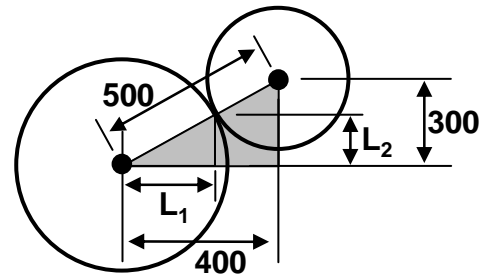


**Lösungen Aufgabe 1:**

Die Lage des Kontaktpunktes der beiden Rollen muss bestimmt werden. Der Kontaktpunkt hat in waagrechter Richtung den Abstand  $L_1$  und in senkrechter Richtung den Abstand  $L_2$  vom Mittelpunkt der linken Rolle.



Aus dem Strahlensatz erhält man

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{400}{500} \Rightarrow L_1 = 0.8R_1 = 280$$

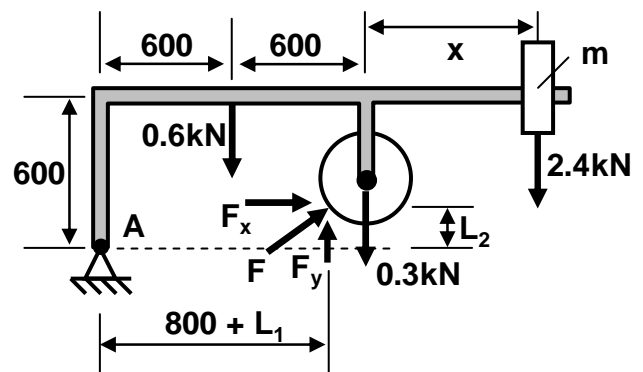
$$\frac{L_2}{R_1} = \frac{300}{500} \Rightarrow L_2 = 0.6R_1 = 210$$

Die Wirklinie der Kraft  $F = 10\text{kN}$  geht durch die beiden Rollenmittelpunkte. Daher gilt analog zu den Längen:

$$\frac{F_x}{F} = \frac{400}{500} \Rightarrow F_x = 0.8F = 8\text{kN}$$

$$\frac{F_y}{F} = \frac{300}{500} \Rightarrow F_y = 0.6F = 6\text{kN}$$

Der notwendige Abstand  $x$  kann durch das Momentengleichgewicht um den linken Lagerungspunkt A bestimmt werden.



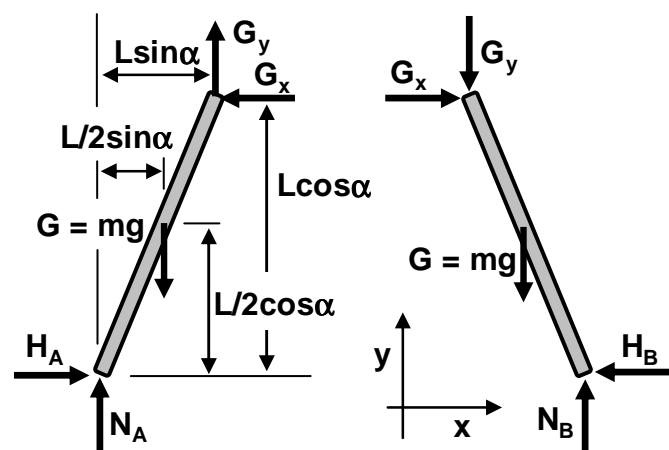
$$\sum M|_A = 0: -600 \cdot 0.6 - 1200 \cdot 0.3 - L_2 F_x + (800 + L_1) F_y - (1200 + x) \cdot 2.4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-600 \cdot 0.6 - 1200 \cdot 0.3 - 210 \cdot 8 + 1080 \cdot 6}{2.4} - 1200 = 500$$

**Lösungen Aufgabe 2:**

Die beiden zueinander symmetrischen Balken müssen frei geschnitten werden. Die beiden Normalkräfte  $N_A, N_B$  die beiden Haftreibungskräfte  $H_A, H_B$  und die Gelenkkräfte  $G_x$  und  $G_y$  müssen eingezeichnet werden.

Für beide Balken werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt. Gleichzeitig werden die Haftreibungsbedingungen  $H_A = \mu N_A$  und  $H_B = \mu N_B$  berücksichtigt.



Linker Balken:

$$\sum F_x = 0: H_A - G_x = \mu N_A - G_x = 0 \Rightarrow G_x = \mu N_A$$

$$\sum F_y = 0: N_A - G + G_y = 0$$

$$\sum M|_A = 0: -\frac{L}{2} \sin \alpha G + L \cos \alpha G_x + L \sin \alpha G_y = 0$$

Rechter Balken:

$$\sum F_x = 0: -H_B + G_x = -\mu N_B + G_x = 0 \quad \Rightarrow \quad G_x = \mu N_B$$

$$\sum F_y = 0: N_B - G - G_y = 0$$

$$\sum M|_B = 0: \frac{L}{2} \sin \alpha G - L \cos \alpha G_x + L \sin \alpha G_y = 0$$

Addiert man die beiden Momentengleichgewichte folgt:

$$-\frac{L}{2} \sin \alpha G + L \cos \alpha G_x + L \sin \alpha G_y + \frac{L}{2} \sin \alpha G - L \cos \alpha G_x + L \sin \alpha G_y = 2L \sin \alpha G_y = 0$$

$$\Rightarrow G_y = 0$$

Aus den beiden Kräftegleichgewichten in y-Richtung erhält man mit  $G_y = 0$ :

$$N_A - G + G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = G \quad \text{bzw.} \quad N_B - G - G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = G$$

Abschließend betrachtet man den linken Balken und setzt die Kräftegleichgewichte in die Bilanz des Moments ein.

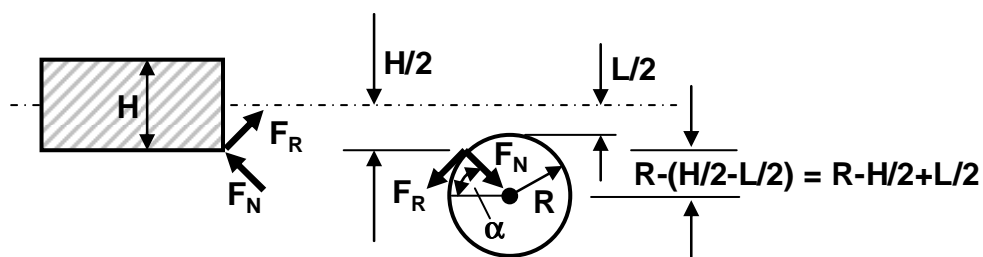
$$-\frac{L}{2} \sin \alpha G + L \cos \alpha G_x + L \sin \alpha G_y = -\frac{L}{2} \sin \alpha G + L \cos \alpha \mu N_A = -\frac{L}{2} \sin \alpha G + L \cos \alpha \mu G = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = 2\mu = 2 \cdot 0.2 = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0.4 = 21.8^\circ$$

Die Betrachtung am rechten Balken liefert das gleiche Ergebnis.

### Lösungen Aufgabe 3:

Aus Symmetriegründen ist es ausreichen nur die untere Hälfte zu betrachten. Werden Walze und Werkstück getrennt, müssen die folgenden Kräfte eingetragen werden, wobei  $F_N$  in radialer Richtung und  $F_R$  tangential zur Walze zeigt.



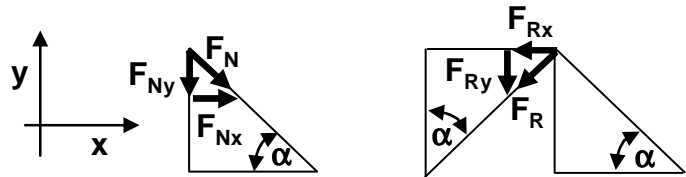
Der Winkel  $\alpha$  wird für die Kräftezerlegung von  $F_N$  und  $F_R$  benötigt.

$$\sin \alpha = \frac{R - \frac{H}{2} + \frac{L}{2}}{R} = \frac{2R - H + L}{2R}$$

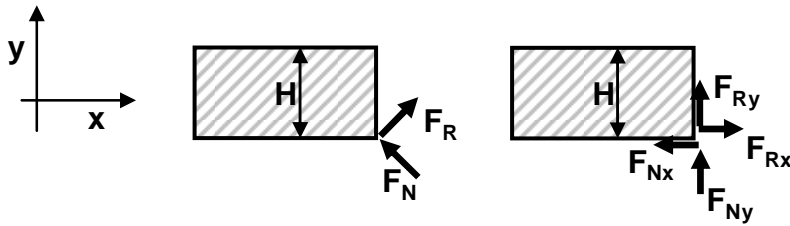
Die Kräftedreiecke und die geometrischen Dreiecke ergeben:

$$F_{Nx} = F_N \cos \alpha, \quad F_{Ny} = F_N \sin \alpha$$

$$F_{Rx} = F_R \sin \alpha, \quad F_{Ry} = F_R \cos \alpha$$



Die am Werkstück angreifenden Kräfte werden betrachtet. Die in y-Richtung zeigenden Kräfte werden von den entsprechenden Kräften an der nicht betrachteten Seite des Werkstückes ausgeglichen. Die Kräfte  $F_{Nx}$  und  $F_{Rx}$  zeigen an beiden Werkstückseiten in die gleichen Richtungen. Dies



bedeutet, dass Werkstück kann in die Walzen eingezogen werden, wenn die Kräfte in positive x-Richtung größer gleich den Kräften in negativer x-Richtung sind.

$$R_x \geq N_x$$

Der Grenzhafreibrungsfaktor  $\mu_0$  erhält man für  $F_{Rx} = F_{Nx}$  und  $F_R = \mu_0 F_N$ .

