0.08\frac{F}{sH} = -0.08\cdot 100 = -8\frac{N}{mm^2}$$



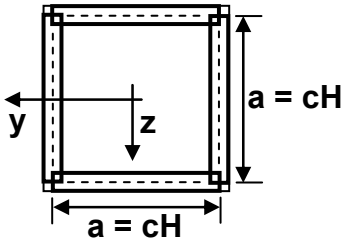
Wieder gilt, dass die Normalspannungsverteilung, die im Querschnitt anzutreffen ist, sich setzt aus der Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannung infolge Normalkraft zusammensetzt. Man findet an der Unterseite die maximalen Zugspannungen 1.6N/mm² und an der Oberseite die maximalen Druckspannungen -17.6N/mm².

Maximale Zug- und Druckspannungen in der Gesamtschwinge:

Die maximalen Zugspannungen findet man an der Unterseite an Position 1, die maximalen Druckspannungen an der Oberseite bei Position 2.

$$\sigma_{\max Zug} = \sigma_{\max Zug,Biegemoment,1} + \sigma_{Normalkraft,1} = 11.6\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment,2} + \sigma_{Normalkraft,2} = -17.6\frac{N}{mm^2}$$



e.) Bei der Verwendung des quadratischen Profils, soll sich der maximale Spannungsbetrag ($\sigma_{max,Druck}$ = -17.6N/mm²) nicht ändern. Zuerst werden Querschnittsfläche und Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Quadrats berechnet. Dazu wird dieses in vier Rechtecke zerlegt.

$$A = 4 \cdot as = 4as$$

$$I_y = 2\frac{sa^3}{12} + 2\frac{as^3}{12} + 2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 as = \frac{2}{3}a^3 s + \underbrace{\frac{1}{6}as^3}_{\approx 0} = \frac{2}{3}a^3 s$$

Betrachtet wird die maximale Druckspannung an der Oberseite (z = -a/2) der Position 2:

$$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment,2} + \sigma_{Normalkraft,2} = \frac{0.64FL}{\frac{2}{3}a^3 s}\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{0.48F}{4as} = -17.6\frac{N}{mm^2}$$

In dieser Gleichung wird L durch H/2 und a durch cH ersetzt. Die Einheiten werden gekürzt.

$$\frac{0.64F\frac{H}{2}}{\frac{2}{3}(cH)^3 s}\left(-\frac{cH}{2}\right) - \frac{0.48F}{4cHs} = -0.24\frac{F}{sH}\frac{1}{c^2} - 0.12\frac{F}{sH}\frac{1}{c} = \frac{-0.24\cdot 100}{c^2} - \frac{0.12\cdot 100}{c} = \frac{-24}{c^2} - \frac{12}{c} = -17.6$$

Die resultierende Gleichung wird mit c² multipliziert, und alle Terme werden auf die linke Seite gebracht. Die quadratische Gleichung wird mit der Mitternachtsformel gelöst.

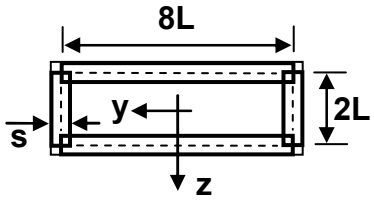
$$17.6c^2 - 12c - 24 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 17.6(-24)}}{2\cdot 17.6} = \frac{12 \pm 42.82}{35.2}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{12 + 42.82}{35.2} = 1.56 \qquad \text{und} \qquad c_2 = \frac{12 - 42.82}{35.2} = -0.88$$

Die mathematische Lösung c_2 ist physikalisch nicht sinnvoll. Das bedeutet, dass eine Kantenlänge a = c_1H =1.56H gewählt werden muss.

<u>Lösungen Aufgabe 38:</u>



a.) Für die Berechnung der Querschnittsfläche, des Flächenträgheitsmoment und der Spannungen ist es zulässig, die oberen Flanken zusammen zu schieben. Es resultiert ein dünnwandiges Rechteck. Dies ergibt eine Querschnittsfläche A:

$$A = 2\cdot s2L + 2\cdot 8Ls = 20Ls = 20\cdot 180\cdot 10 = 36000mm^2$$

Für das Flächenträgheitsmoment gilt:

$$I_y = 2\frac{s(2L)^3}{12} + 2\frac{8Ls^3}{12} + 2\cdot L^2 8Ls = 17\frac{1}{3}L^3 s + \underbrace{\frac{4}{3}Ls^3}_{\approx 0} = 17\frac{1}{3}L^3 s = 17\frac{1}{3}\cdot 180^3\cdot 10 = 1.011\cdot 10^9 mm^4$$

Maximale Normalspannungen am Ort des maximalen Biegemoments:
Zuerst werden die maximalen **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet.

$$\sigma_{Biegemoment}(z) = \frac{M(x=15)}{I_y} z = \frac{51450 \cdot 10^3}{1.011 \cdot 10^9} z = 0.0509z$$

An der Unterseite erhält man die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\max Zug,Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z=180) = 9.16 \frac{N}{mm^2}$$

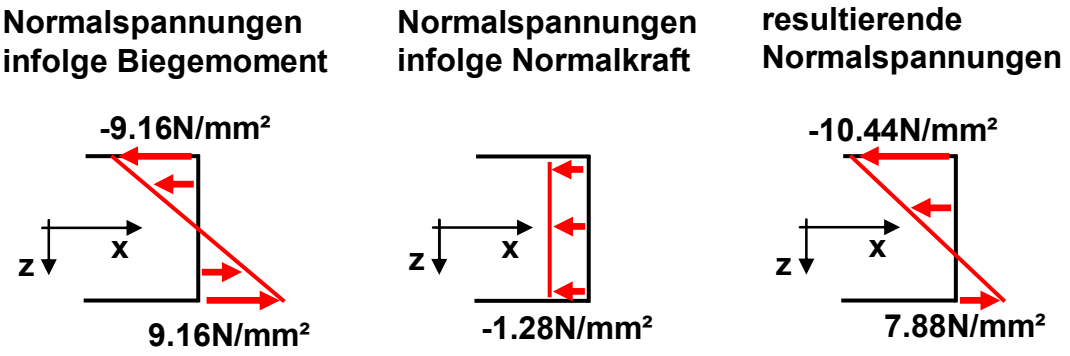
An der Oberseite erhält man die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\max Druck,Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z=-180) = -9.16 \frac{N}{mm^2}$$

Auch die **Normalkraft erzeugt Normalspannungen**.

$$\sigma_{Normalkraft} = \frac{N}{A} = \frac{-46200}{36000} = -1.28 \frac{N}{mm^2}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalkraft ergibt die im Bauteil anzutreffenden Normalspannungen.



Andere Querschnitte müssen nicht untersucht werden. Ein lokales Spannungsmaximum erreicht man noch bei x = 4.23m. Im Bereich der maximalen Normalkraft ist dort das Biegemoment maximal. Der Betrag des Biegemoments geht ungefähr auf ein Viertel zurück. Daraus ergeben sich Normalspannungen infolge des Biegemoments von ca. einem Viertel von 9.16N/mm². Obwohl sich die Normalkraft ungefähr verdoppelt und dadurch auch verdoppelte Normalspannungen in folge der Normalkraft resultieren, sind die überlagerten Spannungswerte bei x = 4.23m kleiner als bei x = 15m.

Somit betragen die maximalen Zugspannungen des Bauteils 7.88N/mm² und die maximalen Druckspannungen -10.44N/mm².

b.) Die Wandstärke s wird bei der Berechnung der Querschnittsfläche A und des Flächenträgheitsmoments I_y linear berücksichtigt. Bei der Bestimmung der Spannungen werden Querschnittsfläche A und Flächenträgheitsmoment durch die Faktoren 1/A (Normalspannungen infolge Normalkraft) und $1/I_y$ (Normalspannungen infolge des Biegemoments) berücksichtigt. Dadurch kann man die Abhängigkeit der Normalspannungen von der Wandstärke s angeben. (c_i: Proportionalitätsfaktoren)

$$\sigma = \frac{c_1^*}{I_y} + \frac{c_3^*}{A} = \frac{c_1^*}{c_2 s} + \frac{c_3^*}{c_4 s} = \underbrace{\frac{c_1^*}{c_2}}_{c_1} \frac{1}{s} + \underbrace{\frac{c_3^*}{c_4}}_{c_2} \frac{1}{s} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s} = \frac{1}{s} \underbrace{(c_1 + c_2)}_{c} = \frac{c}{s}$$

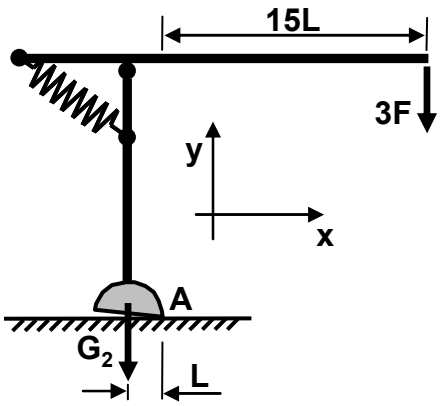
Aus diesem Zusammenhang erkennt man, dass Normalspannung mal Wandstärke eine Konstante c darstellt.

$\sigma s = c$ => $\sigma_{Wandstärke1} s_1 = c = \sigma_{Wandstärke2} s_2$

Hat man bei der vorgegebenen Wandstärke s_1 = 10mm den maximalen Spannungsbetrag $\sigma_{Wandstärke1}$ = 10.44N/mm² erhalten, errechnet man für den vorgegebenen Spannungsbetrag $\sigma_{Wandstärke2}$ = 5N/mm² die nun notwendig Wandstärke s_2.

$$s_2 = \frac{\sigma_{Wandstärke1}}{\sigma_{Wandstärke2}} s_1 = \frac{10.44}{5} 10 = 20.88mm$$

<u>Lösungen Aufgabe 39:</u>



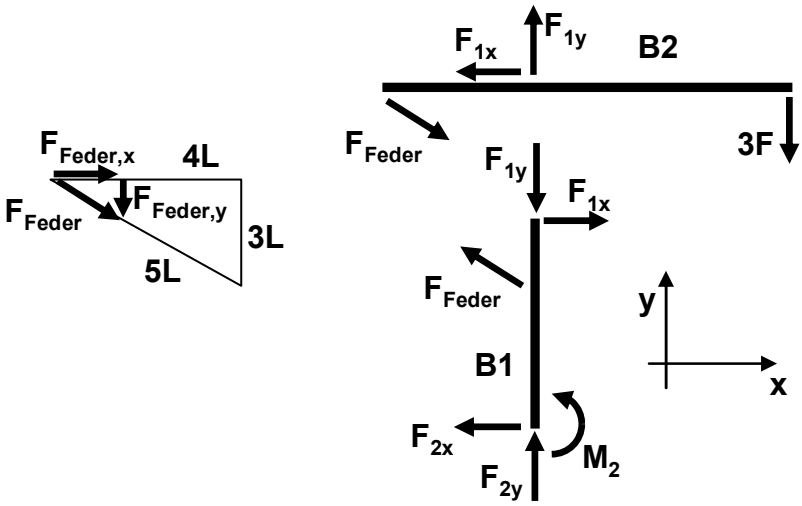
a.) Wenn die Lampe kippt, fällt sie nach rechts. Dabei hebt der Lampenfuß bis auf den Kontaktpunkt A vom Boden ab. Daraus kann man das gesuchte Stabilitätskriterium ableiten.

$\sum M\big|_A = 0: \quad LG_2 - 15L \cdot 3F = 0$

=> $G_2 = 45F = 45N$

Die Gewichtskraft des Lampenfußes muss mindestens 45N betragen.

b.) Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente wird die Lampe wie dargestellt frei geschnitten. Der Lampenfuß wird durch zwei Kräfte F_{2x} und F_{2y} und das Moment M_2 ersetzt.



Die Federkraft F_{Feder} wird mit Hilfe des geometrischen Dreiecks in ihre Komponenten zerlegt.

$$\frac{F_{Feder,x}}{F_{Feder,y}} = \frac{4L}{3L} = \frac{4}{3} \quad => \quad F_{Feder,x} = \frac{4}{3} F_{Feder,y}$$

Zur Berechnung der Schnittkräfte wird zuerst der Balken B2 betrachtet.

$\sum M\big|_1 = 0: \quad 4LF_{Feder,y} - 16L \cdot 3F = 4LF_{Feder,y} - 48LF = 0 \quad => \quad F_{Feder,y} = 12F$

=> $F_{Feder,x} = \frac{4}{3} F_{Feder,y} = \frac{4}{3} 12F = 16F$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{Feder,y} + F_{1y} - 3F = -12F + F_{1y} - 3F = 0 \quad => \quad F_{1y} = 15F$

$\sum F_x = 0: \quad F_{Feder,x} - F_{1x} = 16F - F_{1x} = 0 \quad => \quad F_{1x} = 16F$

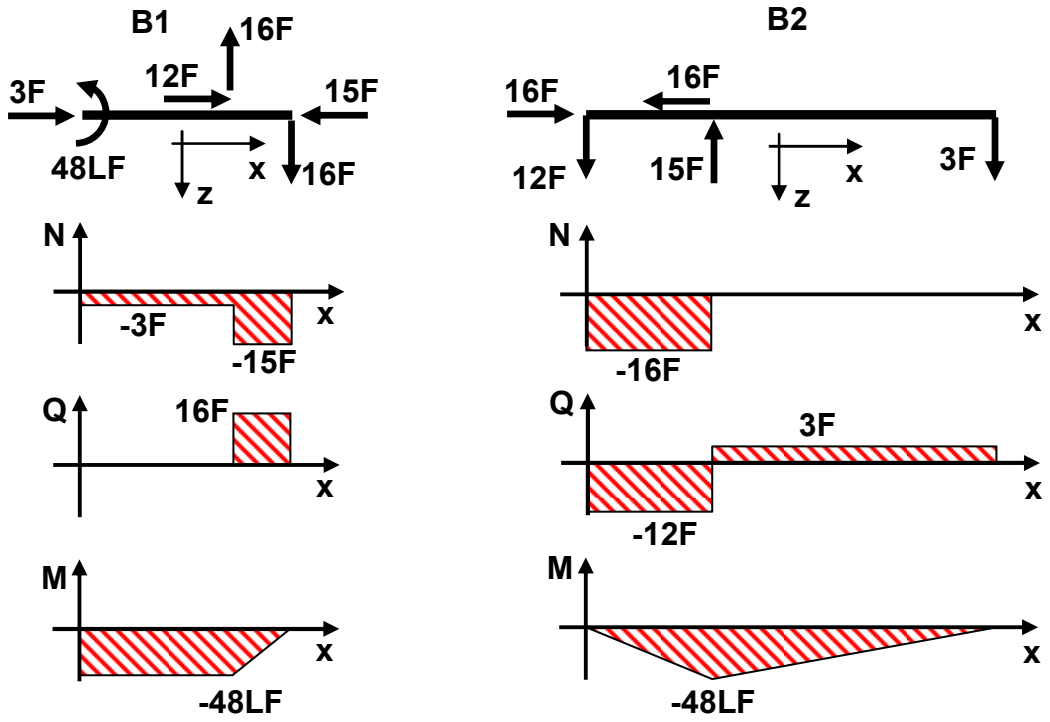
Gleichgewichtsbedingungen am Balken B1:

$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} + F_{Feder,y} - F_{1x} = F_{2y} + 12F - 15F = 0 \quad => \quad F_{2y} = 3F$

$\sum F_x = 0: \quad -F_{2x} - F_{Feder,x} + F_{1x} = -F_{2x} - 16F + 16F = 0 \quad => \quad F_{2x} = 0$

$\sum M\big|_2 = 0: \quad M_2 + 7LF_{Feder,x} - 10LF_{1x} = M_2 + 7L \cdot 16F - 10L \cdot 16F = 0 \quad => \quad M_2 = 48LF$

Innere Kräfte und Momente:



c.) Der Betrag des größten Biegemoments beträgt M_{max} = 48LF. Für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments benötigt man das Flächenträgheitsmoment des kreisrunden, dünnwandigen Profils.

$I_y = \pi R_m^3 s$

Für die Ermittlung des gesuchten Radius R_m werden M_{max}, I_y und die maximal zulässige Spannung σ_{zul} = 10N/mm² in die Formel für die Berechnung der Normalspannung infolge des Biegemoments eingesetzt.

$$\sigma_{zul} = \frac{M_{\max}}{I_y} R_m = \frac{48LF}{\pi R_m^3 s} R_m = \frac{48LF}{\pi R_m^2 s}$$

$$=> \quad R_m = \sqrt{\frac{48LF}{\pi \sigma_{zul} s}} = \sqrt{\frac{48}{\pi \sigma_{zul}}} \sqrt{\frac{LF}{s}} = \sqrt{\frac{48}{\pi 10}} \sqrt{\frac{50 \cdot 1}{1}} = 8.74mm$$

d.) Für die Normalspannungen infolge Normalkraft wird der maximale Betrag der Normalkraft bei gleichzeitigem maximalen Betrag des Moments gewählt.