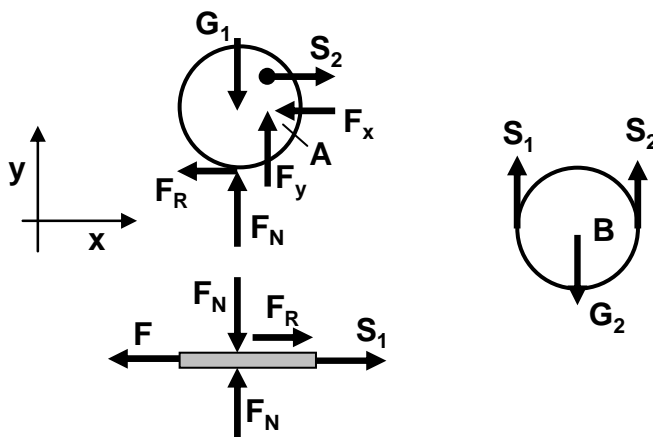
$$F_{Rx} = F_R \sin \alpha = \mu_0 F_N \sin \alpha = \underbrace{F_N \cos \alpha}_{F_{Nx}}$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{2R \sqrt{4R^2 - \frac{(2R - H + L)^2}{4R^2}}}{2R - H + L} = \frac{\sqrt{4R^2 - (2R - H + L)^2}}{2R - H + L}$$

$$\mu_0 = \frac{(2R - H + L) \sqrt{\frac{4R^2}{(2R - H + L)^2} - 1}}{2R - H + L} = \sqrt{\left(\frac{2R}{2R - H + L}\right)^2 - 1}$$

**Lösungen Aufgabe 4:**

Die beiden Walzen und die Platte werden frei geschnitten.



Das senkrechte Kräftegleichgewicht und das Gleichgewicht der Momente an der rechten Rolle ergeben die Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$ . Der Parameter  $a$  ist der unbekannte Rollenradius.

$$\sum M|_B = 0: \quad S_2 a - S_1 a = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_1$$

$$\sum F_y = 0: \quad S_1 - S_2 - G_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 = \frac{G_2}{2} = \frac{G_1}{2}$$

Die Normalkraft  $F_N$  kann an der linken Rolle ermittelt werden. Dabei wird die Haftbedingung  $F_R = \mu_0 F_N$  verwendet.

$$\sum M|_A = 0: \quad G_1 L - S_2 L - F_N L - F_R R = G_1 L - \frac{G_1}{2} L - F_N L - \mu_0 F_N \frac{R}{L} L = 0$$

$$\Rightarrow \quad L \left( \frac{G_1}{2} - F_N \left( 1 + \mu_0 \frac{R}{L} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{G_1}{2 \left( 1 + \mu_0 \frac{R}{L} \right)}$$

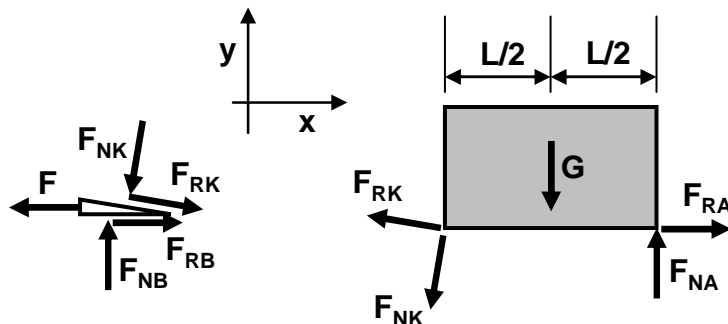
Die gesuchte Kraft  $F$  erhält man mit dem Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung an der Platte. Dabei wird wieder die Haftreibungsbedingung  $F_R = \mu_0 F_N$  berücksichtigt.

$$\sum F_x = 0: \quad -F + F_R + S_1 = -F + \mu_0 F_N + \frac{G_1}{2} = -F + \frac{\mu_0 G_1}{2 \left( 1 + \mu_0 \frac{R}{L} \right)} + \frac{G_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G_1}{2} \left( \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R}{L}} + 1 \right) = \frac{1000}{2} \left( \frac{0.2}{1 + 0.2 \cdot 3} + 1 \right) = 562.5 \text{ N}$$

### Lösungen Aufgabe 5:

Der Keil und der Klotz werden frei geschnitten.



Betrachtet man den Klotz, so erhält man mit dem Momentengleichgewicht am Berührungspunkt K die Normalkraft  $F_{NA}$ .

$$\sum M|_K = 0: \quad -G \frac{L}{2} + F_{NA} L = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{NA} = \frac{G}{2}$$

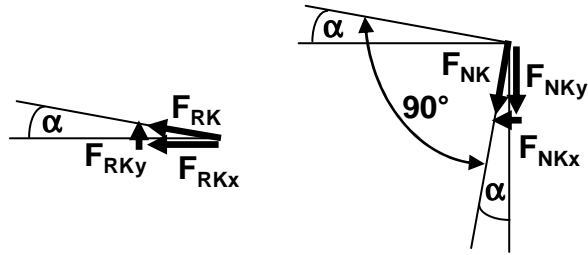
Weil am Punkt A kein Gleiten auftreten soll, gilt am Punkt A

$$F_{RA} \leq \mu_A F_{NA}$$

wobei  $\mu_A$  noch unbekannt ist. Es soll die minimale Kraft  $F$  bestimmt werden. Dies bedeutet, dass für die Haftreibungskraft  $F_{RK} = \mu_K F_{NK}$  gelten muss. Für die Berechnung der beiden Kräfte  $F_{RK}$  und  $F_{NK}$  werden diese in ihre Komponenten in x- und y-Richtung zerlegt.

$$F_{RKx} = F_{RK} \cos \alpha, \quad F_{RKy} = F_{RK} \sin \alpha$$

$$F_{NKx} = F_{NK} \sin \alpha, \quad F_{NKy} = F_{NK} \cos \alpha$$



Das Momentengleichgewicht um A ergibt die Kräfte  $F_{RK}$  und  $F_{NK}$ ,

$$\sum M|_K = 0: \quad G \frac{L}{2} - F_{NKy} L - F_{RKy} L = G \frac{L}{2} - F_{NK} \cos \alpha L - \underbrace{\mu_K F_{NK}}_{F_{RK}} \sin \alpha L = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{NK} = \frac{G}{2(\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha)} \quad \Rightarrow \quad F_{RK} = \frac{\mu_K G}{2(\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha)}$$

Beim Punkt B muss auch die Haftreibungsbedingung  $F_{RB} = \mu_K F_{NB}$  erfüllt sein. Das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung für den Keil ergibt die gesuchte Kraft  $F$ .

$$\sum F_y = 0: \quad F_{NB} - F_{NKy} - F_{RKy} = F_{NB} - F_{NK} \cos \alpha - \underbrace{\mu_K F_{NK}}_{F_{RK}} \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{NB} = F_{NK} (\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha)$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F + F_{RB} - F_{NKx} + F_{RKx} = -F + \mu_K F_{NB} - F_{NK} \sin \alpha + \underbrace{\mu_K F_{NK}}_{F_{RK}} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_K F_{NB} - F_{NK} (\sin \alpha - \mu_K \cos \alpha) = F_{NK} (\mu_K (\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha) - \sin \alpha + \mu_K \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F = G \frac{\mu_K \cos \alpha + \mu_K^2 \sin \alpha - \sin \alpha + \mu_K \cos \alpha}{2(\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha)} = G \frac{2\mu_K \cos \alpha + \sin \alpha (\mu_K^2 - 1)}{2(\cos \alpha + \mu_K \sin \alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad F = 10000 \frac{2 \cdot 0.3 \cos 8^\circ + \sin 8^\circ (0.3^2 - 1)}{2(\cos 8^\circ + 0.3 \sin 8^\circ)} = 2265 \text{ N}$$

Weil die Kraft  $F$  größer null ist, ist der Keil selbst hemmend. Dies bedeutet er hält ohne äußere Kraft.

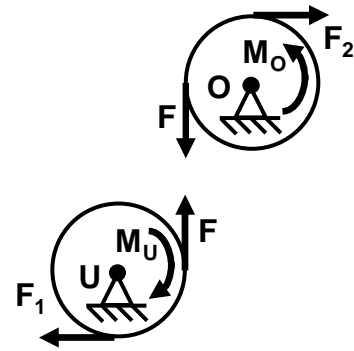
**Lösungen Aufgabe 6:**

a.) Die beiden Rollen müssen frei geschnitten werden. Die Seilreibungsbedingung mit dem Überdeckungswinkel  $\pi/2$  lautet für die untere Rolle:

$$F = F_1 e^{\frac{\pi}{2} \mu_0}$$

Analog gilt für die obere Rolle:

$$F_2 = F e^{\frac{\pi}{2} \mu_0}$$



Fasst man beide Gleichungen zusammen, so erhält man die Bestimmungsgleichung für  $\mu_0$ .

$$F_2 = F e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} = F_1 \left( e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} \right)^2 = F_1 e^{\pi \mu_0}$$

$$\Rightarrow e^{\pi \mu_0} = \frac{F_2}{F_1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \pi \mu_0 = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{\ln 5}{\pi} = 0.5123$$

b.) Für die Berechnung der Momente  $M_U$  und  $M_O$  werden an den beiden Rolle das Momentgleichgewicht ausgewertet.

$$\sum M|_U = 0: \quad -M_U - RF_1 + RF = -M_U - RF_1 + RF_1 e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} = -M_U + RF_1 \left( e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow M_U = RF_1 \left( e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} - 1 \right) = RF_1 \left( e^{\frac{\pi}{2} \cdot 0.5123} - 1 \right) = 1.2361 RF_1$$

$$\sum M|_O = 0: \quad M_O - RF_2 + RF = M_O - R5F_1 + RF_1 e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} = M_O - RF_1 \left( 5 - e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow M_O = RF_1 \left( 5 - e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} \right) = RF_1 \left( 5 - e^{\frac{\pi}{2} \cdot 0.5123} \right) = 2.7639 RF_1$$

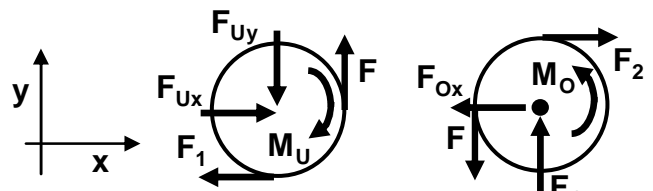
c.) Die Kräftebilanzen an der unteren Rolle ergeben die unteren Lagerkräfte, entsprechend die Kräftebilanzen an der oberen Rolle die oberen Lagerkräfte.

Untere Rolle:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ux} - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ux} = F_1$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{Uy} + F = 0$$

$$\Rightarrow F_{Uy} = F = F_1 e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} = 2.2361 F_1$$



Obere Rolle:

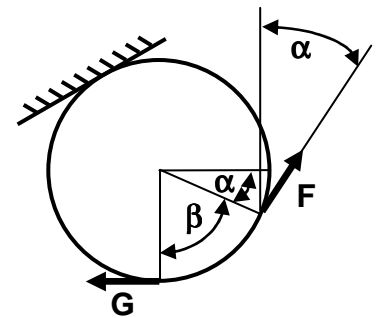
$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ox} + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ox} = F_2 = 5 F_1$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Oy} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Oy} = F = F_1 e^{\frac{\pi}{2} \mu_0} = 2.2361 F_1$$

Die Lagerung der oberen Rolle wird stärker beansprucht.

**Lösungen Aufgabe 7:**

a.) Die beiden drehbar gelagerten Walzen sind nur für die Umlenkung der Kette notwendig. Sie beeinflussen nicht die Kettenkraft. Somit muss nur die fest gelagerte Walze betrachtet werden. Aus der Skizze erkennt man, dass der Überdeckungswinkel  $\beta$  der Kette mit Hilfe von  $\alpha$  ausgedrückt werden kann.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Die Seilreibungsbedingung stellt den Zusammenhang zwischen F und G dar.

$$G = Fe^{\beta\mu_0} = Fe^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mu_0}$$

$$\Rightarrow e^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mu_0} = \frac{G}{F} = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\mu_0 = \ln 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{\mu_0} = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{\ln 8/\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

b.) Wenn F zu groß wird, bewegt sich die Kette in Richtung der Kraft F, falls F zu klein wird, bewegt sich die Kette in Richtung der Gewichtskraft G. Die Grenzen von F werden berechnet, indem F einmal die kleinere und einmal die größere kraft in der Gleichung für die Seilreibung ist.

Untere Grenze:

$$G = Fe^{\beta\mu_0} = Fe^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mu_0} = Fe^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\ln 8}{\pi}} = Fe^{\frac{\ln 8}{4}} = Fe^{\ln \sqrt[4]{8}} = F^4\sqrt[4]{8} = 1.6818F$$

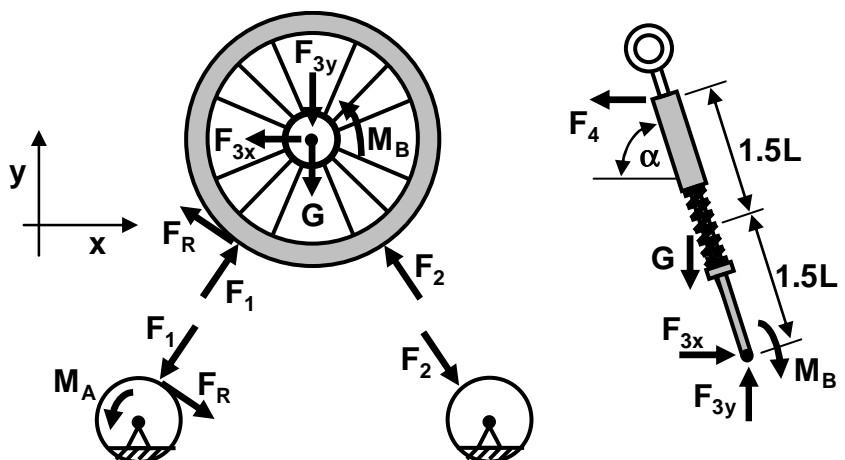
$$\Rightarrow F = 0.5946G$$

Obere Grenze:

$$F = Ge^{\beta\mu_0} = Ge^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mu_0} = Ge^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\ln 8}{\pi}} = Ge^{\frac{\ln 8}{4}} = Ge^{\ln \sqrt[4]{8}} = G^4\sqrt[4]{8} = 1.6818G$$

**Lösungen Aufgabe 8:**

a.) Die Vordergabel wird frei geschnitten. Die eingezeichneten Kräfte und Momente sind einzuführen.



b.) Für die Berechnung der Reibkraft  $F_R$  wird an der unteren linken Rolle um deren Mittelpunkt O das Momentengleichgewicht aufgestellt.

$$\sum M|_O = 0: \quad M_A - R_2 F_R = \gamma L G - \frac{L}{2} F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = 2\gamma G$$

Die Bilanz der Momente um den Radmittelpunkt 3 ergibt das Bremsmoment  $M_B$ .

$$\sum M|_3 = 0: \quad M_B - R_1 F_R = M_B - 1.5L \cdot 2\gamma G = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 3\gamma L G$$

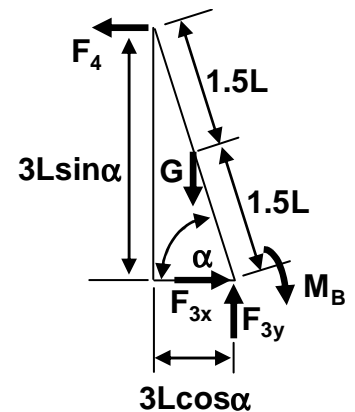
c.) An der Gabel werden die Kräfte  $F_{3x}$ ,  $F_{3y}$  und  $F_4$  berechnet.

$$\sum F_y = 0: \quad F_{3y} - G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{3y} = G$$

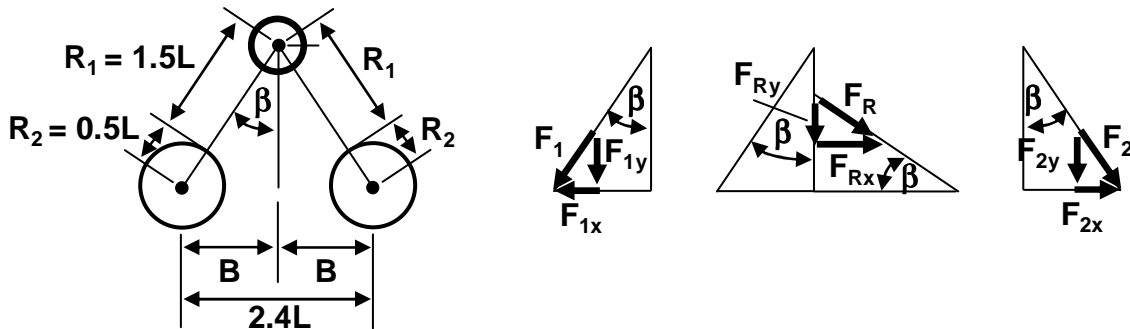
$$\sum M|_3 = 0: \quad 3L \sin \alpha F_4 + 1.5L \cos \alpha G - M_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_4 = \frac{M_B - 1.5L \cos \alpha G}{3L \sin \alpha} = \frac{3\gamma L G - 1.5L \cos \alpha G}{3L \sin \alpha} = G \left( \frac{\gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right)$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{3x} - F_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{3x} = F_4 = G \left( \frac{\gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right)$$



Für die Berechnung der Kraft  $F_1$  werden die Kräfte  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_R$  in ihre Komponenten zerlegt.