$N_{\max} = 16F$

Die Querschnittsfläche beträgt:

$$A = 2\pi R_m s$$

Daraus ermittelt man den maximalen Betrag der Normalspannung infolge Normalkraft.

$$\sigma_{Normalkraft} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{16F}{2\pi R_m s} = \frac{8F}{\pi R_m s} = \frac{8 \cdot 1}{\pi \cdot 8.74 \cdot 1} = 0.29 \frac{N}{mm^2}$$

Der maximale Betrag der Normalspannungen σ_{max} ist die Überlagerung der Normalspannung infolge des Biegemoments und der Normalkraft. Da Biegemoment und Normalkraft negativ sind, sind die maximalen Spannungen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{zul} + \sigma_{Normalkraft} = 10 + 0.29 = 10.29 \frac{N}{mm^2}$$

d.) Die Gesamtfederkraft lautet:

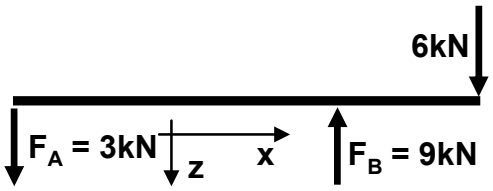
$$F_{Feder} = \sqrt{F_{Feder,x}^2 + F_{Feder,y}^2} = \sqrt{(16F)^2 + (12F)^2} = 20F$$

Zwischen der Verlängerung Δx = 10mm der Feder und der Federkraft F_{Feder} gilt mit der Federkonstanten c folgender Zusammenhang:

$$F_{Feder} = c\Delta x \quad => \quad c = \frac{F_{Feder}}{\Delta x} = \frac{20F}{\Delta x} = \frac{20 \cdot 1}{10} = 2 \frac{N}{mm}$$

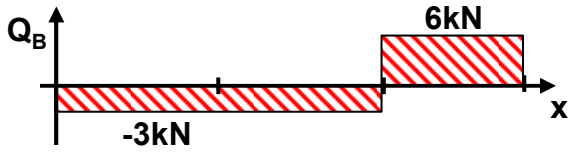
Lösungen Aufgabe 40:

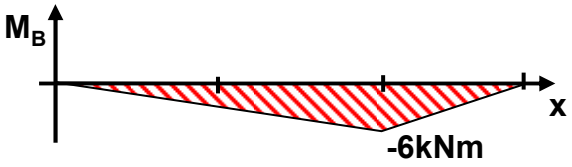
Geometrie 1:



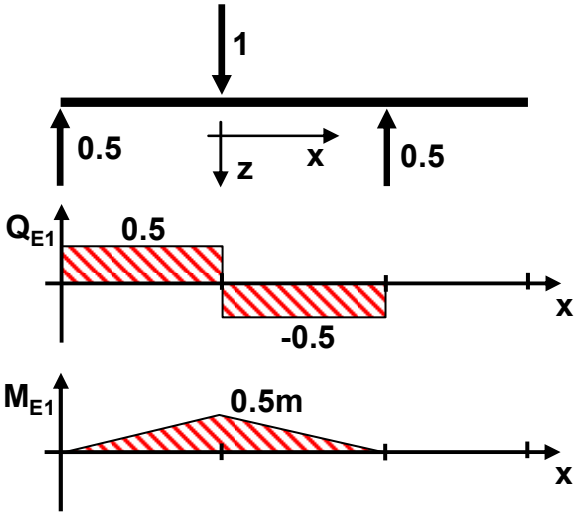
Berechnung der inneren Kräfte und Momente infolge der äußeren Kraft 6kN:

$$\sum M\big|_A = 0: \quad 2F_B - 3\cdot 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_B = 9kN$$
$$\sum F_z = 0: \quad F_A - F_B + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_A = 3kN$$
$$\sum F_x = 0: \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung}$$





Berechnung der Verschiebung u_1:



An der zu untersuchenden Stelle 1 wird die Kraft 1 in Richtung von u_1 angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

$$\sum M\big|_A = 0: \quad 2F_B - 1\cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_B = 0.5$$
$$\sum F_z = 0: \quad -F_A - F_B + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_A = 0.5$$
$$\sum F_x = 0: \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung}$$

Mit Hilfe von Integraltafeln wird die Verschiebung u1 berechnet. Dazu muss der Balken in zwei Abschnitte der Länge 2L und L zerlegt werden. Im ersten Abschnitt hat das Moment M_B einen Dreiecksverlauf und das Moment M_{E1} den Verlauf eines Daches. Im zweiten Abschnitt ist das Moment M_{B1} konstant null. Daher trägt dieser Abschnitt nichts zur Verschiebung u_1 bei. Alle Größen werden in N und mm umgewandelt.

$$u_1 = \underbrace{\int_{2L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt1} + \underbrace{\int_{L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt3} = \frac{1}{EI_y}\left(\int_{2L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + 0\right)$$

$$= \frac{1}{15\cdot 10^{10}}\left(\frac{\left(-6\cdot 10^6\right)\cdot\left(0.5\cdot 10^3\right)\cdot 2\cdot 10^3}{4}\right) = \frac{-1.5\cdot 10^{12}}{1.5\cdot 10^{11}} = -10mm$$

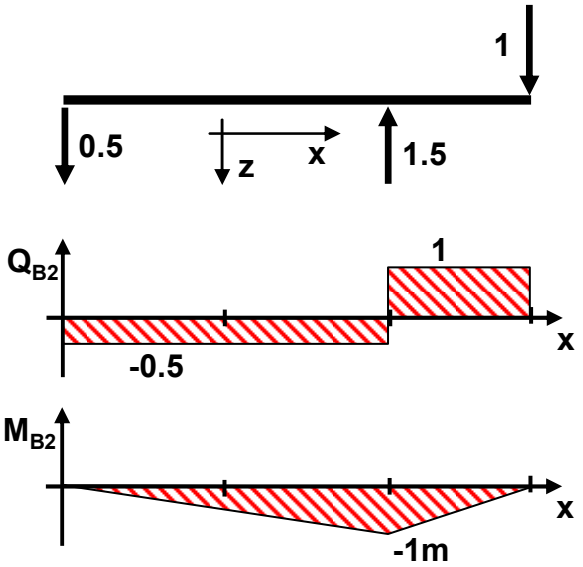
Am Punkt 1 geht der Balken um 10mm nach oben (negatives Vorzeichen).

Alternativ kann der Gesamtbalken auch in drei Abschnitte der Länge L zerlegt werden. Dann erhält man im ersten Abschnitt Dreieck mit Dreieck mit gleicher Seite, im zweiten Abschnitt Dreieck mit Trapez und der dritte Abschnitt ist wieder null mit Dreieck und trägt dadurch nichts zur Verschiebung u_1 bei.

$$u_1 = \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 1} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 2} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 3} = \frac{1}{EI_y}\left(\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + 0\right)$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}}\left(\frac{\left(-3 \cdot 10^6\right) \cdot \left(0.5 \cdot 10^3\right) \cdot 10^3}{3} + \frac{\left(0.5 \cdot 10^3\right) \cdot 10^3 \left(2 \cdot \left(-3 \cdot 10^6\right) + \left(-6 \cdot 10^6\right)\right)}{6}\right) = -10mm$$

Berechnung der Verschiebung u_2:



Für die Berechnung der Verschiebung u_2 muss an der Stelle 2 eine Kraft 1 in Richtung der Verschiebung u_2 angebracht werden. Da das Bauteil ursprünglich nur mit einer äußeren Kraft 6kN belastet wird, die Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft 6kN gesucht ist, können die Schaubilder Q_{B2} und M_{B2} direkt aus den Schaubilder Q_E und M_E ermittelt werden, indem in den Ausgangsschaubildern alle Größen durch 6kN geteilt werden.

Für die Integration mit den Integrationstafeln kann der Gesamtbalken als ein Integrationsintervall bzw. Abschnitt betrachtet werden. Beide Funktionen M_B und M_{E2} haben dabei den Verlauf eines Daches. Alle Größen werden wieder in N und mm umgewandelt.

$$u_2 = \int_{3L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_{3L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx$$

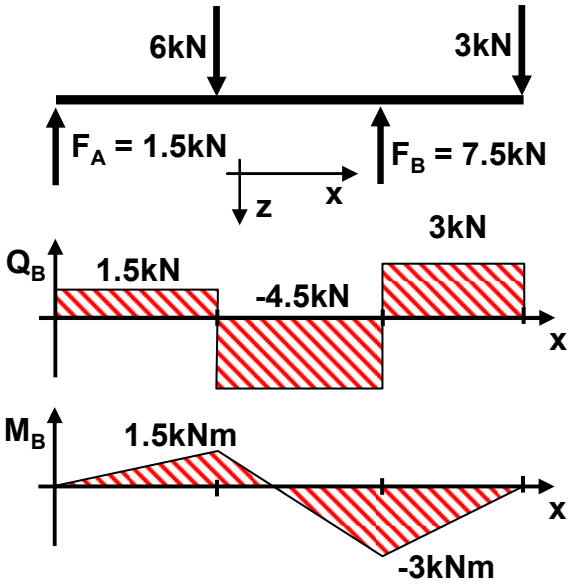
$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}}\left(\frac{\left(-6 \cdot 10^6\right) \cdot \left(-1 \cdot 10^3\right) \cdot 3 \cdot 10^3}{3}\right) = \frac{6 \cdot 10^{12}}{1.5 \cdot 10^{11}} = 40mm$$

Am Punkt 2 verbiegt sich der Balken um 40mm nach unten.

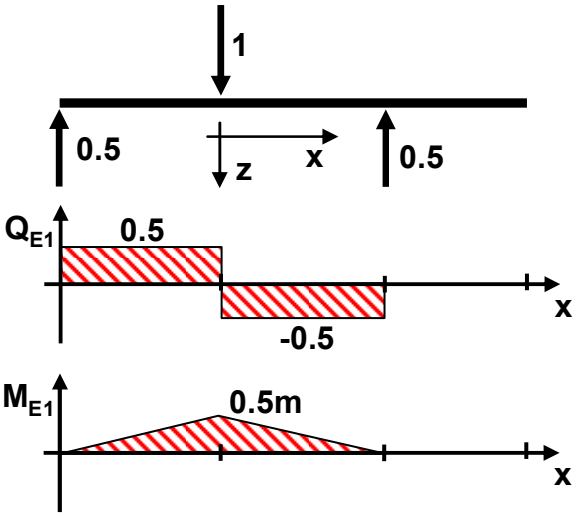
Geometrie 2:

Berechnung der inneren Kräfte und Momente infolge der äußeren Kräfte 6kN und 3kN:

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -1\cdot 6 + 2F_B - 3\cdot 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_B = 7.5kN$$
$$\sum F_z = 0: \quad -F_A + 6 - F_B + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_A = 1.5kN$$
$$\sum F_x = 0: \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung}$$



Berechnung der Verschiebung u_1:



An der zu untersuchenden Stelle 1 wird die Kraft 1 in Richtung von u_1 angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

Die daraus resultierende Belastung ist identisch zu der Belastung bei der Berechnung von u_1 an der Geometrie 1. Daher können de dort gewonnenen Schaubilder für Q_{E1} und M_{E1} übernommen werden.

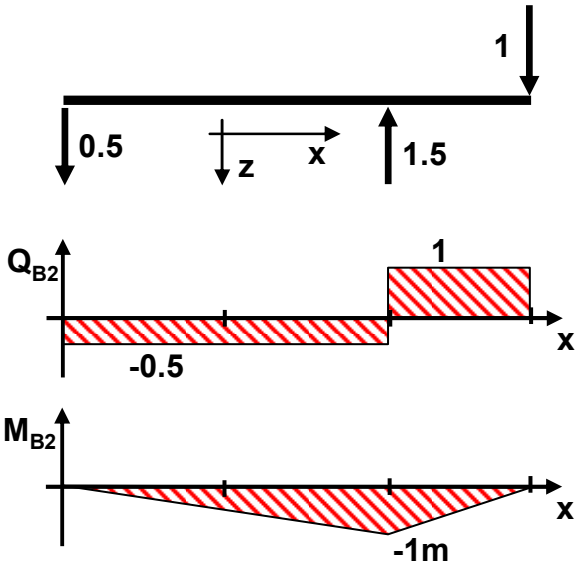
Der Balken wird in drei Abschnitte bzw. Integrationsintervalle der Länge L zerlegt. Im ersten Abschnitt erhält man zwei Dreiecksverläufe, im zweiten einen Dreiecksverlauf und einen trapezförmigen Verlauf. Im dritten Abschnitt ist M_{E1} konstant null. Somit trägt der dritte Abschnitt nichts zur Berechnung der Verschiebung u_1 bei.

$$u_1 = \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y}dx}_{Abschnitt1} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y}dx}_{Abschnitt2} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y}dx}_{Abschnitt3} = \frac{1}{EI_y}\left(\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y}dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y}dx + 0\right)$$

$$= \frac{1}{15\cdot 10^{10}}\left(\frac{\left(1.5\cdot 10^6\right)\cdot\left(0.5\cdot 10^3\right)\cdot 10^3}{3} + \frac{\left(0.5\cdot 10^3\right)\cdot 10^3\left(2\cdot\left(1.5\cdot 10^6\right)+\left(-3\cdot 10^6\right)\right)}{6}\right) = \frac{5}{3}mm$$

Der Punkt 1 senkt sich um 1.67mm ab.

Berechnung der Verschiebung u_2:



An der zu untersuchenden Stelle 2 wird die Kraft 1 in Richtung von u_2 angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

Die daraus resultierende Belastung ist identisch zu der Belastung bei der Berechnung von u_2 an der Geometrie 1. Daher können de dort gewonnenen Schaubilder für Q_{E2} und M_{E2} übernommen werden.

Der Balken wird in drei Abschnitte bzw. Integrationsintervalle der Länge L zerlegt. Im ersten Abschnitt erhält man zwei Dreiecksverläufe. Im zweiten Abschnitt ergeben sich zwei trapezförmige Verläufe. Im dritten Abschnitt existieren wieder zwei Dreiecksverläufe.

$$u_1 = \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 1} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 2} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{Abschnitt 3}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \frac{\left(1.5 \cdot 10^6\right) \cdot \left(-0.5 \cdot 10^3\right) \cdot 10^3}{3}$$

$$+ \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left(+ \frac{10^3 \left(\left(1.5 \cdot 10^6\right)\left(2\left(-0.5 \cdot 10^3\right) + \left(-10^3\right)\right) + \left(-3 \cdot 10^6\right)\left(2\left(-10^3\right) + \left(-0.5 \cdot 10^3\right)\right)\right)}{6} \right)$$

$$+ \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \frac{\left(-3 \cdot 10^6\right) \cdot \left(-10^3\right) \cdot 10^3}{3}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left(-0.25 \cdot 10^{12} + 0.75 \cdot 10^{12} + 10^{12}\right) = 10mm$$

Der Balken verbiegt sich and er Stelle 2 um 10mm nach unten.

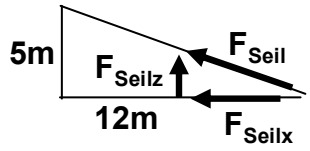
<u>Lösungen Aufgabe 41:</u>

Für die Berechnung der Absenkung des Kraftangriffspunktes benötigt man die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment des Balkens. Dazu zerlegt man die Querschnittsfläche in drei Teilflächen, wobei die oberen beiden Flansche identisch sind.

$$A = 8 \cdot 196 + 2 \cdot 100 \cdot 12 = 3968 mm^2$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 196^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{100 \cdot 12^3}{12} + 104^2 \cdot 1200 \right) = 31006890 = 3.1 \cdot 10^7 mm^4$$

Für die Berechnung der Lagerkräfte, der inneren Kräfte und Momente wird der Balken frei geschnitten. Das Seil wird durch die Seilkraft F_{Seil} und das Balkenlager durch zwei Lagerkräfte ersetzt. Mit Hilfe des Kräftedreiecks und eines geometrischen Dreiecks können die waagrechte und senkrechte Komponente der Seilkraft ermittelt werden.



$$\frac{F_{Seilx}}{F_{Seilz}} = \frac{12}{5} \quad => \quad F_{Seilx} = \frac{12}{5} F_{Seilz}$$

$$F_{Seil} = \sqrt{F_{Seilx}^2 + F_{Seilz}^2}$$

$$\sum M\big|_A = 0: \quad -18 \cdot 5 + 12 F_{Seilz} = 0$$

$$=> \quad F_{Seilz} = 7.5kN$$

$$=> \quad F_{Seilx} = \frac{12}{5} F_{Seilz} = 18kN$$

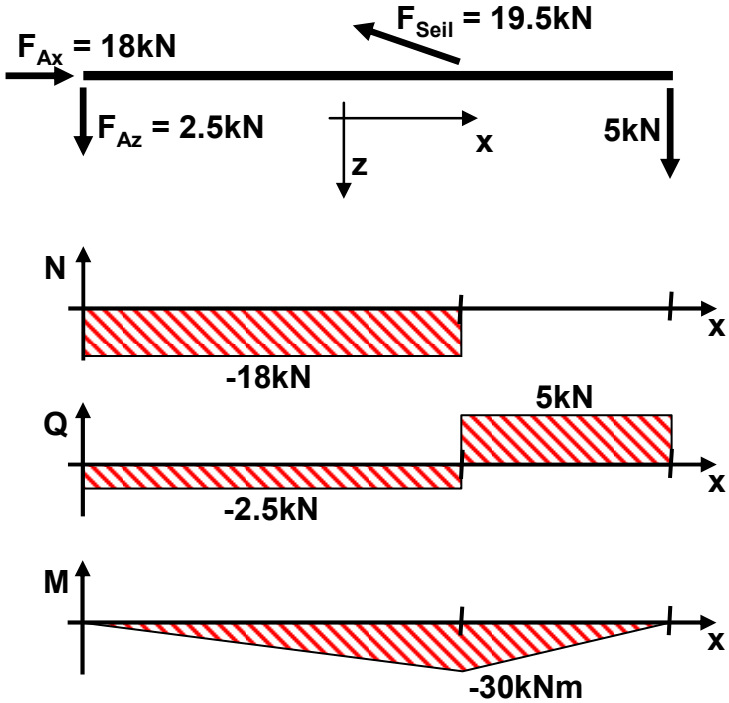
$$=> \quad F_{Seil} = \sqrt{F_{Seilx}^2 + F_{Seilz}^2} = 19.5kN$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Seilx} = 0$$

$$=> \quad F_{Ax} = 18kN$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Seilz} + 5 = 0$$

$$=> \quad F_{Az} = 2.5kN$$



Für die Berechnung der senkrechten Absenkung des Kraftangriffspunktes, muss dort eine Kraft vom Betrag 1 angebracht werden. Dadurch resultiert eine Belastung des Bauteils, die bis auf den Faktor 5kN identisch ist zur ursprünglichen Belastung. Daher sind auch die bekannten Schaubilder N_E, Q_E und M_E bis auf den Faktor 5kN identisch mit den Schaubildern N, Q und M. Sie müssen nicht neu berechnet werden, sondern können aus den bekannten Schaubildern übernommen werden, indem man in den bekannten Schaubildern alle Größen durch 5kN teilt.