Aus den geometrischen Dreiecken zwischen den drei Mittelpunkten kann man die Länge  $B$  und den Winkel  $\beta$  ablesen

$$2B = 2.4L \quad \Rightarrow \quad B = 1.2L$$

$$\sin \beta = \frac{B}{R_1 + R_2} = \frac{1.2L}{2L} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 0.8$$

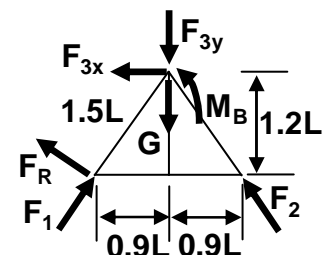
Aus den Kräftedreiecken erkennt man:

$$F_{1x} = F_1 \sin \beta = 0.6F_1, \quad F_{1y} = F_1 \cos \beta = 0.8F_1$$

$$F_{Rx} = F_R \cos \beta = 0.8F_R = 1.6\gamma G, \quad F_{Ry} = F_R \sin \beta = 0.6F_R = 1.2\gamma G$$

$$F_{2x} = F_2 \sin \beta = 0.6F_2, \quad F_{2y} = F_2 \cos \beta = 0.8F_2$$

Um die Kraft  $F_1$  zu berechnen wird um den Kontaktpunkt 2 zwischen rechter Rolle und Rad das Momentengleichgewicht aufgestellt. Die entsprechenden Hebelarme können der Skizze entnommen werden.





$$\begin{aligned} \sum M|_2 = 0: & \quad -1.8LF_{1y} - 1.8LF_{1y} + 0.9LG + 0.9LF_{3y} + 1.2LF_{3x} + M_B = 0 \\ \Rightarrow & \quad -1.8L \cdot 0.8F_1 - 1.8L \cdot 1.2\gamma G + 0.9LG + 0.9LG + 1.2LG \left( \frac{\gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + 3\gamma LG = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_1 = \frac{-2.16\gamma LG + 0.9LG + 0.9LG + 1.2LG \left( \frac{\gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + 3\gamma LG}{1.44L} \end{aligned}$$

Aus  $\sin \alpha = 0.96$  folgt  $\cos \alpha = 0.28$ .

$$\Rightarrow F_1 = \frac{G}{1.44} \left( \left( \frac{1.2}{\sin \alpha} + 3 - 2.16 \right) \gamma + 1.8 - \frac{1.2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right) = G(1.4514\gamma + 1.1285)$$

Das Rad dreht nicht durch, solange die Haftreibungsbedingung  $F_R \leq \mu_0 F_1$  zwischen Rad und linker Rolle erfüllt ist.

$$\begin{aligned} 2\gamma G = F_R & \leq \mu_0 F_1 = \mu_0 G(1.4514\gamma + 1.1285) \\ \Rightarrow 2\gamma & \leq \mu_0(1.4514\gamma + 1.1285) \Rightarrow (2 - 1.4514\mu_0)\gamma \leq 1.1285\mu_0 \\ \Rightarrow \gamma & \leq \frac{1.1285\mu_0}{(2 - 1.4514\mu_0)} \end{aligned}$$

Für das Antriebsmoment bedeutet dies:

$$M_A = \gamma GL \leq \frac{1.1285\mu_0}{(2 - 1.4514\mu_0)} GL$$

d.) Das maximal zulässige Antriebsmoment ist zu berechnen.

$$M_{A,\max} = \frac{1.1285 \cdot 1.0}{(2 - 1.4514 \cdot 1.0)} GL = 2.0571 GL$$

Das aufgebrachte Antriebsmoment  $M_A = 2GL$  ist kleiner wie das maximal zulässige. Daher dreht das Rad nicht durch!

e.) Die an der Gabel angreifenden Kräfte und Momente müssen bestimmt werden.

$$F_{3x} = F_4 = G \left( \frac{2}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right) = 1.9375G, \quad F_{3y} = G \quad \text{und} \quad M_B = 3 \cdot 2LG = 6LG$$

Die gesamte Gewichtskraft verteilt sich auf die Länge  $3L$ . Dadurch entsteht eine senkrecht nach unten zeigende Streckenlast  $G/3/L$ .

Es wird ein lokales  $xz$ -Koordinatensystem eingeführt. Die lokale  $x$ -Achse zeigt parallel zum Balken bzw. zur Gabel, die  $z$ -Achse quer. Die waagrechte Kraft  $F_4 = 1.9375G$  muss in eine Komponente parallel  $F_{4p}$  und quer  $F_{4q}$  zum Balken zerlegt werden. Aus der Skizze entnimmt man die Lage des Winkels  $\alpha$  im Kräfte-dreieck. Analog wird die Kraft  $F_{3x}$  zerlegt.

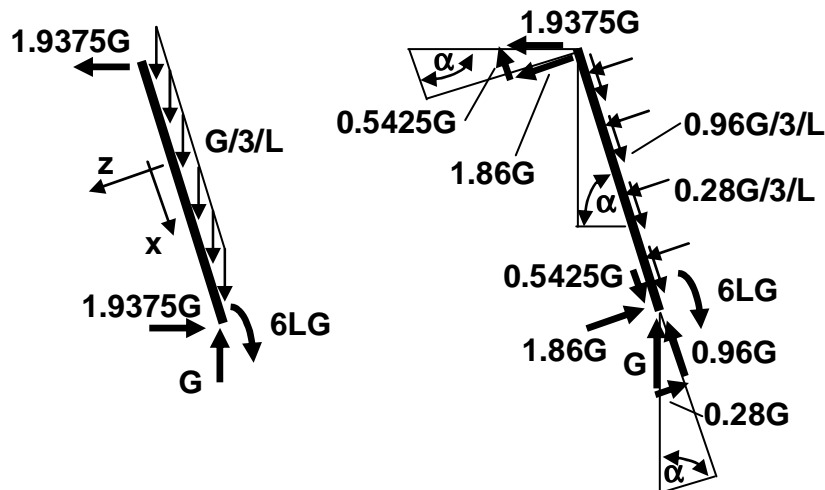
$$F_{4p} = F_4 \cos \alpha = 0.28F_4 = 0.5425G, \quad F_{4q} = F_4 \sin \alpha = 0.96F_4 = 1.86G$$

Auch die senkrechte Kraft  $F_{3y} = G$  muss in eine parallele Komponente  $F_{3yp}$  und in eine Komponente quer  $F_{3yq}$  zum Balken zerlegt werden. Auch hier kann man den Winkel  $\alpha$  des Kräfte-dreiecks aus der Skizze entnehmen.

$$F_{3,yp} = F_{3,y} \sin \alpha = 0.96F_{3,y} = 0.96G, \quad F_{3,yq} = F_{3,y} \cos \alpha = 0.28F_{3,y} = 0.28G$$

Analog zur senkrechten Kraft  $F_{3,y}$  kann auch die Streckenlast in einen Anteil parallel zum Balken und in einen Anteil quer zum Balken zerlegt werden. Wie bei der Einzelkraft  $F_{3,y}$  ist die parallele Komponente ( $q_x$ ) der Streckenlast das 0.96-fache der Gesamtstreckenlast und die Komponente quer ( $q_z$ ) zum Balken das 0.28-fache. Das bedeutet, dass bei diesem Bauteil die Normalkraft infolge der Streckenlast  $q_x$  eine Steigung ungleich null besitzt.

$$q_x = 0.96 \frac{G}{3L}, \quad q_z = 0.28 \frac{G}{3L}$$

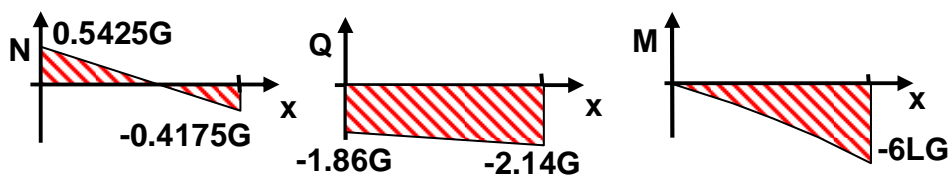


Fasst man die Kräfte parallel und quer zum Balken zusammen erhält man die folgenden Verläufe von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment:

$$N(x) = 0.5425G - \frac{0.96G}{3L}x \quad \Rightarrow \quad N(x=0) = 0.5425G, \quad N(x=3L) = -0.4175G$$

$$Q(x) = -1.86G - \frac{0.28G}{3L}x \quad \Rightarrow \quad Q(x=0) = -1.86G, \quad Q(x=3L) = -2.14G$$

$$M(x) = -1.86Gx - \frac{0.28G}{6L}x^2 \quad \Rightarrow \quad M(x=0) = 0, \quad M(x=3L) = -6LG$$



**Lösungen Aufgabe 9:**

Die Normalkraft ist im gesamten Stab  $N = F$ . Da die Querschnittsfläche im Teilstab 1 konstant ist, ist auch die Spannung im Teilstab 1 konstant.

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{4F}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 20^2} = 31.8 \frac{N}{mm^2}$$

Analog gilt im Teilstab 2:

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} D_2^2} = \frac{4F}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10^2} = 127.3 \frac{N}{mm^2}$$

Da auch der Elastizitätsmodul  $E$  konstant ist, ergeben sich auch in jedem Teilstab konstante Dehnungen.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{31.8}{10000} = 3.18 \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{127.3}{10000} = 0.0127$$

Im linken Teilstab 1 erhält man die Verschiebung:

$$u_1(x) = \varepsilon_1 x = \frac{\sigma_1}{E} x = \frac{4F}{\pi E D_1^2} x = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10000 \cdot 20^2} x = 3.18 \cdot 10^{-3} x$$

Am Verbindungspunkt Teilstab 1/Teilstab 2 gilt  $x = L_1$ .

$$u_1(x = L_1) = \varepsilon_1 x = \frac{\sigma_1}{E} x = \frac{4F}{\pi E D_1^2} L_1 = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10000 \cdot 20^2} 500 = 1.59 \text{ mm}$$

Im Teilstab 2 erhält man mit der Anfangsverschiebung  $u_1(x = L_1) = 1.59 \text{ mm}$  durch den Teilstab 1 eine lokale Verschiebung von:

$$u_2(x) = \varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 (x - L_1) = u_1(x = L_1) + \frac{4F}{\pi E D_2^2} (x - L_1) = 1.59 + \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 10000 \cdot 10^2} (x - 500)$$

$$\Rightarrow u_2(x) = 1.59 + 0.0127(x - 500)$$

Setzt man in diesen Ausdruck die  $x$ -Koordinate des Endpunktes ein, erhält man die Stabverlängerung.

$$u_2(x = L_1 + L_2) = 1.59 + 0.0127(1000 - 500) = 1.59 + 6.35 = 7.94 \text{ mm}$$

**Lösungen Aufgabe 10:**

Die Gesamtkraft  $F = mg$  setzt sich aus den  $n$  Drahtkräften  $F_D$  zusammen ( $n$ : Anzahl der Drähte).

$$F = mg = n F_D = n \sigma_{\max} A_D = n \sigma_{\max} \frac{\pi}{4} D^2$$

Löst man dies nach  $n$  auf, erhält man die gesuchte Anzahl  $n = 1250$  an Drähten.

$$n = \frac{4F}{\pi \sigma_{\max} D^2} = \frac{4 \cdot 10000 \cdot 9.81}{\pi \cdot 100 \cdot 1^2} = 1249.06$$

**Lösungen Aufgabe 11:**

Im Kupferteil sind alle Größen  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $A$  über der Länge  $L$  konstant. Damit der Stift eingeführt werden kann, muss der Kupferteil um  $4H$  zusammengepresst werden. Die aufzubringende Kraft  $F_1$  entspricht der im Kupferteil auftretenden Normalkraft  $N$ .

$$F_1 = N = \sigma_{Cu} A_{Cu} = E_{Cu} \epsilon_{Cu} A_{Cu} = \frac{E}{2} A \epsilon_{Cu} = \frac{EA}{2} \frac{4H}{L} = 2 \frac{EAH}{L} = 2 \frac{200000 \cdot 200 \cdot 0.01}{4} = 200000N$$

Nach dem Einklemmen entsteht durch die Wand auch eine Druckkraft  $F_2$ , da die eingebaute Stablänge  $3L-2H$  kürzer als die Ausgangslänge  $3L$  ist. Die dadurch erzeugte Normalkraft ist wieder über der ganzen Länge  $3L$  konstant. Daher gilt jeweils in den beiden Stahlteilen und in dem Kupferteil

$$F_2 = N = \sigma_{St} A_{St} = E_{St} \epsilon_{St} A_{St} = \frac{EA}{2} \frac{\Delta L_{St}}{L} \Rightarrow \Delta L_{St} = \frac{2F_2 L}{EA}$$

$$F_2 = N = \sigma_{Cu} A_{Cu} = E_{Cu} \epsilon_{Cu} A_{Cu} = \frac{EA}{2} \frac{\Delta L_{Cu}}{L} \Rightarrow \Delta L_{Cu} = \frac{2F_2 L}{EA}$$

Die gesamte Änderung der Länge beträgt im eingebauten Zustand  $2H$ .

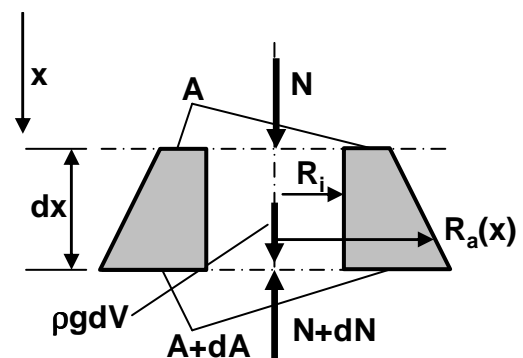
$$2H = 2\Delta L_{St} + \Delta L_{Cu} = 2 \frac{2F_2 L}{EA} + \frac{2F_2 L}{EA} = 6 \frac{F_2 L}{EA} \Rightarrow F_2 = \frac{EAH}{3L}$$

Die Bestimmungsgleichung von  $F_2$  setzt man in den Ansatz zur Bestimmung von  $\Delta L_{Cu}$  ein.

$$\Delta L_{Cu} = \frac{2LF_2}{EA} = \frac{2L}{EA} \frac{EAH}{3L} = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \cdot 0.01 = \frac{1}{150} mm$$

**Lösungen Aufgabe 12:**

Die Querschnittsfläche des Turmes wird so ausgelegt, dass überall die Spannung  $\sigma_{max}$  wirksam ist. Da sich die Querschnittsfläche  $A(x)$  über der Turmhöhe  $x$  ändert, kann nicht der gesamte Turm bilanziert werden. Es muss ein kleiner Turmabschnitt mit der Länge  $dx$  betrachtet werden.



Am oberen (negativen) Schnittpfer wirkt die Normalkraft  $N$ , die in das Volumen zeigt. Am unteren (positiven) Schnittpfer wirkt die veränderte Normalkraft  $N+dN$ . Zusätzlich wirkt im inneren des kleinen Teilvolumens die Volumenkraft  $\rho g dV$ . Die Kräftebilanz in  $x$ -Richtung wird betrachtet.

$$\sum F_x = 0: \quad N - (N + dN) + \rho g dV = 0$$

Die Spannung im Turm ist konstant. Daher können die Normalkräfte durch die konstante Spannung  $\sigma_{max}$  und die lokale Querschnittsfläche ausgedrückt werden.

$$N = \sigma_{max} A, \quad N + dN = \sigma_{max} (A + dA)$$

Für die Berechnung der Volumenkraft ersetzt man das Volumen  $dV$  durch das Produkt von Querschnittsfläche  $A$  mal Abschnittshöhe  $dx$ .

$$\rho g dV = \rho g A dx$$

Die Ausdrücke werden in das Kräftegleichgewicht eingesetzt.

$$\sigma_{\max} A - \sigma_{\max} (A + dA) + \rho g A dx = -\sigma_{\max} dA + \rho g A dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{\rho g}{\sigma_{\max}} dx$$

Die Differentialgleichung wird vom oberen Turmanfang ( $x = 0$ ,  $A(x = 0) = A_0$ ) bis zur zu untersuchenden Stelle ( $x$ ,  $A(x)$ ) integriert.

$$\int_{A_0}^{A(x)} \frac{dA}{A} = \int_0^x \frac{\rho g}{\sigma_{\max}} dx = \frac{\rho g}{\sigma_{\max}} \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow \ln A(x) - \ln A_0 = \ln \frac{A(x)}{A_0} = \frac{\rho g}{\sigma_{\max}} x \quad \Rightarrow A(x) = A_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\max}} x}$$

Den Anfangsquerschnitt  $A_0$  erhält man aus der Kraft  $F$  am oberen Ende des Turms.

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_0} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{F}{\sigma_{\max}}$$

Man erhält die lokale Querschnittsfläche  $A(x)$ .

$$A(x) = \frac{F}{\sigma_{\max}} e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\max}} x}$$

Nicht die Querschnittsfläche  $A(x)$ , sondern der variable Außenradius  $R_a(x)$  ist gesucht.

$$A(x) = \pi(R_a^2(x) - R_i^2) \quad \Rightarrow \quad R_a(x) = \sqrt{R_i^2 + \frac{A(x)}{\pi}} = \sqrt{R_i^2 + \frac{F}{\pi \sigma_{\max}} e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\max}} x}}$$

Der Innenradius beträgt  $R_i = 1000\text{mm}$ , die Dichte  $\rho = 2 \cdot 10^{-6} \text{kg/mm}^3$  und die Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{m/s}^2$ . Am oberen Ende des Turms gilt  $x = 0$ .

$$R_a(x=0) = \sqrt{1000^2 + \frac{10^6}{\pi \cdot 1} e^0} = \sqrt{1000^2 + \frac{10^6}{\pi \cdot 1}} = 1148 \text{mm}$$

Am Boden gilt  $x = H = 10000\text{mm}$ .

$$R_a(x=10000) = \sqrt{1000^2 + \frac{10^6}{\pi \cdot 1} e^{\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81}{1} \cdot 10000}} = 1178 \text{mm}$$

Infolge des Eigengewichts des Turmes muss die Wandstärke von oben nach unten um 30mm vergrößert werden.