Es muss berücksichtigt werden, dass sich der Kraftangriffspunkt nicht nur durch die Balkenverformung, sondern auch durch die Verlängerung des Seiles absenkt. Dafür kann das Seil wie ein Zugstab mit den Seilkräften F_{Seil} = 19.5kN und F_{SeilE} = 19.5kN/5kN = 3.9 betrachtet werden. Für die Integration wird die Seillänge L_{Seil} benötigt.

$$L_{Seil} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13m$$

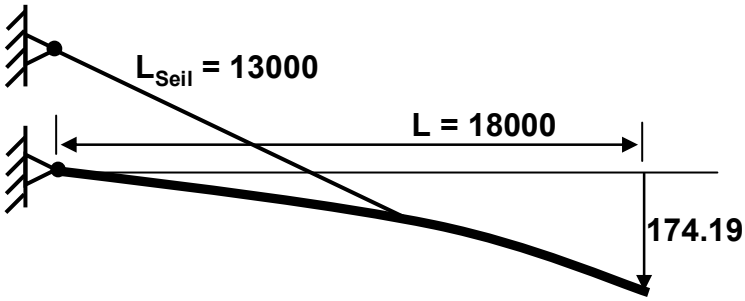
Das Biegemoment im Balken wird durch zwei dachförmige Verläufe über den ganzen Balken berücksichtigt. Alle Größen werden in N und mm umgerechnet. Für die Absenkung u des Kraftangriffspunktes gilt mit der Balkenlänge L = 18m:

$$u = \underbrace{\int_L \frac{MM_E}{EI_y} dx}_{Biegemoment,Balken} + \underbrace{\int_{\frac{2}{3}L} \frac{NN_E}{EA} dx}_{Normalkraft,Balken} + \underbrace{\int_{L_{Seil}} \frac{F_{Seil} F_{SeilE}}{EA_{Seil}} dx}_{Normalkraft,Seil} = \frac{1}{EI_y} \int_L MM_E dx + \frac{NN_E}{EA} \frac{2L}{3} + \frac{F_{Seil} F_{SeilE}}{EA_{Seil}} L_{Seil}$$

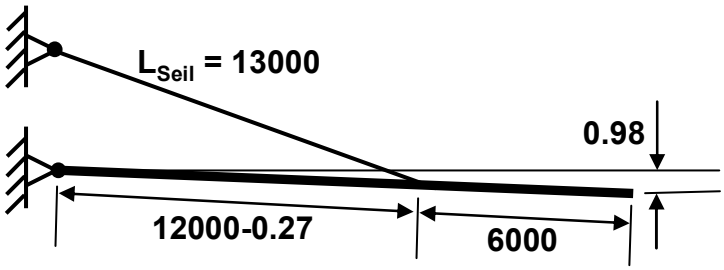
$$= \frac{1}{200000 \cdot 3.1 \cdot 10^7} \frac{(-30 \cdot 10^6)(-6 \cdot 10^3) \cdot 18 \cdot 10^3}{3} + \frac{(-18 \cdot 10^3)(-3.6)}{200000 \cdot 3968} \frac{2 \cdot 18 \cdot 10^3}{3} + \frac{19.5 \cdot 10^3 \cdot 3.9}{30 \cdot 10^6} 13 \cdot 10^3$$

$$= 174.19 + 0.98 + 32.96 = 208.13mm$$

Der Kraftangriffspunkt senkt sich um 208mm nach unten ab.

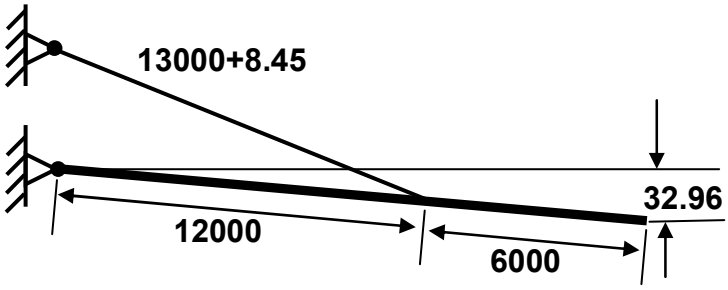


Wäre die Zugsteifigkeit des Balkens und des Seiles unendlich steif ($EA \to \infty$, $EA_{Seil} \to \infty$), würde sich der Balken nur infolge des Biegemoments verbiegen. Die Seillänge L_{Seil} und die waagrechte Balkenlänge L blieben unverändert. Der Fehler, dass der Balken insgesamt länger werden muss, wenn sich der Kraftangriffspunkt infolge des Biegemoments senkrecht absenkt, entsteht durch die Annahmen bei der Herleitung der Berechnungsgleichungen und muss akzeptiert werden.



Wählt man die Biegesteifigkeit ($EI_y \to \infty$) des Balkens und die Zugsteifigkeit ($EA_{Seil} \to \infty$) des Seiles unendlich groß, so würde sich der Kraftangriffspunkt nur durch Verkürzung des Balkens in den ersten beiden Dritteln des Balkens absenken. Der Balken bliebe gerade und das Seil würde seine Ursprungslänge L_{Seil} behalten. Die Verkürzung des Balkens erhält man aus der negativen Normalkraft im Balken, dem Hookeschen Gesetz und der Definition der Dehnung.

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{N}{EA} L = \frac{-18 \cdot 10^3}{200000 \cdot 3968} 12 \cdot 10^3 = -0.27 mm$$

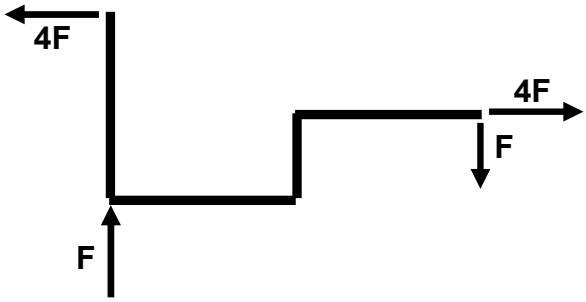


Betrachtet man den Balken als unendlich steif ($EI_y \to \infty$, $EA \to \infty$), so bleibt der Balken unverändert. Trotzdem senkt sich der Kraftangriffspunkt durch die Verlängerung des Seiles ab. Diese Seilverlängerung kann analog zur vorigen Balkenverkürzung berechnet werden.

$$\frac{\Delta L_{Seil}}{L_{Seil}} = \varepsilon_{Seil} = \frac{\sigma_{Seil}}{E_{Seil}} = \frac{F_{Seil}}{EA_{Seil}} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_{Seil} = \frac{F_{Seil}}{EA_{Seil}} L_{Seil} = \frac{19.5 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} 13 \cdot 10^3 = 8.45 mm$$

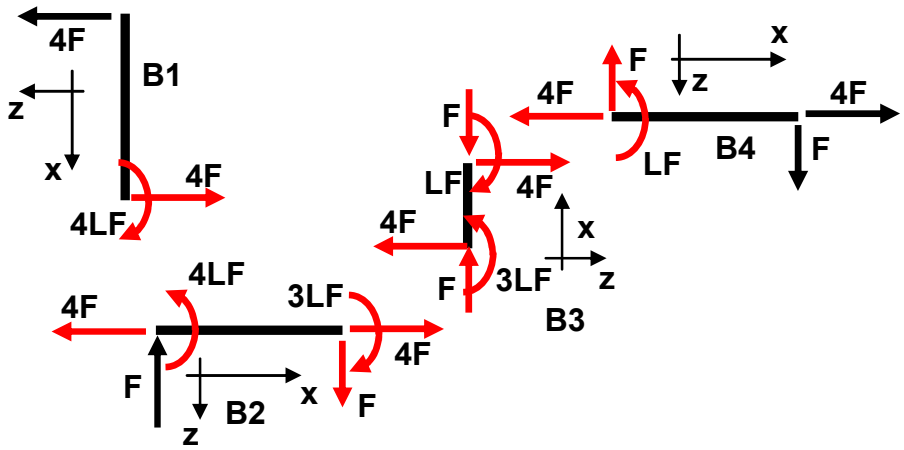
<u>Lösungen Aufgabe 42:</u>

<u>Geometrie 1</u>:

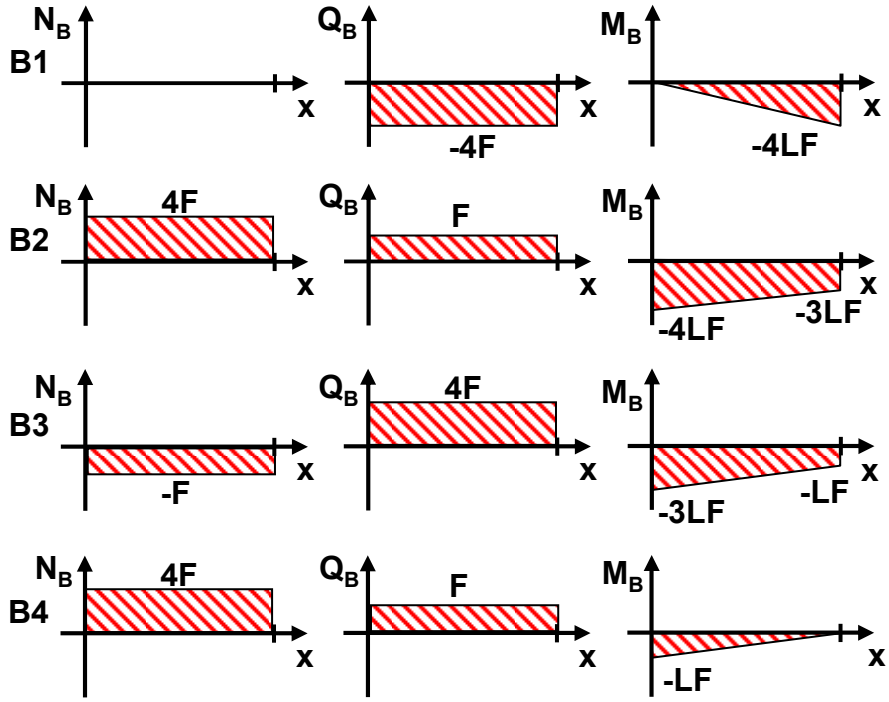


Lagerkräfte durch die Belastungen mit der Kraft F:

Schnittkräfte zwischen den vier Teilbalken B1, B2, B3 und B4 durch die Belastungen mit der Kraft F:

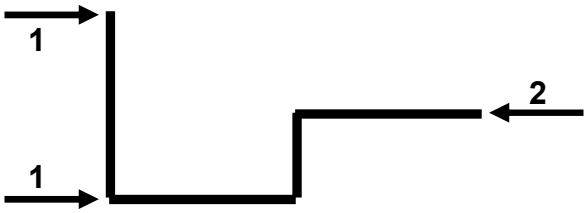


Innere Kräfte und Momente durch die Belastungen mit der Kraft F:



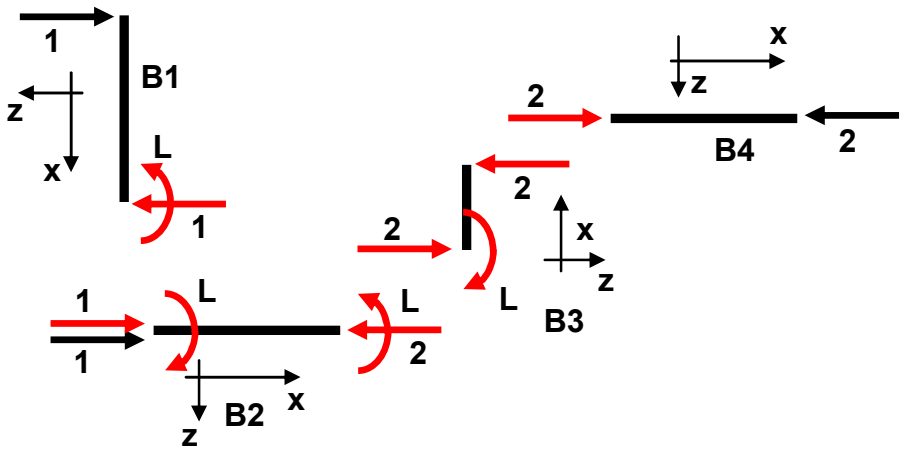
Berechnung der Verschiebung u_1:

An der Kraftangriffsposition muss eine waagrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe N_{E1}, Q_{E1} und M_{E1} ermittelt werden.

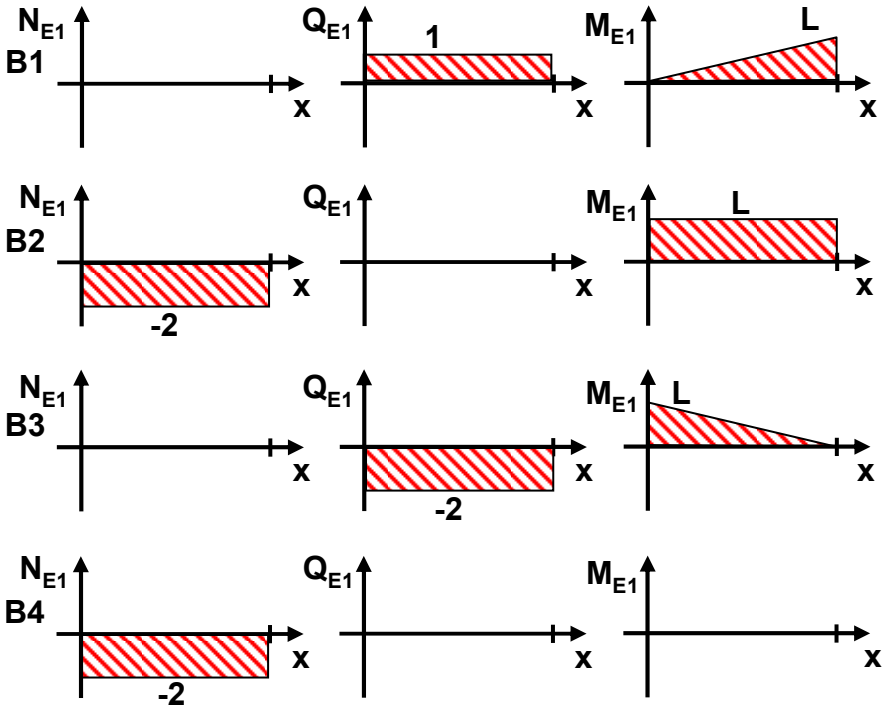


Lagerkräfte infolge Einheitskraft:

Schnittkräfte zwischen den vier Teilbalken B1, B2, B3 und B4 infolge Einheitskraft:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



Verschiebung u_1:

$$u_1 = \frac{1}{EA}\left(4F\cdot(-2)\cdot L + 4F\cdot(-2)\cdot L\right)$$

$$+\frac{1}{EI_y}\left(\frac{(-4LF)L\cdot L}{3} + \frac{L\cdot L((-4LF)+(-3LF))}{2} + \frac{L\cdot\frac{L}{2}(2(-3L)+(-L))}{6}\right)$$

$$= \frac{FL}{EA}(-8-8) + \frac{FL^3}{EI_y}\left(-\frac{4}{3} - \frac{7}{2} + \frac{-\frac{7}{2}}{6}\right) = -16\frac{FL}{EA} - \frac{65}{12}\frac{FL^3}{EI_y}$$

Berechnung der Verschiebung u_2:

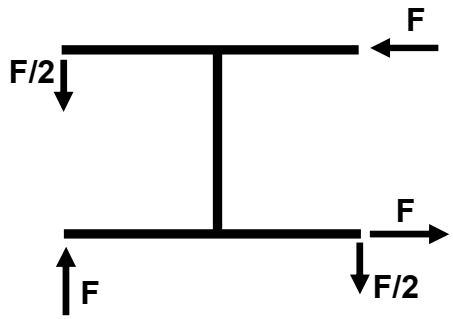
An der Kraftangriffsposition muss eine senkrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe N_{E2}, Q_{E2} und M_{E2} ermittelt werden. Dies können direkt aus N_B, Q_B und M_B ermittelt werden, wenn man in diesen Schaubildern F durch 1 ersetzt.