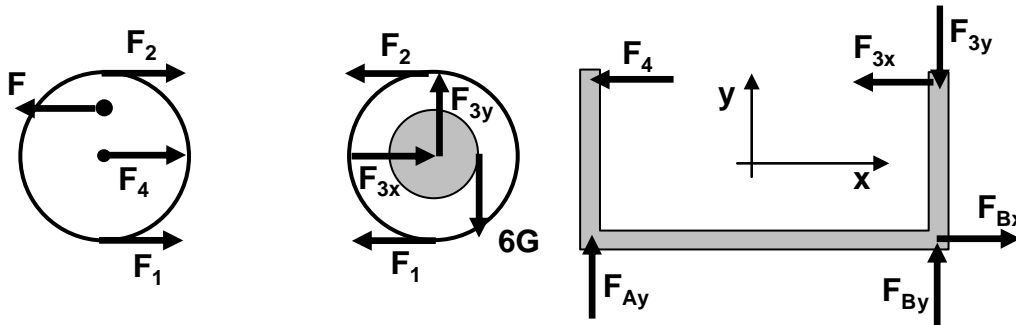
Für die Absenkung wird das Hookesche Gesetz angewandt.

$$\sigma_{\max} = E \varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} = E \frac{\Delta L}{H} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{\sigma_{\max} H}{E} = \frac{1 \cdot 10000}{30000} = \frac{1}{3} \text{mm}$$

Die Absenkung ist vernachlässigbar klein!

**Lösungen Aufgabe 13:**

Die beiden Räder und der Rahmen müssen frei geschnitten werden. Es müssen die skizzierten Schnittkräfte eingetragen werden.



Am rechten Rad werden die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  bestimmt werden. Die Seilreibungsbedingung und das Momentengleichgewicht um den Radmittelpunkt 3 werden dazu ausgewertet. Aus der Skizze erkennt man, dass  $F_2 > F_1$  sein muss. Die Kräftegleichgewichte ergeben  $F_{3x}$  und  $F_{3y}$ , die für den Aufgabenteil b.) benötigt werden.

$$F_2 = F_1 e^{\mu_R \pi} = F_1 e^{\frac{\ln 4}{\pi} \pi} = F_1 e^{\ln 4} = 4F_1$$

$$\sum M|_3 = 0: \quad 2LF_2 - 2LF_1 - 6LG = 2L \cdot 4F_1 - 2LF_1 - 6LG = 6LF_1 - 6LG = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = G \quad \Rightarrow \quad F_2 = 4G$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{3x} - F_1 - F_2 = F_{3x} - G - 4G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{3x} = 5G$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{3y} - 6G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{3y} = 6G$$

Um den minimalen Umschlingungswinkel  $\alpha$  der Kette um die Trommel zu bestimmen, wird wieder die Seilreibungsbedingung ausgewertet.

$$6G = 0.6G e^{\mu_K \alpha} \quad \Rightarrow \quad 10 = e^{\mu_K \alpha} \quad \Rightarrow \quad \ln 10 = \mu_K \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\ln 10}{\mu_K} = \frac{\ln 10}{0.4886} = 1.5\pi$$

Der minimale Umschlingungswinkel beträgt  $270^\circ$ , die minimale Kettenlänge, die auf der Trommel liegen muss misst  $1.5\pi L$ .

b.) Zur Bestimmung der Ausgleichskraft  $F$  wird das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt 4 des linken Rades gebildet. Das waagrechte Kräftegleichgewicht ergibt  $F_4$ , in senkrechter Richtung wirken keine Kräfte.

$$\sum M|_4 = 0: \quad LF - 2LF_2 + 2LF_1 = LF - 2L4G + 2LG = LF - 6LG = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 6G$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_4 + F_1 + F_2 - F = F_4 + G + 4G - 6G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_4 = G$$

Am Rahmen werden die Lagerkräfte ermittelt. Diese hätte man auch vorab am Gesamtbauteil bestimmen können.

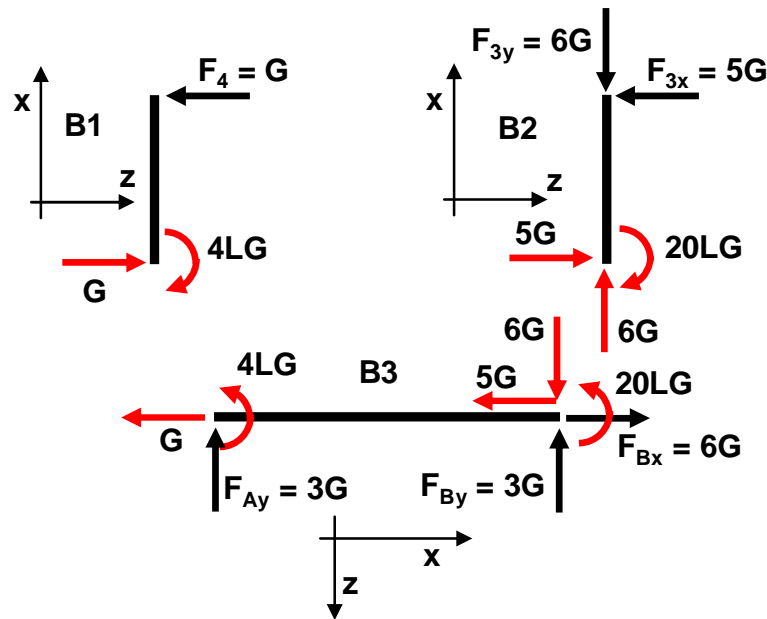
$$\sum M|_A = 0: \quad 4LF_4 + 4LF_{3x} - 8LF_{3y} + 8LF_{By} = 4LG + 4L5G - 8L6G + 8LF_{By} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{By} = 3G$$

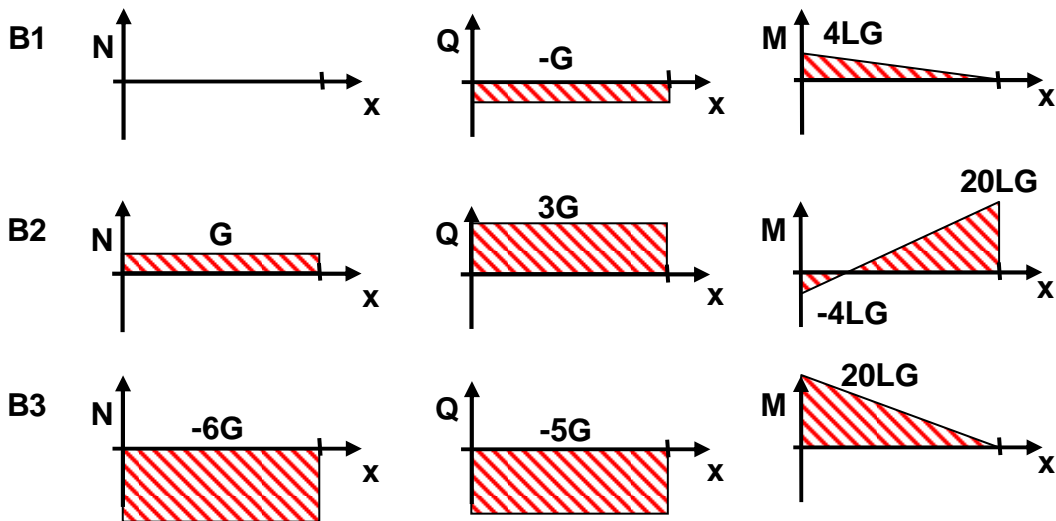
$$\sum F_x = 0: \quad -F_4 - F_{3x} + F_{Bx} = -G - 5G + F_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = 6G$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{By} - F_{3y} = F_{Ay} + 3G - 6G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 3G$$

Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente wird der Rahmen in der gerade Balken zerlegt.



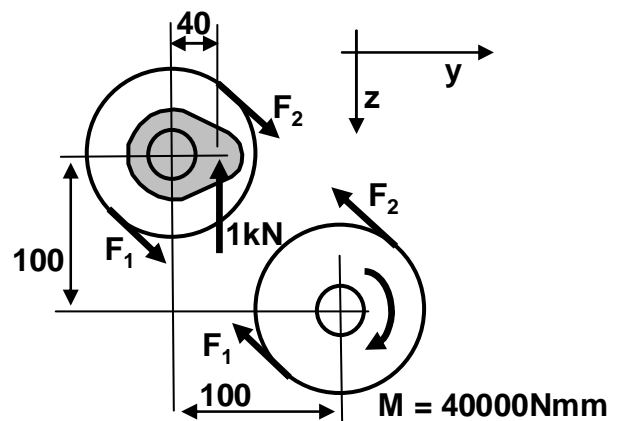
Innere Kräfte und Momente:



**Lösungen Aufgabe 14:**

a.) Das Bauteil wird in die yz-Ebene projiziert. Die beiden Wellen werden frei geschnitten und die skizzierten Schnittkräfte eingetragen. Die Riemenkräfte  $F_1$  und  $F_2$  können mit der Seilreibungsbedingung und dem Momentengleichgewicht am oberen Rad um eine Parallele zur x-Achse durch den Mittelpunkt O der oberen Welle berechnet werden.