Verschiebung u_2:

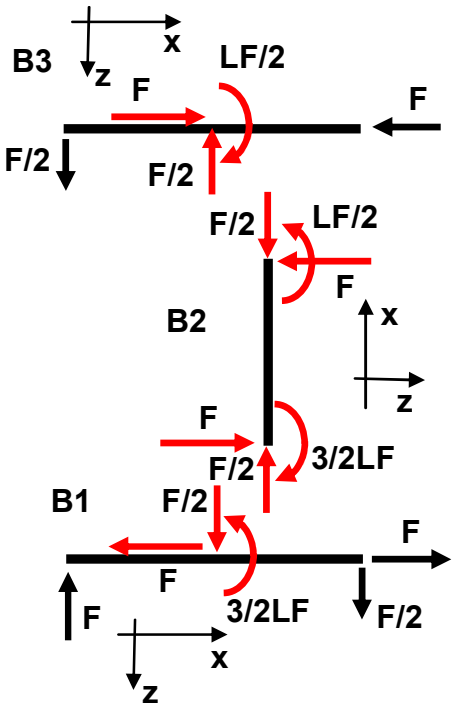
$$w_2 = \frac{1}{EA}\left(4F\cdot 4\cdot L + (-F)(-1)\frac{L}{2} + 4F\cdot 4\cdot L\right)$$
$$+\frac{1}{EI_y}\left(\frac{(-4LF)(-4L)L}{3} + \frac{L[(-4LF)(2(-4L)+(-3L))+(-3LF)(2(-3L)+(-4L))]}{6}\right)$$
$$+\frac{1}{EI_y}\left(\frac{\frac{L}{2}[(-3LF)(2(-3L)+(-L))+(-LF)(2(-L)+(-3L))]}{6} + \frac{(-LF)(-L)L}{3}\right)$$
$$= \frac{FL}{EA}\left(16+\frac{1}{2}+16\right) + \frac{FL^3}{EI_y}\left(\frac{16}{3}+\frac{74}{6}+\frac{13}{6}+\frac{1}{3}\right) = \frac{65}{2}\frac{FL}{EA} + \frac{121}{6}\frac{FL^3}{EI_y}$$

<u>Geometrie 2</u>:

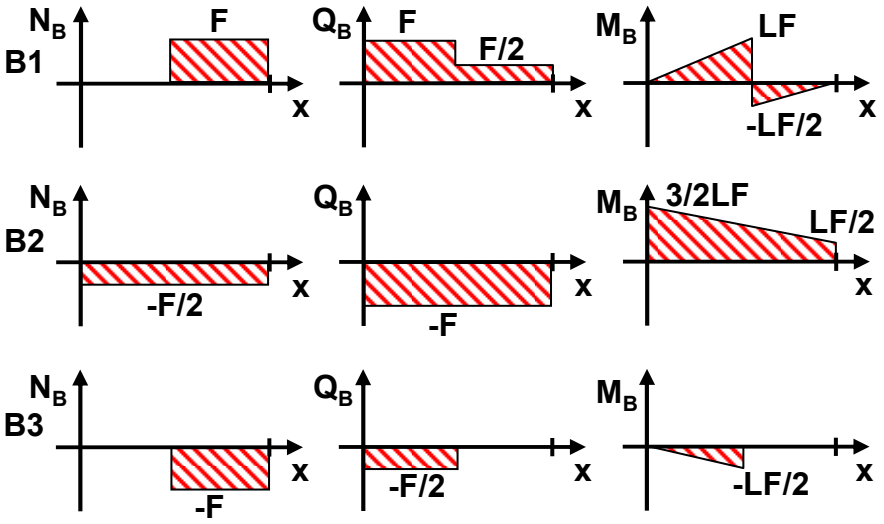
Lagerkräfte durch die Belastungen mit den beiden Kräften F:



Schnittkräfte zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3 durch die Belastungen mit den beiden Kräften F:



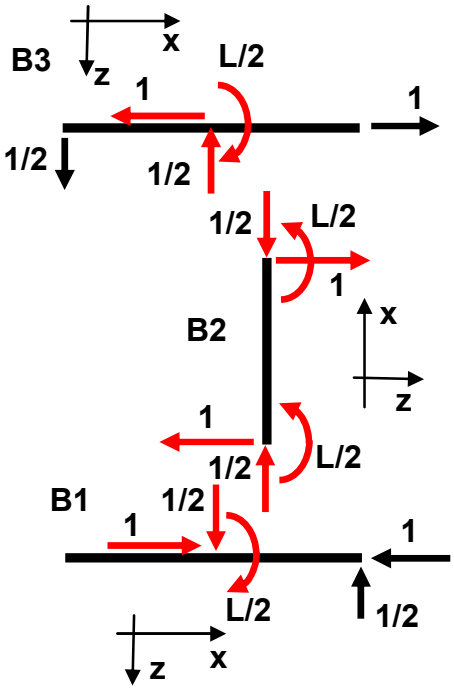
Innere Kräfte und Momente durch die Belastungen mit den beiden Kräften F:



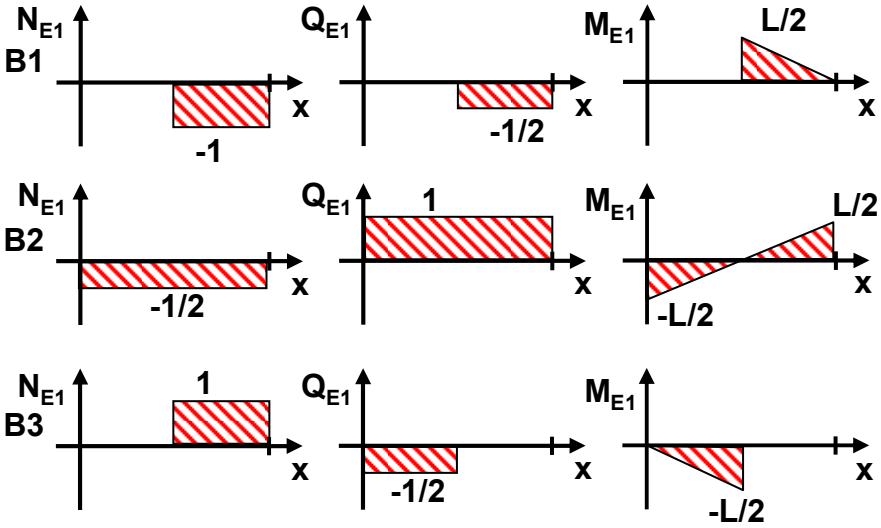
Berechnung der Verschiebung u_1:

An der Position 1 muss eine waagrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe N_{E1}, Q_{E1} und M_{E1} ermittelt werden.

Lagerkräfte und Schnittkräfte infolge der Einheitskraft zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



Verschiebung u_1:

$$u_1 = \frac{1}{EA}\left(F(-1)L + \left(-\frac{F}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)L + (-F)1\cdot L \right)$$

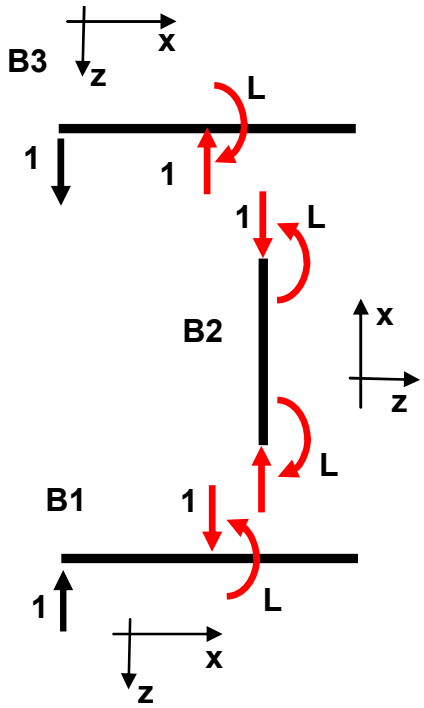
$$+\frac{1}{EI_y}\left(\frac{\left(-\frac{FL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)L}{3} + \frac{L\left[\frac{3LF}{2}\left(2\left(-\frac{L}{2}\right)+\frac{L}{2}\right)+\frac{LF}{2}\left(2\frac{L}{2}+\left(-\frac{L}{2}\right)\right)\right]}{6} + \frac{\left(-\frac{FL}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)L}{3} \right)$$

$$= \frac{FL}{EA}\left(-1+\frac{1}{4}-1\right)+\frac{FL^3}{EI_y}\left(\frac{1}{12}+\frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{6}-\frac{1}{12}\right) = -\frac{7FL}{4EA}-\frac{FL^3}{12EI_y}$$

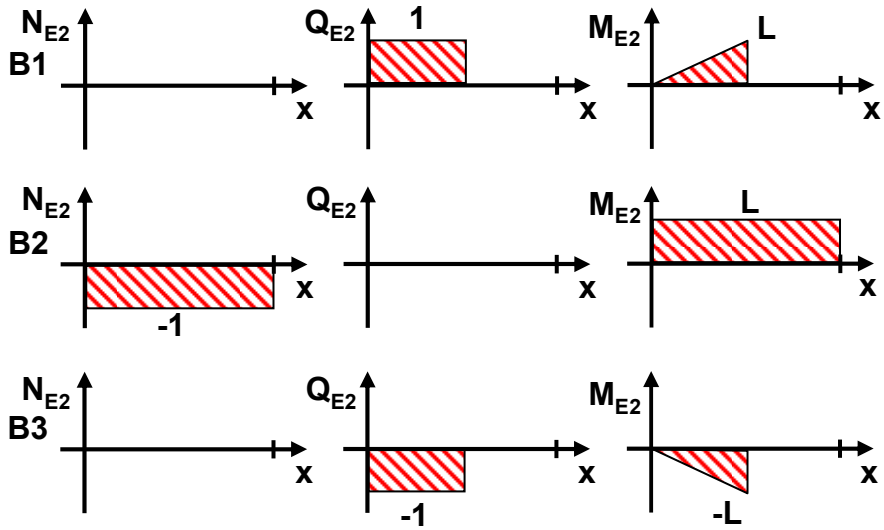
Berechnung der Verschiebung u_2:

An der Position 2 muss eine senkrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe N_{E2}, Q_{E2} und M_{E2} ermittelt werden.

Lagerkräfte und Schnittkräfte infolge der Einheitskraft zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:

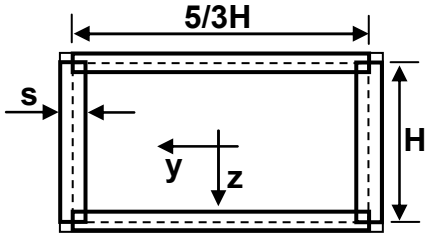


Verschiebung u_2:

$$u_2 = \frac{1}{EA}\left(\left(-\frac{F}{2}\right)(-1)L\right) + \frac{1}{EI_y}\left(\frac{LF\cdot L\cdot L}{3} + \frac{L\cdot L\left(\frac{3LF}{2}+\frac{LF}{2}\right)}{2} + \frac{\left(-\frac{FL}{2}\right)(-L)L}{3}\right)$$

$$= \frac{FL}{EA}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{FL^3}{EI_y}\left(\frac{1}{3}+1+\frac{1}{6}\right) = \frac{FL}{2EA} + \frac{3FL^3}{2EI_y}$$

<u>Lösungen Aufgabe 43:</u>

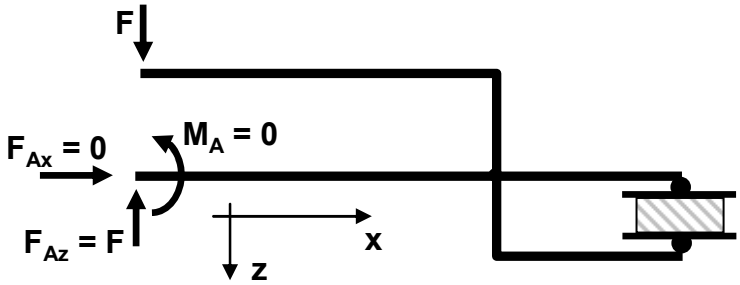


Für die Verschiebungs- und Spannungsberechnung benötigt man die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Profils. Dafür zerlegt man dieses in vier Rechtecke.

$$A = 2\frac{5}{3}Hs + 2sH = \frac{16}{3}Hs$$

$$I_y = 2\frac{\frac{5}{3}Hs^3}{12} + 2\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{5}{3}Hs + 2\frac{sH^3}{12} = \underbrace{\frac{10Hs^3}{36}}_{\approx 0} + H^3 s = H^3 s$$

Begonnen wird mit der Berechnung der Lagerkräfte und des Lagermomentes. Dazu wird die gesamte Presse als ein Bauteil betrachtet.

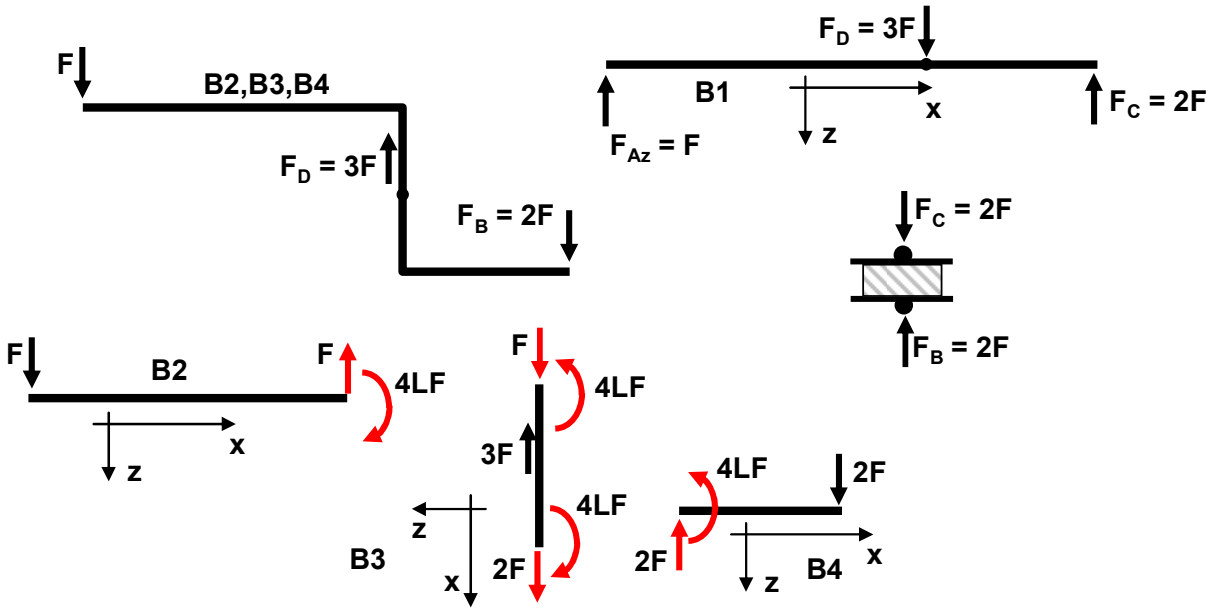


$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z = 0: \qquad -F_{Az} + F = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Az} = F$$

$$\sum M\big|_A = 0: \qquad M_A = 0$$



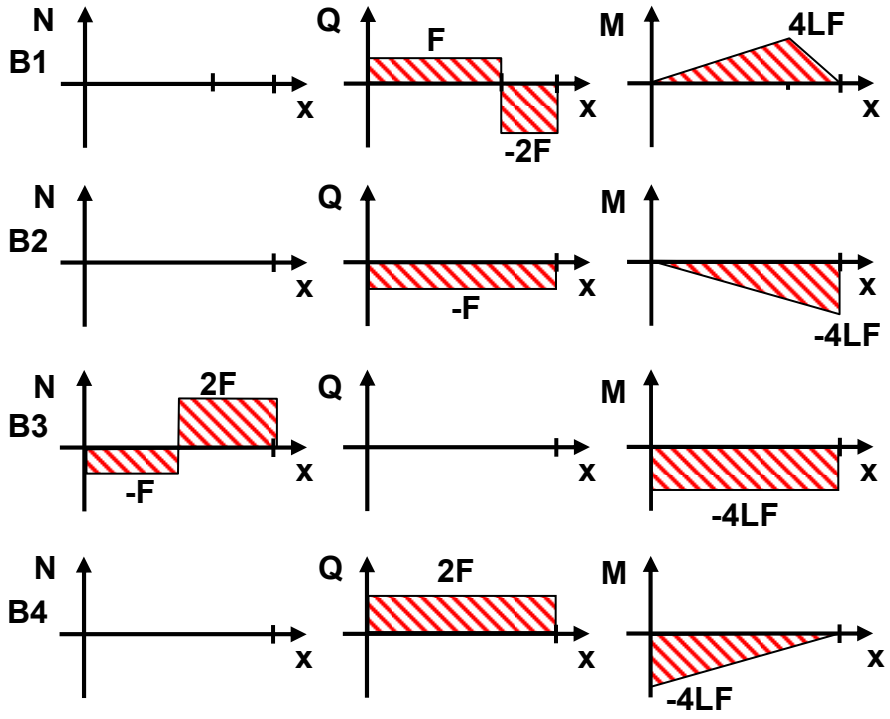
Das Bauteil muss in den Balken B1, in das Werkstück und in das Teilbauteil B2, B3 und B4 zerlegt werden. Da keine waagrechten Kräfte am Bauteil wirksam sind, benötigt man auch keine waagrechten Schnittkräfte.

Betrachtung des Balkens B1:

$$\sum M\big|_D = 0: \quad 2LF_C - 4LF_{Az} = 0 \quad => \quad F_C = 2F$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_D - F_C = 0 \quad => \quad F_D = 3F$$

Das Bauteil B2, B3 und B4 muss wie oben dargestellt in die Teilbalken zerlegt werden. Anschließend können die inneren Kräfte und Momente bestimmt werden.



a.) Für die Berechnung der senkrechten Verschiebung u des Kraftangriffspunktes muss man für die Verläufe infolge Einheitskraft die Kraft F durch die 1 ersetzen. Die Belastung des Bauteils bleibt bis auf den Faktor F identisch. Daher können die Verläufe infolge Einheitskraft direkt aus den Schaubildern infolge der Kraft F ermittelt werden, indem man in diesen die Kraft F durch 1 ersetzt. Für die Verschiebung werden die Normalkraft und das Biegemoment berücksichtigt.

$$u = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{4LF \cdot 4L \cdot 6L}{3} + \frac{(-4LF)(-4L)4L}{3} + (-4LF)(-4L)2L + \frac{(-4LF)(-4L)2L}{3}\right)$$

$$+ \frac{1}{EA}\left((-F)(-1)L + 2F \cdot 2 \cdot L\right)$$

$$= \frac{FL^3}{EI_y}\left(32 + \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{3}\right) + \frac{FL}{EA}(1+4) = 96\frac{FL^3}{EI_y} + 5\frac{FL}{EA} = 96\frac{FL^3}{EH^3 s} + \frac{15}{16}\frac{FL}{EHs}$$

b.) Die maximalen Normalspannungen treten im Teilbalken B3 auf. Die Gleichung für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments in Balken B3 lautet:

$$\sigma_{Biegemoment}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{-4LF}{H^3 s} z$$

Die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem negativen betragsmäßig großen z-Wert:

$$\sigma_{\max Zug,Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}\left(z = -\frac{H}{2}\right) = \frac{-4LF}{H^3 s}\left(-\frac{H}{2}\right) = \frac{2LF}{H^2 s}$$

Die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem positiven betragsmäßig großen z-Wert:

$$\sigma_{\max Druck,Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}\left(z = \frac{H}{2}\right) = \frac{-4LF}{H^3 s}\frac{H}{2} = -\frac{2LF}{H^2 s}$$

Im Balken B3 existiert eine Normalkraft. Die negative Normalkraft in der ersten Balkenhälfte verstärkt die Druckspannungen infolge des Biegemoments. Diese Druckspannungen infolge Normalkraft in der ersten Balkenhälfte erhält man mit:

$$\sigma_{Normalkraft,1} = \frac{N}{A} = \frac{-F}{\frac{16}{3}Hs} = -\frac{3F}{16Hs}$$

In der zweiten Balkenhälfte wirkt eine positive Normalkraft, die eine positive Normalspannung infolge Normalkraft erzeugt.

$$\sigma_{Normalkraft,2} = \frac{N}{A} = \frac{2F}{\frac{16}{3}Hs} = \frac{3F}{8Hs}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge des Biegemoments und Normalkraft ergibt die maximalen Normalspannungen im Bauteil. Die maximalen Zugspannungen sind in der zweiten Hälfte des Balkens B3 und lauten:

$$\sigma_{\max Zug} = \sigma_{\max Zug,Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft,2} = \frac{2LF}{H^2 s} + \frac{3F}{8Hs}$$

Die maximalen Druckspannungen sind in der ersten Hälfte des Balkens B3 und lauten:

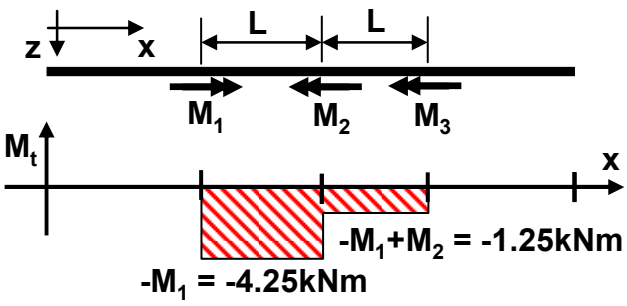
$$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{\max Druck,Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft,1} = -\frac{2LF}{H^2 s} - \frac{3F}{16Hs}$$

Lösungen Aufgabe 44:

An der Welle wirken um die Stabachse (x-Achse) nur die drei Momente M_1, M_2 und M_3.

$$\sum M_x = 0: \quad M_1 - M_2 - M_3 = 4.25kNm - 3kNm - 1.25kNm = 0$$

Dies ergibt folgenden Verlauf des Torsionsmoments.



Das Torsionsflächenträgheitsmoment beträgt:

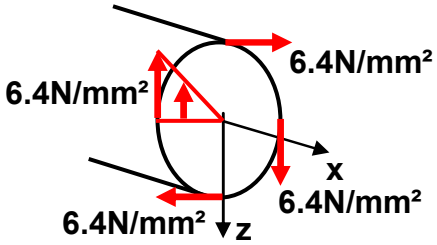
$$I_p = \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{\pi}{32}D^4 = \frac{\pi}{32}150^4 = 4.97 \cdot 10^7\, mm^4$$

Dies ergibt im Abschnitt zwischen Zahnrad 1 und 2 die folgenden Schubspannungen:

$$\tau_{12} = \frac{M_{t12}}{I_p}r = \frac{-M_1}{I_p}r = \frac{-4.25 \cdot 10^6}{4.97 \cdot 10^7}r = -0.0855r$$

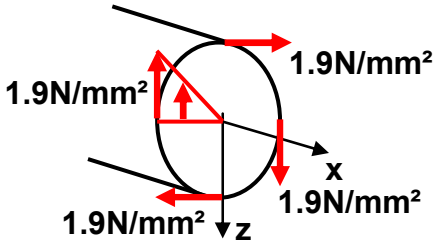
Die betragsmäßig größten Schubspannung ergeben sich zu:

$$\tau_{12,\max} = \tau_{12}\left(r = \frac{D}{2}\right) = -0.0855 \cdot \frac{150}{2} = -6.4\frac{N}{mm^2}$$



Da das Moment negativ ist, sind die Spannungen auch negativ. Im Abschnitt zwischen Zahnrad 2 und 3 lauten die Schubspannungen:

$$\tau_{23} = \frac{M_{t23}}{I_p}r = \frac{-M_1 + M_2}{I_p}r = \frac{-1.25 \cdot 10^6}{4.97 \cdot 10^7}r = -0.025r$$



Die betragsmäßig maximalen Schubspannungen sind:

$$\tau_{23,\max} = \tau_{23}\left(r = \frac{D}{2}\right) = -0.025 \cdot \frac{150}{2} = -1.9\frac{N}{mm^2}$$

Wieder existieren infolge des negativen inneren Moments negative Schubspannungen.

Zahnrad 2 hat gegenüber Zahnrad 1 die Verdrehung

$$\varphi_{12} = \frac{M_{t12}L}{GI_p} = \frac{-M_1 L}{GI_p} = \frac{-4.25 \cdot 10^6 \cdot 1000}{80000 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = -1.07 \cdot 10^{-3}$$

Zahnrad 3 hat gegenüber Zahnrad 2 die Verdrehung

$$\varphi_{23} = \frac{M_{t23}L}{GI_p} = \frac{(-M_1 + M_2)L}{GI_p} = \frac{-1.25 \cdot 10^6 \cdot 1000}{80000 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = -0.31 \cdot 10^{-3}$$

Die Gesamtverdrehung φ_{ges} zwischen Zahnrad 1 und 3 erhält man aus

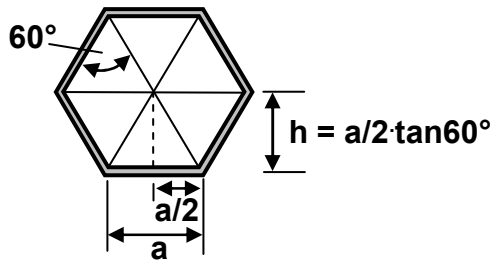
$$\varphi_{ges} = \varphi_1 + \varphi_2 = -1.07 \cdot 10^{-3} - 0.31 \cdot 10^{-3} = -1.38 \cdot 10^{-3}$$

Dies entspricht einem Winkel von 0.08°.

Lösungen Aufgabe 45:

Die Für das dünnwandige, geschlossene Profil unter Torsionsbelastung gilt:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m s} \quad => \quad A_m = \frac{M_t}{2\tau s}$$



Die Fläche A_m kann zur Bestimmung von a in sechs gleichschenkliche Dreiecke zerlegt werden. Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich gemäß:

$$\frac{A_m}{6} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\frac{a}{2}\tan 60° = \frac{1}{2}a\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$=> \quad a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{A_m}{6}} = \sqrt{\frac{2A_m}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2\frac{M_t}{2\tau s}}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{M_t}{3\sqrt{3}\tau s}} = \sqrt{\frac{150000}{3\sqrt{3}\cdot 100\cdot 3}} = 9.8mm$$

Für τ ist die zulässige Schubspannung τ_{zul} einzusetzen.

Lösungen Aufgabe 46:

Geschlossenes Profil:

Das Torsionsflächenträgheitsmoment I_t und das Torsionswiderstandsmoment W_t für das geschlossene Profil mit variabler Wandstärke muss berechnet werden.

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{du}{s(u)}} = \frac{(2A_m)^2}{\sum_{i=1}^{4}\frac{U_i}{s_i}} = \frac{4a^2}{\frac{a}{2s}+\frac{a}{s}+\frac{a}{2s}+\frac{a}{s}} = \frac{4a^4}{\frac{a}{s}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{4a^4}{\frac{a}{s}3} = \frac{4}{3}a^3 s$$

$$W_t = 2A_m s_{\min} = 2a^2 s$$

Das zulässige Torsionsmoment $M_{t,zul}$ und die zulässige Verdrehung φ_{zul} resultieren aus:

$$M_{t,zul} = \tau_{zul}W_t = \tau_{zul}\cdot 2a^2 s = 40\cdot 2\cdot 200^2\cdot 2 = 6.4\cdot 10^6\, Nmm$$

$$\varphi_{zul} = \frac{M_{t,zul}L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul}W_t L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul}2a^2 sL}{G\frac{4}{3}a^3 s} = 1.5\frac{\tau_{zul}L}{Ga} = 1.5\frac{40\cdot 1000}{80000\cdot 200} = 3.75\cdot 10^{-3}$$

Der zulässige Winkel beträgt 0.21°.

Offenes Profil:

Das Torsionsflächenträgheitsmoment I_t und das Torsionswiderstandsmoment W_t für das offene Profil mit variabler Wandstärke muss berechnet werden.

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}U_i s_i^3 = \frac{1}{3}\left(a(2s)^3 + as^3 + a(2s)^3 + as^3\right) = \frac{as^3}{3}(8+1+8+1) = 6as^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{s_{\max}} = \frac{6as^3}{2s} = 3as^2$$

Das zulässige Torsionsmoment $M_{t,zul}$ und die zulässige Verdrehung φ_{zul} resultieren aus den gleichen Berechnungsformeln wie beim geschlossenen Profil:

$$M_{t,zul} = \tau_{zul} W_t = \tau_{zul} \cdot 3as^2 = 40 \cdot 3 \cdot 200 \cdot 2^2 = 96000 Nmm$$

$$\varphi_{zul} = \frac{M_{t,zul} L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} W_t L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} 3as^2 L}{G6as^3} = \frac{1}{2}\frac{\tau_{zul} L}{Gs} = \frac{1}{2}\frac{40 \cdot 1000}{80000 \cdot 2} = 0.125$$

Der zulässige Winkel beträgt 7.16°.

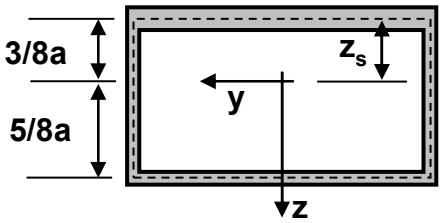
<u>Lösungen Aufgabe 47:</u>

Durch die exzentrische Belastung des Balkens tritt neben der Biegung auch Torsion auf. Beide können getrennt betrachtet werden und anschließend superpositioniert (addiert) werden.

Flächenträgheitsmoment und Torsionsflächenträgheitsmoment:

Für die Berechnung der Biegespannung (Normalspannungen infolge des Biegemoments) wird vorab das Flächenträgheitsmoment I_y berechnet. Das Profil hat unterschiedliche Wandstärken. Daher liegt der Schwerpunkt nicht in der geometrischen Mitte. Der Schwerpunkt berechnet sich von der Oberkante durch

$$z_s = \frac{0 \cdot 4as + \frac{a}{2}as + a2as + \frac{a}{2}as}{sa + 2as + sa + 4as} = \frac{3a^2 s}{8as} = \frac{3}{8}as$$



Bezüglich des Flächenschwerpunkts ergibt sich für das dünnwandige Profil folgendes Flächenträgheitsmoment I_y:

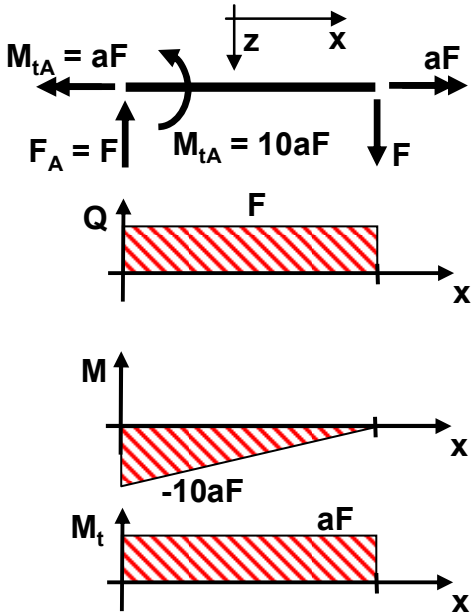
$$I_y = \underbrace{\frac{2a(2s)^3}{12} + \left(\frac{3a}{8}\right)^2 4as}_{obererFlansch} + \underbrace{\frac{2as^3}{12} + \left(\frac{5a}{8}\right)^2 2as}_{untererFlansch} + 2\underbrace{\left[\frac{sa^3}{12} + \left(\frac{a}{8}\right)^2 as\right]}_{seitlicheStege}$$

$$I_y = \frac{4as^3}{3} + \frac{36}{64}a^3 s + \frac{as^3}{6} + \frac{50}{64}a^3 s + \frac{as^3}{6} + \frac{a^3 s}{32} = \frac{37}{24}a^3 s + \underbrace{\frac{3}{2}as^3}_{\approx 0} = \frac{37}{24}a^3 s$$

Für die Berechnung der Torsionsspannungen (Schubspannungen infolge Torsionsmoments) benötigt man das Torsionswiderstandsmoment W_t. Man erhält es beim geschlossenen Profil aus:

$$W_t = 2A_m s_{\min} = 2 \cdot 2aas = 4a^2 s$$

Innere Kräfte und Momente:

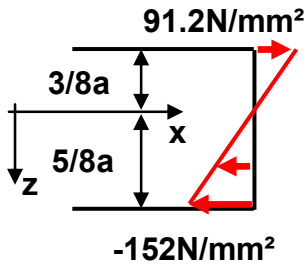


Die Wirkung der Kraft F auf das Bauteil muss für die Berechnung durch die Kraft F und durch ein positives Moment aF dargestellt werden. Dabei ist a der Hebelarm der Kraft F in Bezug zum Flächenmittelpunkt. Die Kraft versucht das Bauteil positiv um die x-Achse zu drehen, daher ist das zu verwendende Moment auch positiv.

Normalspannungen infolge Biegemoment und Schubspannungen infolge Torsionsmoment:

Die betragsmäßig größten Normalspannungen σ_{max} infolge des Biegemoments erhält man für den betragsmäßig größten möglichen z-Abstand, $z_{max} = 5/8a$:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_y} z_{max} = \frac{-10aF}{\frac{37}{24}a^3 s}\frac{5}{8}a = \frac{-150F}{37as} = \frac{-150 \cdot 3000}{37 \cdot 40 \cdot 2} = -152\frac{N}{mm^2}$$



Man erhält an der Profilunterseite mit z = +5/8a die maximalen Druckspannungen.

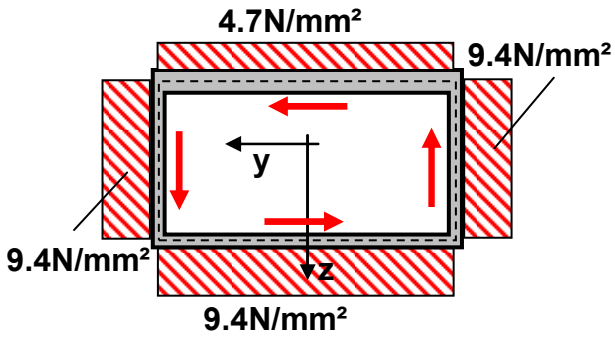
$$\sigma_{max,Druck} = \sigma_{max,Druck} = -152\frac{N}{mm^2}$$

Für die maximalen Zugspannungen an der Oberseite muss man z = - 3/8a verwenden.

$$\sigma_{max,Zug} = \frac{M_{max}}{I_y}\left(-\frac{3}{8}a\right) = \frac{-10aF}{\frac{37}{24}a^3 s}\left(-\frac{3}{8}a\right) = \frac{-150F}{37as} = \frac{-90 \cdot 3000}{37 \cdot 40 \cdot 2} = 91.2\frac{N}{mm^2}$$

Die maximale Schubspannung $\tau_{Torsion}$ infolge Torsionsmoment erhält man mit:

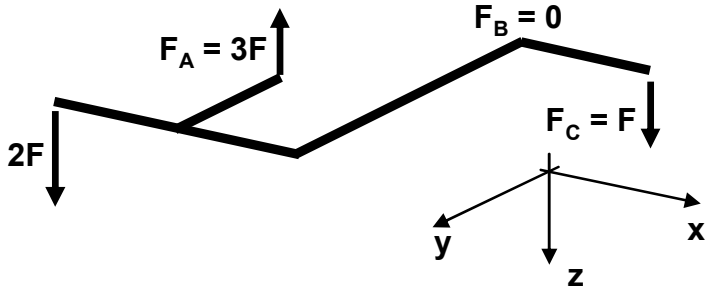
$$\tau_{Torsion} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{aF}{4a^2 s} = \frac{F}{4as} = \frac{3000}{4 \cdot 40 \cdot 2} = 9.375\frac{N}{mm^2}$$



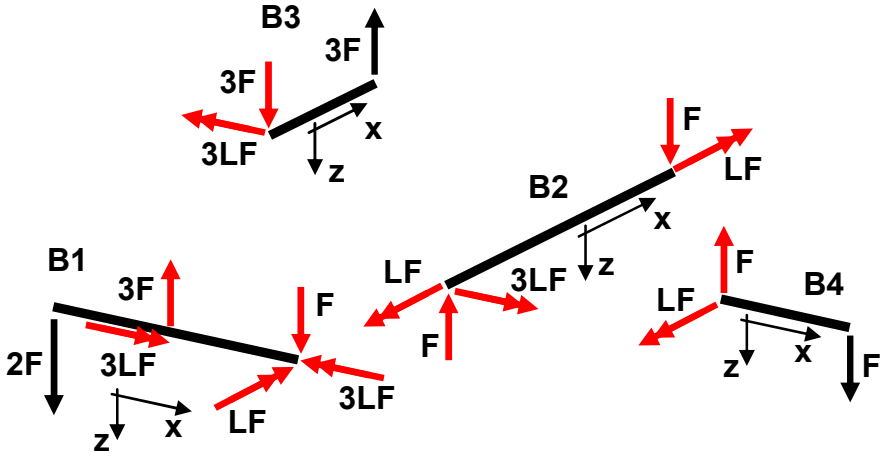
Die Schubspannung ist bereichsweise konstant. Da an der Oberseite die doppelte Wandstärke vorhanden ist, halbiert sich dort die Schubspannung. Die Pfeile geben die positive Wirkrichtung der Schubspannung an.