$$F_2 = F_1 e^{\mu_0 \pi} = F_1 e^{0.5123\pi} = 5F_1$$



$$\sum M_x|_O = 0: F_2 \frac{D_{Rad}}{2} - F_1 \frac{D_{Rad}}{2} - 40 \cdot 1000 = 5F_1 \cdot 50 - F_1 \cdot 50 - 40000 = 200F_1 - 40000 = 0$$

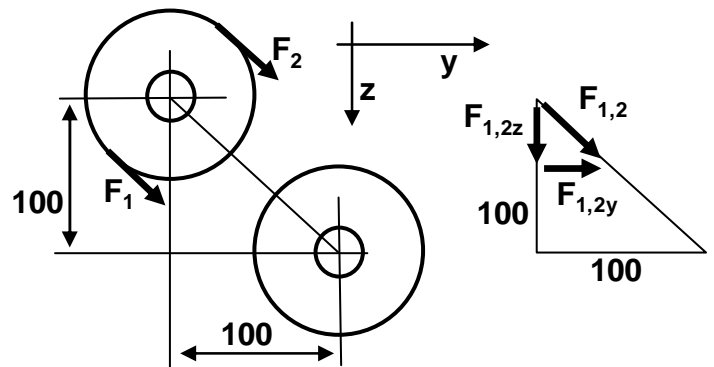
$$\Rightarrow F_1 = 200N \quad \Rightarrow F_2 = 1000N$$

Das notwendige Moment  $M$  wird mit dem Momentengleichgewicht am unteren Rad um eine Parallele zur  $x$ -Achse durch den Mittelpunkt  $U$  der unteren Welle.

$$\sum M_x|_O = 0: -F_2 \frac{D_{Rad}}{2} + F_1 \frac{D_{Rad}}{2} + M = -1000 \cdot 50 - 200 \cdot 50 + M = -40000 + M = 0$$

$$\Rightarrow M = 40000Nmm$$

b.) Die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  zeigen in Riemenrichtung. Für die weiteren Berechnungen werden Sie in ihre Komponenten  $F_{1y}$ ,  $F_{1z}$ ,  $F_{2y}$  und  $F_{2z}$  zerlegt. In der  $yz$ -Ebene können mit den beiden Achsmittelpunkten  $O$  und  $U$  ein geometrisches Dreieck erzeugt werden, dessen Hypotenuse parallel zu den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  liegt. Die Kräftedreiecke ergeben:

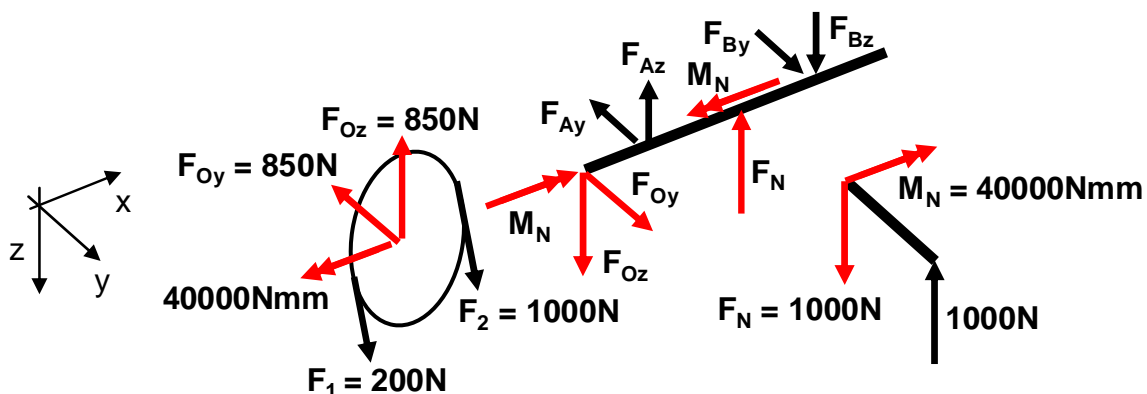


$$\frac{F_{1,2y}}{F_{1,2}} = \frac{F_{1,2z}}{F_{1,2}} = \frac{100}{100\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow F_{1y} = F_{1z} = \frac{F_1}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}N, \quad F_{2y} = F_{2z} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = 500\sqrt{2}N$$

Obere Welle:

Das obere Bauteil wird in obere Welle, oberes Rad und Nocke zerlegt. Die dargestellten Schnitt- und Lagerkräfte müssen eingetragen werden.



An der Nocke kann die Kraft  $F_N$  und das Moment  $M_N$  ermittelt werden.

$$\sum M_x|_O = 0: M_N - 40 \cdot 1000 = 0 \quad \Rightarrow M_N = 40000Nmm$$

$$\sum F_z = 0: F_N - 1000 = 0 \quad \Rightarrow F_N = 1000N$$

Am Rad können die Schnittkräfte  $F_{Oy}$  und  $F_{Oz}$  ermittelt werden. Das Schnittmoment muss den identischen Betrag wie  $M_N$  oder  $M$  besitzen.



$$\sum F_y = 0: F_{1y} + F_{2y} - F_{Oy} = 100\sqrt{2} + 500\sqrt{2} - F_{Oy} = 850 - F_{Oy} = 0 \Rightarrow F_{Oy} = 850N$$

$$\sum F_z = 0: F_{1z} + F_{2z} - F_{Oz} = 100\sqrt{2} + 500\sqrt{2} - F_{Oz} = 850 - F_{Oz} = 0 \Rightarrow F_{Oz} = 850N$$

Mit den bekannten Schnittkräften können die Lagerkräfte ermittelt werden.

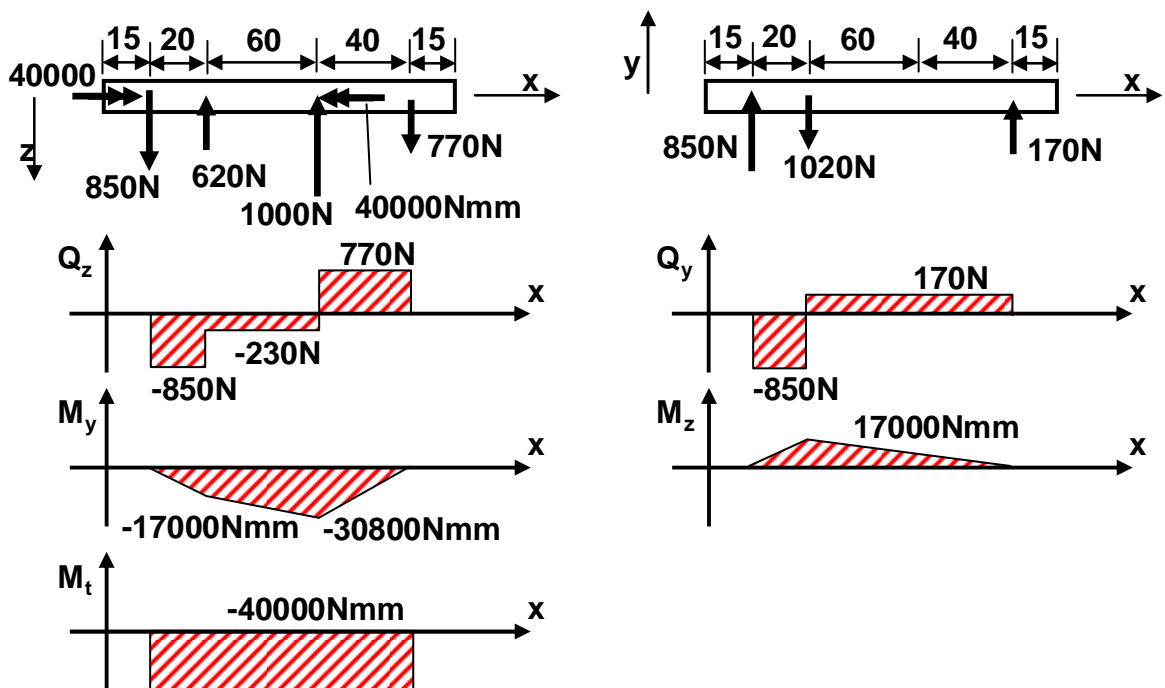
$$\sum M_y|_A = 0: 20F_{Oz} + 60F_N - 100F_{Bz} = 20 \cdot 850 + 60 \cdot 1000 - 100F_{Bz} = 0 \Rightarrow F_{Bz} = 770N$$

$$\sum M_y|_B = 0: 120F_{Oz} - 40F_N - 100F_{Az} = 120 \cdot 850 - 40 \cdot 1000 - 100F_{Az} = 0 \Rightarrow F_{Az} = 620N$$

$$\sum M_z|_A = 0: -20F_{Oy} + 100F_{By} = -20 \cdot 850 + 100F_{By} = 0 \Rightarrow F_{By} = 170N$$

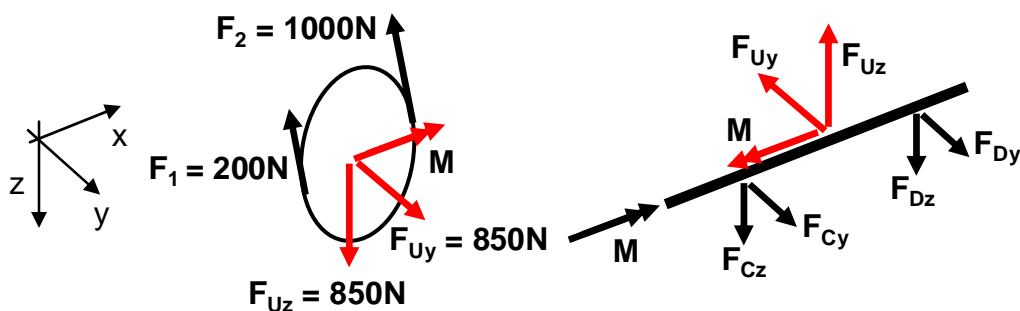
$$\sum M_z|_B = 0: -120F_{Oy} + 100F_{Ay} = -120 \cdot 850 + 100F_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 1020N$$

Innere Kräfte und Momente:



Untere Welle:

Das untere Bauteil wird in untere Welle und unteres Rad zerlegt. Die dargestellten Schnitt- und Lagerkräfte müssen eingetragen werden.