Lösungen Aufgabe 48:

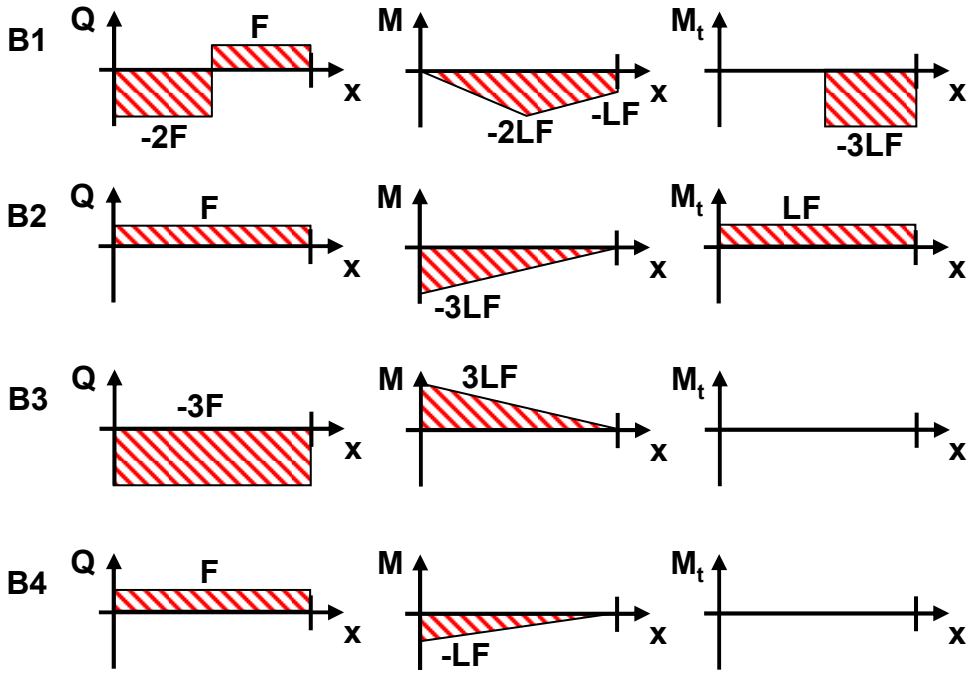
a.) Lagerkräfte durch die Belastungen mit der Kraft 2F:



Schnittkräfte:

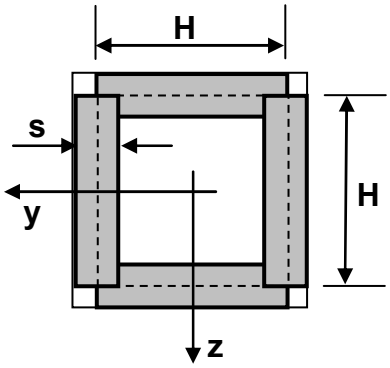


Innere Kräfte und Momente infolge der Kraft 2F:



Für die Verläufe infolge Einheitskraft muss am Kraftangriffspunkt eine senkrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe N_E, Q_E und M_E ermittelt werden. Dies können direkt aus Q, M und M_t ermittelt werden, wenn man in diesen Schaubildern 2F durch 1 ersetzt bzw. alle Anträge durch den Betrag 2F teilt.

Flächenträgheitsmoment, Torsionsflächenträgheitsmoment und Torsionswiderstandmoment:



$$I_y = 2\frac{Hs^3}{12} + 2\left(\frac{H}{2}\right)^2 Hs + 2\frac{sH^3}{12} = \underbrace{\frac{1}{6}Hs^3}_{\approx 0} + \frac{2}{3}H^3 s = \frac{2}{3}H^3 s$$

$$I_t = \frac{(2A_m)^2 s}{U} = \frac{4A_m^2 s}{4H} = \frac{4(H^2)^2 s}{4H} = H^3 s$$

$$W_t = 2A_m s_{\min} = 2H^2 s$$

Verschiebung u:

$$u = \frac{1}{EI_y}\underbrace{\left(\frac{(-2LF)(-L)L}{3} + \frac{L\left((-2LF)\left(2(-L)+\left(-\frac{L}{2}\right)\right)+(-LF)\left((-L)+2\left(-\frac{L}{2}\right)\right)\right)}{6}\right)}_{BiegungBalkenB1}$$

$$+\frac{1}{EI_y}\left(\underbrace{\frac{(-3LF)(-1.5L)3L}{3}}_{BiegungBalkenB2} + \underbrace{\frac{3LF\cdot 1.5L\cdot L}{3}}_{BiegungBalkenB3} + \underbrace{\frac{(-LF)(-0.5L)L}{3}}_{BiegungBalkenB4}\right)$$

$$+\frac{1}{GI_t}\left(\underbrace{(-3LF)(-1.5L)L}_{TorsionBalkenB1} + \underbrace{LF\cdot 0.5L\cdot 3L}_{TorsionBalkenB2}\right)$$

$$= \frac{FL^3}{EI_y}\left(\frac{2}{3}+\frac{5+2}{6}+4.5+1.5+\frac{1}{6}\right)+\frac{FL^3}{GI_t}(4.5+1.5) = 8\frac{FL^3}{E\frac{2}{3}H^3 s} + 6\frac{FL^3}{GH^3 s} = \frac{FL^3}{H^3 s}\left(\frac{12}{E}+\frac{6}{G}\right)$$

Maximale Normalspannung infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{I_y}|z_{\max}| = \frac{3LF}{\frac{2}{3}H^3 s}\frac{H}{2} = \frac{9LF}{4H^2 s}$$

Maximale Schubspannung infolge des Torsionsmoments:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{t,\max}|}{W_t} = \frac{3LF}{2H^2 s} = \frac{3LF}{2H^2 s}$$

Berechnung der notwendigen Kantenhöhe:

Die Verschiebung des Kraftangriffspunktes darf maximal u_{zul} = 10mm sein.

$$u_{zul} = u = \frac{FL^3}{H_{\min,u}^3 s}\left(\frac{12}{E}+\frac{6}{G}\right) \quad =>$$

$$H_{\min,u} = \sqrt[3]{\frac{FL^3}{u_{zul}s}\left(\frac{12}{E}+\frac{6}{G}\right)} = \sqrt[3]{\frac{100\cdot 500^3}{10\cdot 10}\left(\frac{12}{12000}+\frac{6}{6000}\right)} = 63.0mm$$

Die maximale Normalspannung darf höchstens σ_{zul} = 10N/mm² betragen.

$$\sigma_{zul} = \sigma_{\max} = \frac{9LF}{4H_{\min,\sigma}^2 s} \quad => \quad H_{\min,\sigma} = \sqrt{\frac{9LF}{4\sigma_{zul} s}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 500 \cdot 100}{4 \cdot 10 \cdot 10}} = 33.5mm$$

Die maximale Schubspannung darf höchstens τ_{zul} = 10N/mm² betragen.

$$\tau_{zul} = \tau_{\max} = \frac{3LF}{2H_{\min,\tau}^2 s} \quad => \quad H_{\min,\tau} = \sqrt{\frac{3LF}{2\tau_{zul} s}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 500 \cdot 100}{2 \cdot 10 \cdot 10}} = 27.4mm$$

Die notwendige minimale Kantenhöhe ist das Maximum von $H_{min,u}$, $H_{min,\sigma}$ und $H_{min,\tau}$.

$$H_{\min} = H_{\min,u} = 63mm$$

b.) Entfernt man eine Profilkante entsteht ein offenes dünnwandiges Profil mit drei Seiten. Für das Torsionswiderstandsmoment gilt dann:

$$W_t = \frac{I_t}{s_{\max}} = \frac{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} H_i s_i^3}{s} = \frac{1}{3}\frac{\left(Hs^3 + Hs^3 + Hs^3\right)}{s} = Hs^2$$

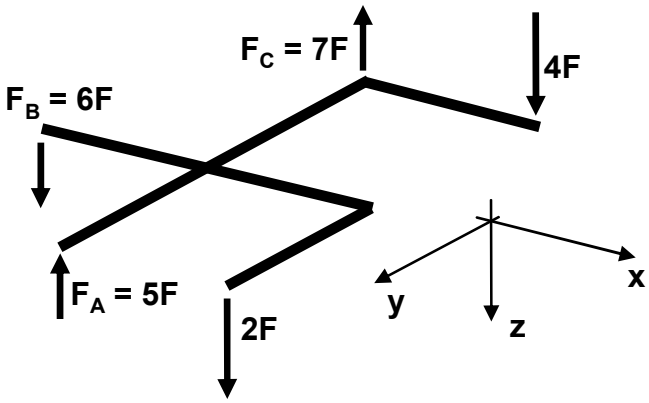
Die maximale Schubspannung infolge des Torsionsmoments erhält man mit $M_{t,max}$ = -3LF:

$$\tau_{\max,offen} = \frac{|M_{t,\max}|}{W_t} = \frac{3LF}{Hs^2} = \frac{3 \cdot 500 \cdot 100}{63 \cdot 10^2} = 23.8\frac{N}{mm^2}$$

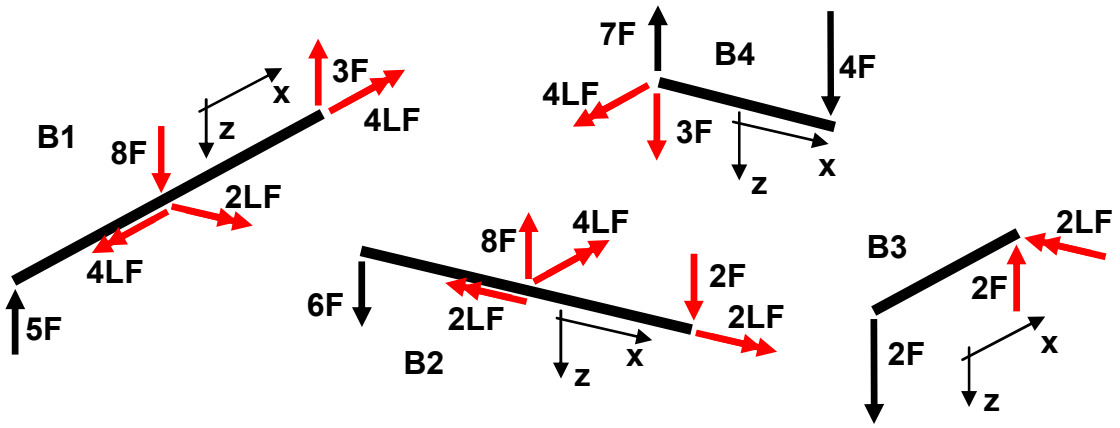
Die Schubspannung erhöht sich beim offenen Profil um den Faktor 2.38.

<u>Lösungen Aufgabe 49:</u>

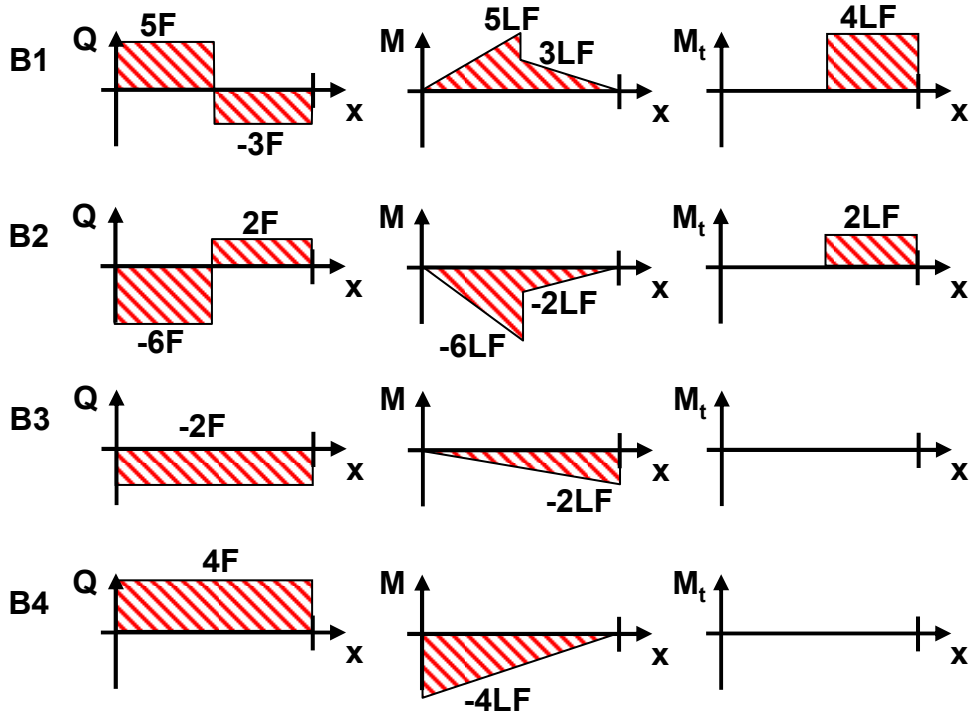
a.) und b.) Lagerkräfte durch die Belastungen mit den Kräften 2F und 4F:



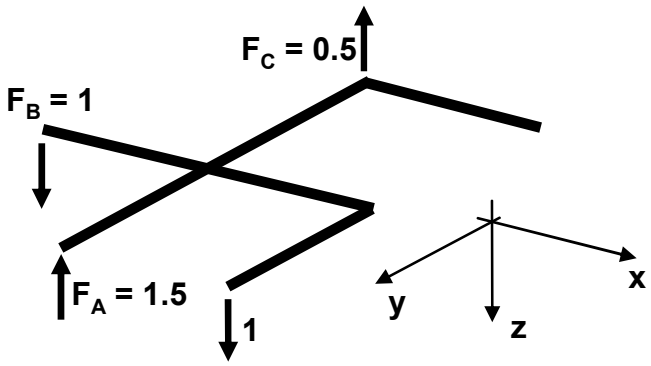
Schnittkräfte:



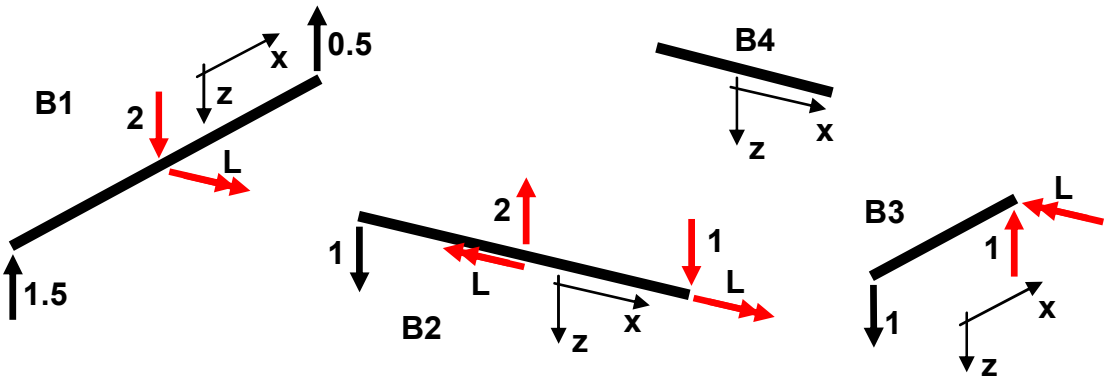
Innere Kräfte und Momente infolge der Kräfte 2F und 4F:



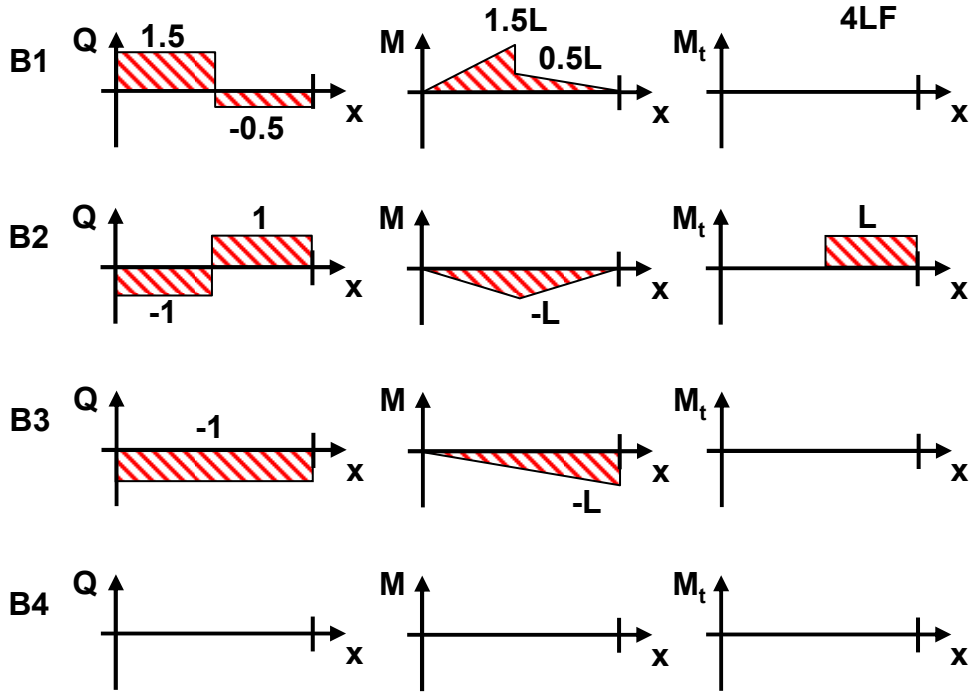
Lagerkräfte durch die Belastungen mit der Einheitskraft am Kraftangriffspunkt von 2F:



Schnittkräfte:



Innere Kräfte und Momente durch die Belastungen mit der Einheitskraft am Kraftangriffspunkt von 2F:



Flächenträgheitsmoment, Torsionsflächenträgheitsmoment und Torsionswiderstandmoment für kreisrunde, dünnwandige Profile:

$$I_y = \pi R_m^3 s$$

$$I_p = I_t = 2\pi R_m^3 s$$

$$W_t = 2A_m s_{\min} = \frac{I_p}{R_m} = 2\pi R_m^2 s$$

Verschiebung u des Kraftangriffspunktes der Kraft 2F:

$$u = \frac{1}{EI_y}\left(\underbrace{\frac{5LF\cdot 1.5L\cdot L}{3} + \frac{3LF\cdot 0.5L\cdot L}{3}}_{BiegungBalkenB1} + \underbrace{\frac{(-6LF)(-L)L}{3} + \frac{(-2LF)(-L)L}{3}}_{BiegungBalkenB2} + \underbrace{\frac{(-2LF)(-L)L}{3}}_{BiegungBalkenB3}\right)$$

$$+\frac{1}{GI_t}\left(\underbrace{2LF\cdot L\cdot L}_{TorsionBalkenB2}\right) = \frac{FL^3}{EI_y}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\frac{FL^3}{GI_t}(2) = \frac{19}{3}\frac{FL^3}{E\pi R_m^3 s} + 2\frac{FL^3}{G2\pi R_m^3 s} = \frac{FL^3}{\pi R_m^3 s}\left(\frac{19}{3E}+\frac{1}{G}\right)$$

$$= \frac{100\cdot 200^3}{\pi\cdot 10^3\cdot 2}\left(\frac{19}{3\cdot 200000}+\frac{1}{80000}\right) = 5.62mm$$

Maximale Normalspannung infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{I_y}R_m = \frac{6LF}{\pi R_m^3 s}R_m = 6\frac{LF}{\pi R_m^2 s} = 6\frac{200\cdot 100}{\pi\cdot 10^2\cdot 2} = 191.0\frac{N}{mm^2}$$

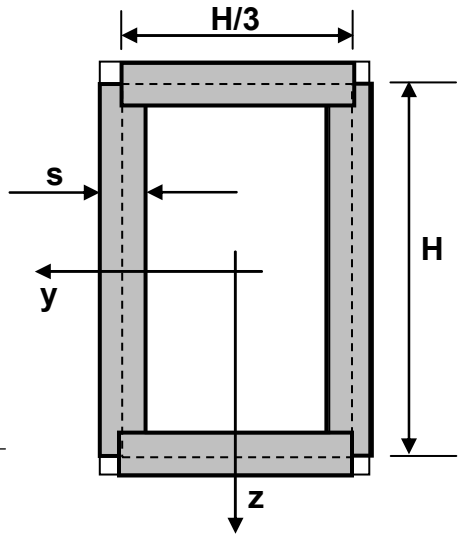
Maximale Schubspannung infolge des Torsionsmoments:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{t,\max}|}{W_t} = \frac{4LF}{2\pi R_m^2 s} = 2\frac{LF}{\pi R_m^2 s} = 2\frac{200\cdot 100}{\pi\cdot 10^2\cdot 2} = 63.7\frac{N}{mm^2}$$

c) Der Umfang des rechteckigen Profils soll gleich dem des runden Profils seins. Dabei gilt für das Verhältnis Breite und Höhe B = H/3.

$$U_{Rechteck} = 2(B+H) = 2\left(\frac{H}{3}+H\right) = \frac{8}{3}H = U_{Kreis} = 2\pi R_m$$

$$=> H = \frac{3\cdot 2\pi R_m}{8} = \frac{3\pi 10}{4} = 23.56mm$$



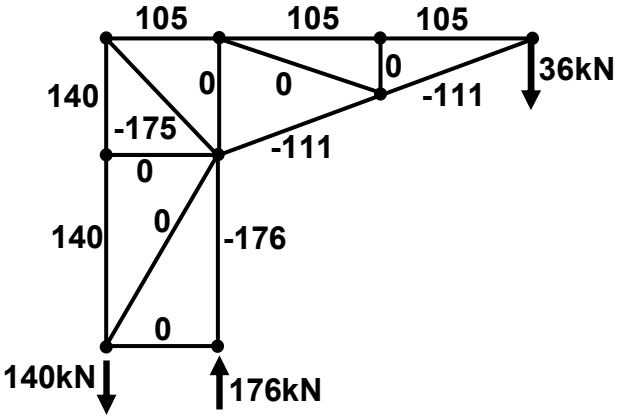
Für das Flächenträgheitsmoment des Rechteckprofils erhält man:

$$I_y = 2\frac{\frac{H}{3}s^3}{12} + 2\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{H}{3}s + 2\frac{sH^3}{12} = \underbrace{\frac{1}{18}Hs^3}_{\approx 0} + \frac{1}{3}H^3 s = \frac{1}{3}H^3 s$$

Daraus resultiert die maximale Normalspannung infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{I_y}\frac{H}{2} = \frac{6LF}{\frac{1}{3}H^3 s}\frac{H}{2} = 9\frac{LF}{H^2 s} = 9\frac{200\cdot 100}{23.56^2\cdot 2} = 162.1\frac{N}{mm^2}$$

<u>Lösungen Aufgabe 50:</u>



Für die Berechnung der Verschiebungen müssen die Stabkräfte $F_{Bi} = N_{Bi}$ infolge der angreifenden Kraft 36kN bestimmt werden.

Für die Berechnung der senkrechten Absenkung u_1 des Kraftangriffspunkt muss dort eine senkrechte Einheitskraft angebracht werden. Die daraus resultierenden Stabkräfte sind bis auf den Faktor 36kN identisch zu den rechts dargestellten Stabkräften infolge der äußeren Belastung. Daher werden für die Stabkräfte infolge Einheitskraft $F_{E1i} = N_{E1i}$ die dargestellten Stabkräfte geteilt durch 36kN verwendet. Stabkräfte in Zugstäben sind Normalkräfte und können daher bei der Anwendung wie Normalkräfte, die innerhalb eines Stabes konstant sind, verwendet werden.

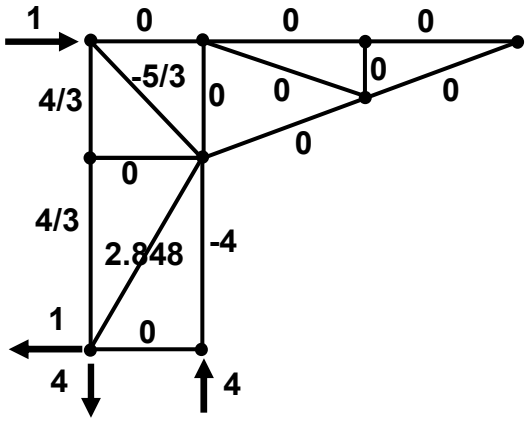
$$u_1 = \sum_i \int_{L_i} \frac{N_{Bi}N_{E1i}}{EA}dx = \sum_i \frac{N_{Bi}N_{E1i}}{EA}\int_{L_i} dx = \sum_i \frac{N_{Bi}N_{E1i}}{EA}L_i = \frac{1}{EA}\sum_i N_{Bi}N_{E1i}L_i$$

$$= \frac{1}{20\cdot 10^7}\left(2400\cdot 140000\cdot\frac{140}{36} + 1200\cdot 140000\cdot\frac{140}{36} + 900\cdot 105000\cdot\frac{105}{36} + 2\cdot 1750\cdot 105000\cdot\frac{105}{36}\right.$$

$$\left. + 2\cdot 1850\cdot(-111000)\cdot\frac{-111}{36} + 2400\cdot(-176000)\cdot\frac{-176}{36} + 1500\cdot(-175000)\cdot\frac{-175}{36}\right) = 39.6mm$$

Da im Fachwerk nur Normalkräfte auftreten, existieren auch keine Verformungen durch Biegemomente, Torsionsmomente oder Querkräfte.

Für die Berechnung der waagrechten Verschiebung u_2 des Punktes E muss dort eine waagrechte Einheitskraft angebracht werden. Dies ergibt die dargestellten Stabkräfte $F_{E1i} = N_{E2i}$.



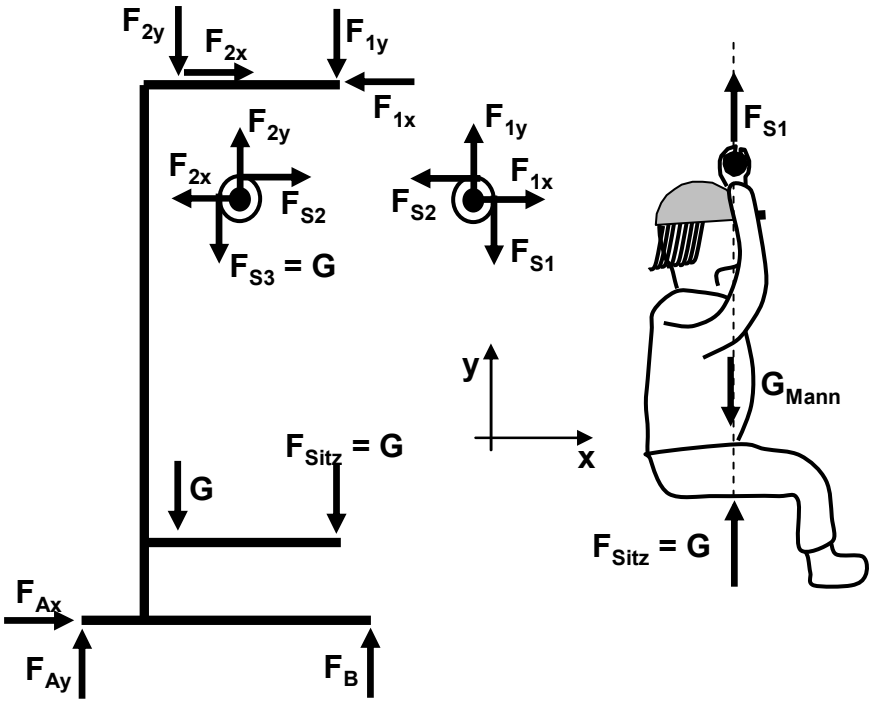
$$u_2 = \frac{1}{EA}\sum_i N_{Bi} N_{E2i} L_i$$

$$= \frac{1}{20 \cdot 10^7}\left(2400 \cdot 140000 \cdot \frac{4}{3} + 1200 \cdot 140000 \cdot \frac{4}{3} + 2400 \cdot (-176000) \cdot (-4) + 1500 \cdot (-175000) \cdot \frac{-5}{3}\right)$$

$$= 14.0mm$$

Lösungen Aufgabe 51:

a.) Zuerst werden der Rahmen, der Mensch und die Rollen frei geschnitten. Die dargestellten Schnittkräfte müssen eingeführt werden.



Die Bilanz der Momente an der linken Rolle (Punkt 23) mit dem Radius R ergibt:

$\sum M\big|_{23} = 0: \quad RF_{S3} - RF_{S2} = 0 \qquad => \qquad F_{S2} = F_{S3} = G$

Die Bilanz der Momente an der rechten Rolle (Punkt 12) mit dem Radius R ergibt:

$\sum M\big|_{12} = 0: \quad RF_{S2} - RF_{S1} = 0 \qquad => \qquad F_{S1} = F_{S2} = G$

Mit der Kräftebilanz in senkrechter Richtung am Mann erhält man dessen Gewichtskraft.

$\sum F_y = 0: \quad F_{S1} - G_{Mann} + F_{Sitz} = 0 \qquad => \qquad G_{Mann} = F_{S1} + F_{Sitz} = 2G$

Da am Sitz und am Seil nur eine senkrechte Kraft übertragen werden können, müssen alle drei am Mann angreifenden Kräfte die gleiche Wirklinie besitzen. Ansonsten wäre das Momentengleichgewicht verletzt.

b.) Für die Lagerkraftberechnung kann das Gesamtbauteil mit den am Gesamtbauteilangreifenden Kräfte betrachtet werden

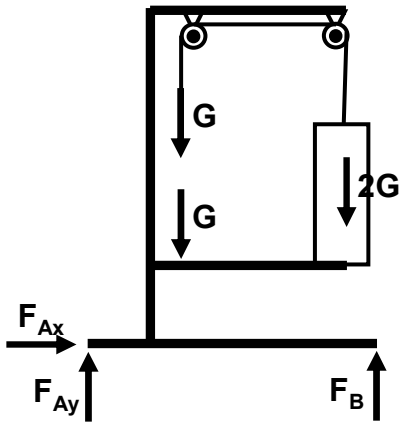
$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

$\sum M\big|_A = 0: \quad 8LF_B - 3LG - 3LG - 7L2G = 0$

$=> \quad F_B = \frac{20}{8}G = 2.5G$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - G - G - 2G = 0$

$=> \quad F_{Ay} = 4G - F_B = 1.5G$



c.) Am Rahmen sind noch die Kräfte F1x, F1y, F2x und F2y unbekannt. Die gewinnt man mit den Kräftegleichgewichten an den beiden Rollen.

Linke Rolle:

$\sum F_x = 0: \qquad F_{S2} - F_{2x} = 0$

=> $\qquad F_{2x} = F_{S2} = G$

$\sum F_y = 0: \qquad -F_{S3} + F_{2y} = 0$

=> $\qquad F_{2y} = F_{S3} = G$

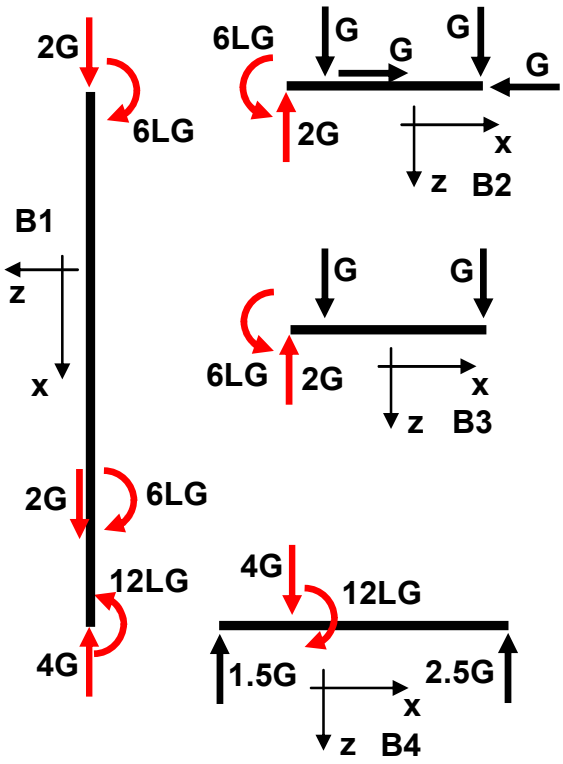
Rechte Rolle:

$\sum F_x = 0: \qquad -F_{S2} + F_{1x} = 0$

=> $\qquad F_{1x} = F_{S2} = G$

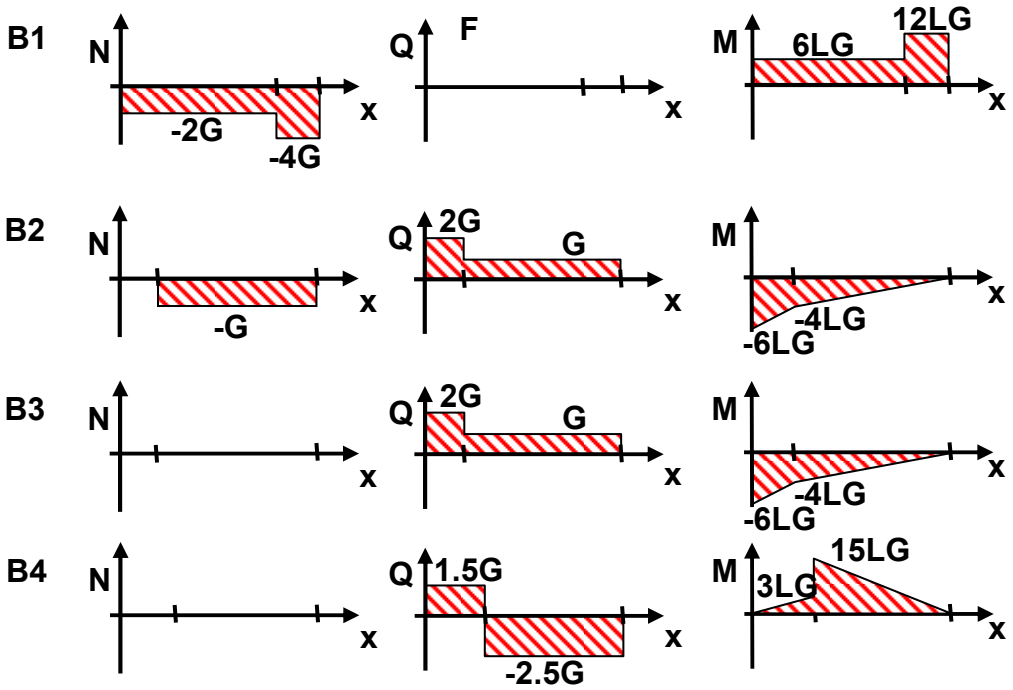
$\sum F_y = 0: \qquad -F_{S1} + F_{1y} = 0$

=> $\qquad F_{1y} = F_{S1} = G$



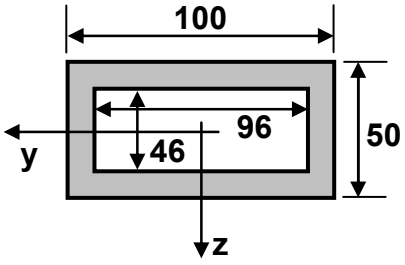
Der Rahmen kann in einen senkrechten B1 und drei wagrechte Balken B2, B3, B4 zerlegt werden. Die rechts dargestellten Schnittkräfte müssen an den isolierten Balken angebracht werden.

Innere Kräfte und Momente:



d.) Die maximalen Normalspannungen infolge Biegemoment existieren am Verbindungspunkt unterer waagrechter Balken mit senkrechtem Balken im waagrechten Balken.

e.) Die Zug- und Druckspannungen im senkrechten Balken setzen sich aus Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannungen infolge Normalkraft zusammen. Zur Berechnung müssen das Flächenträgheitsmoment und die Querschnittsfläche bekannt sein.



$$I_y = \frac{100 \cdot 50^3}{12} - \frac{96 \cdot 46^3}{12} = 262979 mm^4$$

$$A = 100 \cdot 50 - 96 \cdot 46 = 584 mm^2$$

Zuerst wir die Stelle mit betragsmäßig größter Normalkraft (-4G) und größtem Biegemoment (12GL) betrachtet.

Normalspannungen infolge des Biegemomentes:

$$\sigma_{Biegemoment}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{12LG}{I_y} z = \frac{12 \cdot 100 \cdot 500}{262979} z = 2.28z$$

Die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem positiven großen z-Wert an der Balkenunterseite:

$$\sigma_{\max Zug, Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z = 25) = 2.28 \cdot 25 = 57 \frac{N}{mm^2}$$

Die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem negativen betragsmäßig großen z-Wert an der Oberseite des Balkens:

$$\sigma_{\max Druck, Biegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z = -25) = 2.28(-25) = -57 \frac{N}{mm^2}$$

Normalspannungen infolge Normalkraft:

$$\sigma_{Normalkraft} = \frac{N}{A} = \frac{-4G}{A} = -\frac{-4 \cdot 500}{584} = -3.4 \frac{N}{mm^2}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge des Biegemoments und Normalkraft ergibt die maximalen Normalspannungen in diesem Balkenabschnitt.

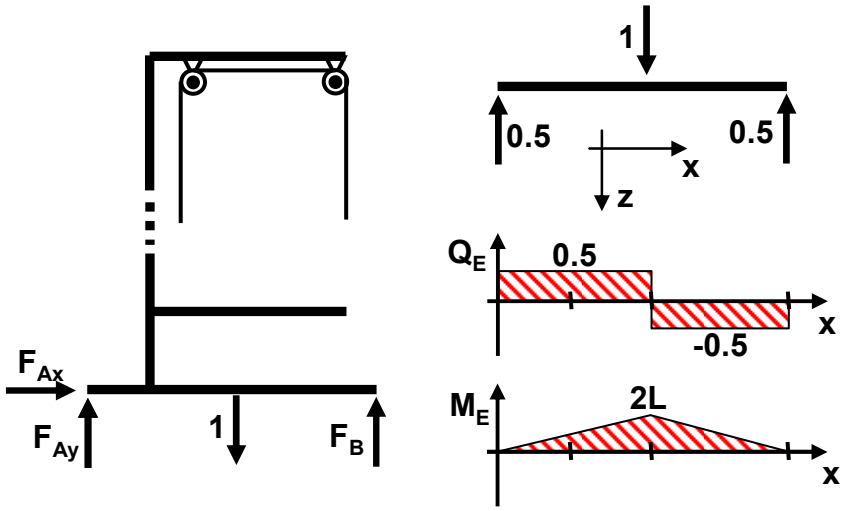
$$\sigma_{\max Zug} = \sigma_{\max Zug, Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft} = 57 - 3.4 = 53.6 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{\max Druck} = \sigma_{\max Druck, Biegemoment} + \sigma_{Normalkraft} = -57 - 3.4 = -60.4 \frac{N}{mm^2}$$

Im Balkenbereich mit Normalkraft N = -2G und Biegemoment 6LG wird die positive Zugspannung infolge Biegemoment weniger stark durch die Normalspannung infolge Normalkraft reduziert. Weil die Normalspannungen infolge des Biegemoments in diesem Bereich deutlich kleiner sind als im vorher betrachteten Bereich, resultieren in Summe kleinere maximale Zugspannungen. Daher sind die oben ausgerechneten Werte σ_{maxZug} und $\sigma_{maxDruck}$ die Extremwerte im senkrechten Balken.

f.) Für die senkrechte Absenkung u des mittleren Punktes des unteren waagrechten Balkens, muss an der zu untersuchenden Stelle die Einheitskraft angebracht werden. Man erkennt, dass nur der untere waagrechte Balken von dieser „Belastung“ betroffen ist. Daher ergeben sich nur in diesem Balken infolge der Einheitskraft innere Kräfte und Momente ungleich null

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$$
$$\sum M\big|_A = 0: \quad 8LF_B - 4L \cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_B = 0.5$$
$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_{Ay} = 1 - F_B = 0.5$$

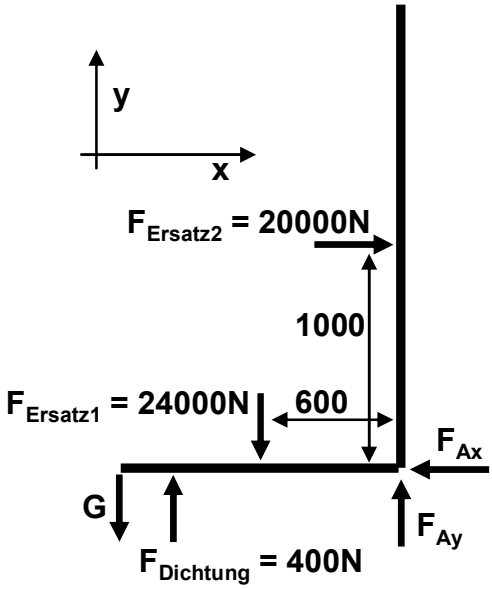


Berechnung der Verschiebung u:

$$u_2 = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{3LG \cdot L \cdot 2L}{3} + \frac{2L(15LG(2L+2L)+10LG(2 \cdot 2L+L))}{6} + \frac{10LG \cdot 2L \cdot 4L}{3}\right) = \frac{166}{3}\frac{GL^3}{EI_y}$$

$$= \frac{166}{3}\frac{500 \cdot 100^3}{70000 \cdot 262979} = 1.5mm$$

<u>Lösungen Aufgabe 52:</u>



a.) Die Streckenlasten q_1 und q2 werden durch die Ersatzkräfte $F_{Ersatz1}$ und $F_{Ersatz2}$ ersetzt.

$$F_{Ersatz1} = 1200q_1 = 1200 \cdot 20 = 24000N$$
$$F_{Ersatz2} = 2000q_2 = 2000 \cdot 10 = 20000N$$

Sie greifen 600mm links vom Lager A bzw. 1000mm oberhalb vom Lager A an. In der Realität würde sich die Streckenlast q_2 linear ändern. An der Wasseroberfläche hätte sie den Betrag null und am Lager A den Betrag 20N/mm.

Mit dem Momentengleichgewicht um das Lager A können das notwendige Gegengewicht und die Lagerkräfte berechnet werden.

$$\sum M\big|_A = 0: \quad 1200G - 1000F_{Dichtung} + 600F_{Ersatz1} - 1000F_{Ersatz2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{1000F_{Dichtung} - 600F_{Ersatz1} + 1000F_{Ersatz2}}{1200} = \frac{1000 \cdot 400 - 600 \cdot 24000 + 1000 \cdot 20000}{1200} = 5000N$$

b.) Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente benötigt man auch die Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay}.

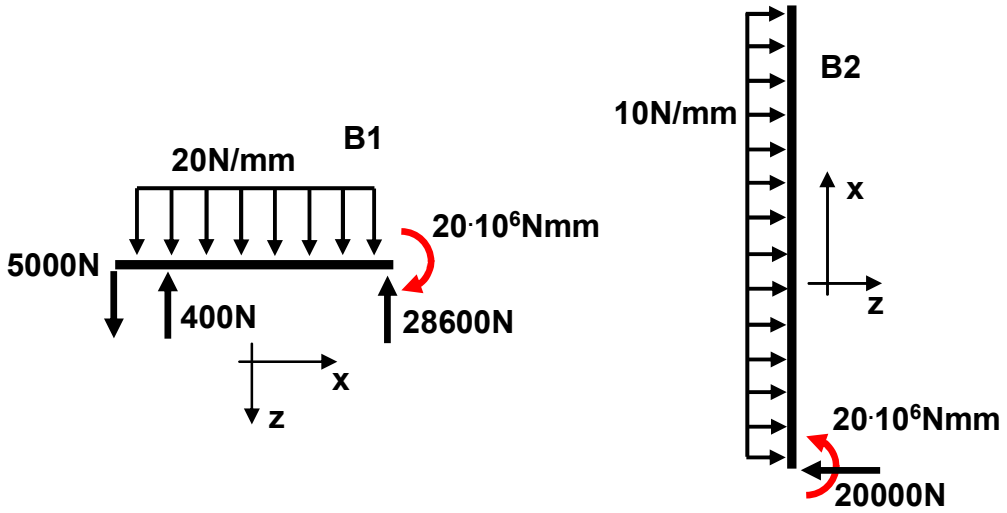
$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ersatz2} - F_{Ax} = 0$

=> $\qquad F_{Ax} = F_{Ersatz2} = 20000N$

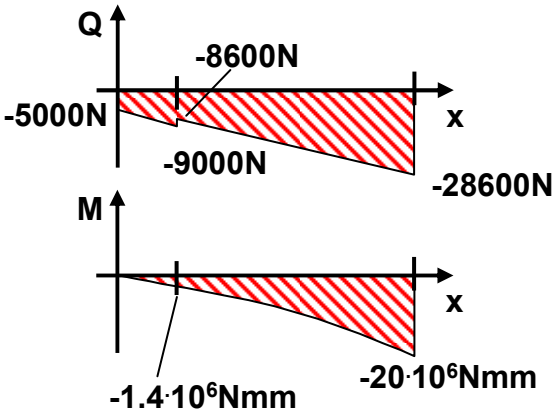
$\sum F_y = 0: \qquad -G + F_{Dichtng} - F_{Ersatz1} + F_{Ay} = 0$

=> $\qquad F_{Ay} = G - F_{Dichtung} + F_{Ersatz1} = 5000 - 400 + 24000 = 28600N$

Zerschneidet man die beiden Balken, erhält man das dargestellte Schnittbild:



Innere Kräfte und Momente:



Balken B1:

Intervall 1 (0 <= x <= 200):

$Q(x) = -5000 - 20x$

$M(x) = -5000x - 10x^2 + c_1$

Randbedingung M (x = 0) = 0:

=> $c_1 = 0$

Endwert:

$M(x = 200) = -5000 \cdot 200 - 10 \cdot 200^2 = -1.4 \cdot 10^6\, Nmm$

Intervall 2 (200<= x <= 1200):

$Q(x) = -4600 - 20x$

$M(x) = -4600x - 10x^2 + c_1$

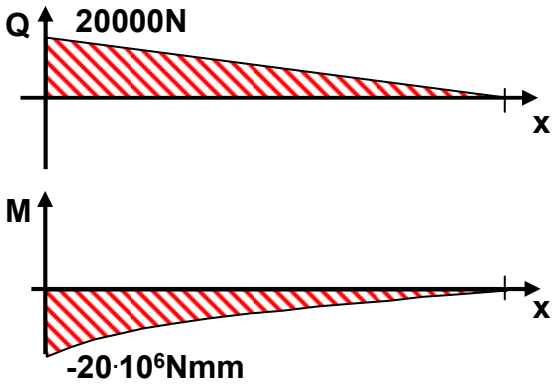
Randbedingung M (x = 200) = $-1.4 \cdot 10^6$:

$M(x = 200) = -1.4 \cdot 10^6 = -4600 \cdot 200 - 10 \cdot 200^2 + c_1 \qquad => \qquad c_1 = -80000$

Endwert:

$M(x = 1200) = -4600 \cdot 1200 - 10 \cdot 1200^2 - 80000 = -20 \cdot 10^6\, Nmm$

Balken B2:



$$Q(x) = 20000 - 10x$$
$$M(x) = 20000x - 5x^2 + c_1$$

Randbedingung M (x = 0) = -20·10^6:

$$M(x=0) = -20 \cdot 10^6 = 20000 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 + c_1$$
$$\Rightarrow \qquad c_1 = -20 \cdot 10^6$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{1000 \cdot 20^3}{12} = 666667 mm^4$$

Betrag der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{Biegemoment}(z) = \frac{M_{\max}}{I_y} z = \frac{-20 \cdot 10^6}{666667} z = -30z$$

Maximale Zugspannungen für z = -10:

$$\sigma_{\max ZugBiegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z=-10) = -30(-10) = 300 \frac{N}{mm^2}$$

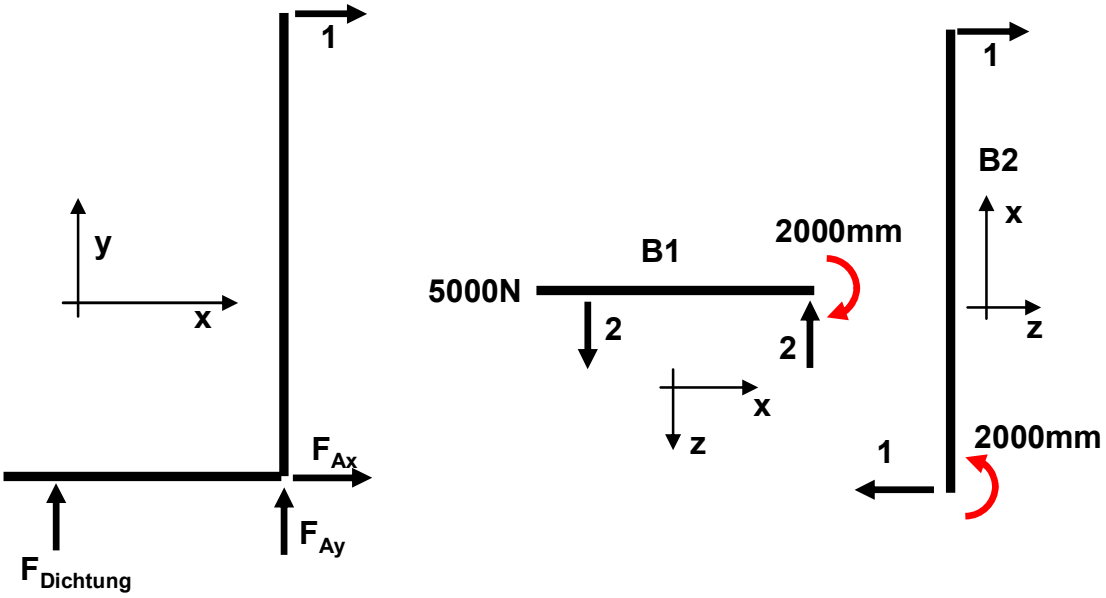
Maximale Druckspannungen für z = 10:

$$\sigma_{\max DruckBiegemoment} = \sigma_{Biegemoment}(z=10) = -30 \cdot 10 = -300 \frac{N}{mm^2}$$

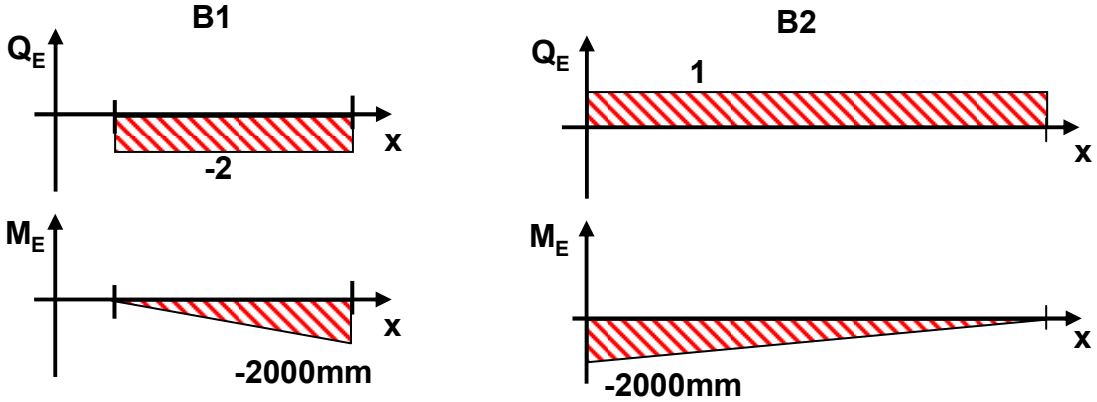
c.) Für die Berechnung der waagrechten Verschiebung u des Kraftangriffspunktes von F muss diese durch die Einheitskraft ersetzt werden. Am Bauteil sind weiter die Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay} zu berücksichtigen. Da das Bauteil statisch bestimmt gelagert sein muss, benötigt man eine zusätzliche Lagerung. Die Dichtung sorgt dafür, dass der Balkenpunkt, welcher die Dichtung berührt, sich nicht vertikal verschiebt. Daher ist bekannt, dass die vertikale Verschiebung an diesem Punkt gleich null ist. Daher kann man die Relativverschiebung des Kraftangriffspunktes von F bezüglich dieses Punktes angeben. D dieser sich nicht bewegt, ist dies gleichzeitig die Absolutverschiebung. Zur Berechnung der Relativverschiebung kann am Dichtungspunkt eine senkrechte Lagerung angenommen werden. Daher kann dort die fehlende Lagerkraft $F_{Dichtung}$ eingezeichnet werden.

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ax} = -1$$
$$\sum M|_A = 0: \qquad -2000 \cdot 1 - 1000 F_{Dichtung} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Dichtung} = -2$$
$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Dichtung} + F_{Ay} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ay} = -F_{Dichtung} = 2$$

Dies ergibt die dargestellten Schnittbilder infolge Einheitskraft:



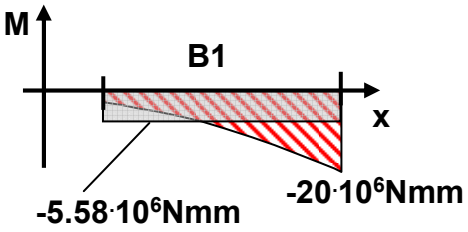
Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft:



Da M_E im ersten Intervall von Balken B1 gleich null ist, muss das erste Intervall nicht berücksichtigt werden. Der Mittelwert M_1 des zu berücksichtigen zweiten Intervalls im Balken B1 erhält man durch die Integration des Ausgangsmomentes über die Intervalllänge. Den Wert des Integrals muss man anschließend durch die Intervalllänge teilen.

$$M_1 = \frac{1}{1000}\int_{200}^{1000} M(x)dx = \frac{1}{1000}\int_{200}^{1000} -4600x - 10x^2 - 80000dx$$

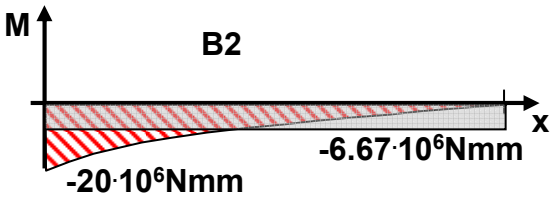
$$= \frac{1}{1000}\left[-2300x^2 - \frac{10}{3}x^3 - 80000x\right]_{200}^{1000} = -5.58\cdot 10^6\, Nmm$$



Analog berechnet man das mittlere Moment M_2 im zweiten Balken B2.

$$M_2 = \frac{1}{2000}\int_0^{2000} M(x)dx = \frac{1}{2000}\int_0^{2000} 20000x - 5x^2 - 20\cdot 10^6\, dx$$

$$= \frac{1}{2000}\left[10000x^2 - \frac{5}{3}x^3 - 20\cdot 10^6 x\right]_0^{2000} = -6.67\cdot 10^6\, Nmm$$



Berechnung der Verschiebung u:

$$u = \frac{1}{200000\cdot 666667}\left(\frac{(-2000)(-5.58\cdot 10^6)\cdot 1000}{2} + \frac{(-2000)(-6.67\cdot 10^6)\cdot 2000}{2}\right)$$

$$= \frac{1000\cdot 10^6\cdot 1000}{0.2\cdot 10^6\,\frac{2}{3}\cdot 10^6}\left(\frac{(-2)(-5.58)\cdot 1}{2} + \frac{(-2)(-6.67)\cdot 2}{2}\right) = 141.9mm$$

d.) Wenn sich der Schließmechanismus öffnet, verliert er den Kontakt zur Dichtung. Dies bedeutet, dass die Kraft $F_{Dichtung} = 0$ sein muss. Mit dem Momentengleichgewicht um A kann F ermittelt werden.

$$\sum M\big|_A = 0 : 1200G - 2000F + 600F_{Ersatz1} - 1000F_{Ersatz2} = 0$$

$$=> F = \frac{1200G + 600F_{Ersatz1} - 1000F_{Ersatz2}}{2000}$$

$$F = \frac{1200\cdot 5000 + 600\cdot 24000 - 1000\cdot 20000}{2000} = 200N$$