Am Rad können die Schnittkräfte  $F_{Uy}$  und  $F_{Uz}$  ermittelt werden. Das Schnittmoment muss den identischen Betrag wie  $M_N$  oder  $M$  besitzen.

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{1y} - F_{2y} + F_{Uy} = -100\sqrt{2} - 500\sqrt{2} + F_{Uy} = -850 + F_{Uy} = 0 \Rightarrow F_{Uy} = 850 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{1z} - F_{2z} + F_{Uz} = -100\sqrt{2} - 500\sqrt{2} + F_{Uz} = -850 + F_{Uz} = 0 \Rightarrow F_{Uz} = 850 \text{ N}$$

Mit den Schnittkräften können die Lagerkräfte ermittelt werden.

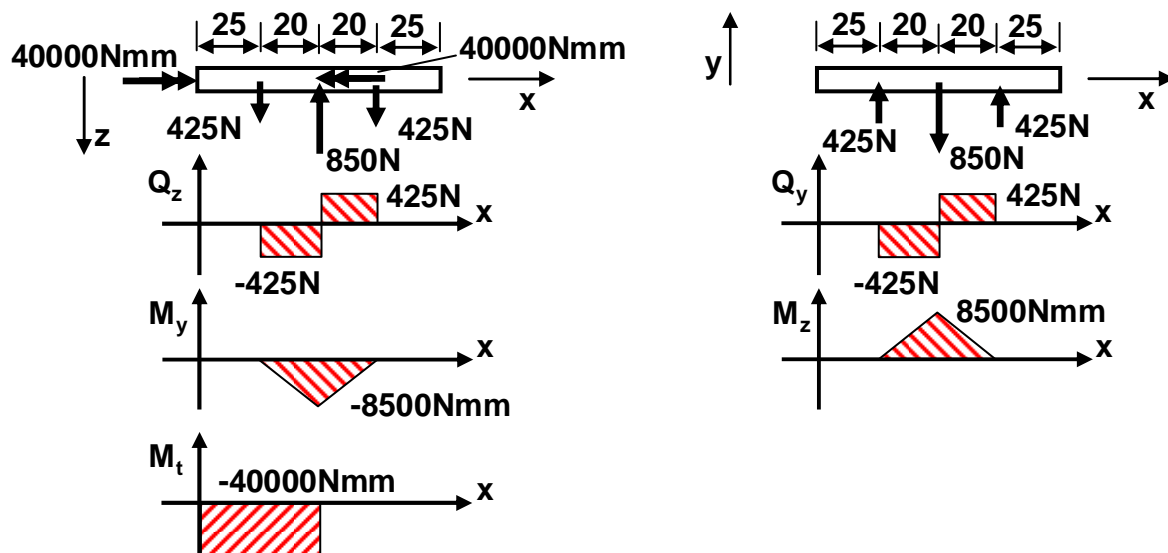
$$\sum M_y|_C = 0: \quad 20F_{Uz} - 40F_{Dz} = 20 \cdot 850 - 40F_{Dz} = 0 \Rightarrow F_{Dz} = 425 \text{ N}$$

$$\sum M_y|_D = 0: \quad 40F_{Cz} - 20F_{Uz} = 40F_{Cz} - 20 \cdot 850 = 0 \Rightarrow F_{Cz} = 425 \text{ N}$$

$$\sum M_z|_C = 0: \quad -20 \cdot F_{Uy} + 40F_{Dy} = -20 \cdot 850 + 40F_{Dy} = 0 \Rightarrow F_{Dy} = 425 \text{ N}$$

$$\sum M_z|_D = 0: \quad -40F_{Cy} + 20F_{Uy} = -40F_{Cy} + 20 \cdot 850 = 0 \Rightarrow F_{Cy} = 425 \text{ N}$$

Innere Kräfte und Momente:



c.) Die maximale Normalspannung  $\sigma_{\max} = 40 \text{ N/mm}^2$  tritt im Riemen in den Bereichen auf, wo die Normalkraft  $N = F_2$  beträgt. Allgemein gilt, dass im Riemen überall eine Zugspannung existiert.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\text{Riemen}}} = \frac{F_2}{A_{\text{Riemen}}} = \frac{1000}{25} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Im Riemenbereich, wo  $N = F_1$  gilt, existiert die minimale Spannung  $\sigma_{\min} = 8 \text{ N/mm}^2$ . In den Auflagebereichen wächst die Normalkraft von 200 N auf 1000 N an. Analog steigt die Normalspannung von  $8 \text{ N/mm}^2$  auf  $40 \text{ N/mm}^2$  an.

d.) Damit der Riemen „ein Moment übertragen“ kann, muss er vorgespannt werden, damit  $F_1$  und  $F_2$  Zugkräfte sind. Die Vorspannkraft  $F_V$  ist ebenso eine Zugkraft und im ganzen Riemen konstant. Sie muss so gewählt werden, dass bei Belastung die Vorspannkraft  $F_V$  und eine Differenzkraft  $\Delta F$  die Kraft  $F_2$  und Vorspannkraft  $F_V$  minus der Differenzkraft  $\Delta F$  die Kraft  $F_1$  ergeben. Die zweifache Differenzkraft multipliziert mit dem Radradius ergibt auch das übertragende Moment  $M_N = M$ .

$$F_V + \Delta F = F_2, \quad F_V - \Delta F = F_1$$

$$\Rightarrow 2F_V = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow \quad F_V = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{200 + 1000}{2} = 600N$$

$$\Rightarrow \Delta F = F_2 - F_V = 1000 - 600 = 400N$$

e.) Ohne Belastung, bzw. nur mit Vorspannung, wirkt im Riemen überall die Normalkraft  $F_V = 600N$ . Daraus kann die Normalspannung im unbelasteten Zustand ermittelt werden.

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{Riemen}}} = \frac{F_V}{A_{\text{Riemen}}} = \frac{600}{25} = 24 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Mit dem Hookeschen Gesetz kann damit die konstante Dehnung ermittelt werden. Dafür wird der Elastizitätsmodul  $E_{\text{Riemen}} = 4000N/\text{mm}^2$  benötigt.

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{24}{4000} = 0.006$$

Im vorgespannten, aber unbelasteten Zustand hat der Riemen die Länge  $L_V$ .

$$L_V = 2 \frac{\pi D_{\text{Rad}}}{2} + 2 \cdot \sqrt{100^2 + 100^2} = 597mm$$

Im nicht eingebauten Zustand hat der Riemen die Ausgangslänge  $L_0$ . Über die Dehnung  $\varepsilon$  und die Länge  $L_V$  kann  $L_0$  bestimmt werden.  $\Delta L$  ist die Änderung der Länge beim Einbau.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_V - L_0}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon L_0 = L_V - L_0$$

$$\Rightarrow L_0(1 + \varepsilon) = L_V \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{L_V}{(1 + \varepsilon)} = \frac{597}{1 + 0.006} = 593.4mm$$

Der Riemen dehnt sich beim Einbau um  $\Delta L = 3.6mm$ .

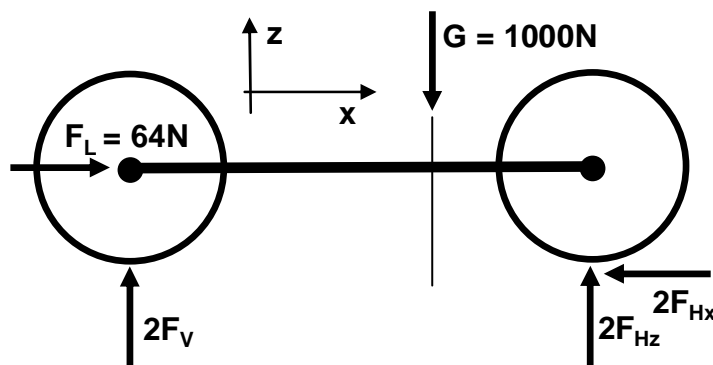
f.) Man muss den Raddurchmesser vergrößern, da dann kleinere Riemenkräfte infolge der größeren Hebelarme das gleiche Moment erzeugen.

**Lösungen Aufgabe 15:**

a.) Für die Luftwiderstandskraft  $F_L$  erhält man mit  $v = 36\text{km/h} = 10\text{m/s}$ .

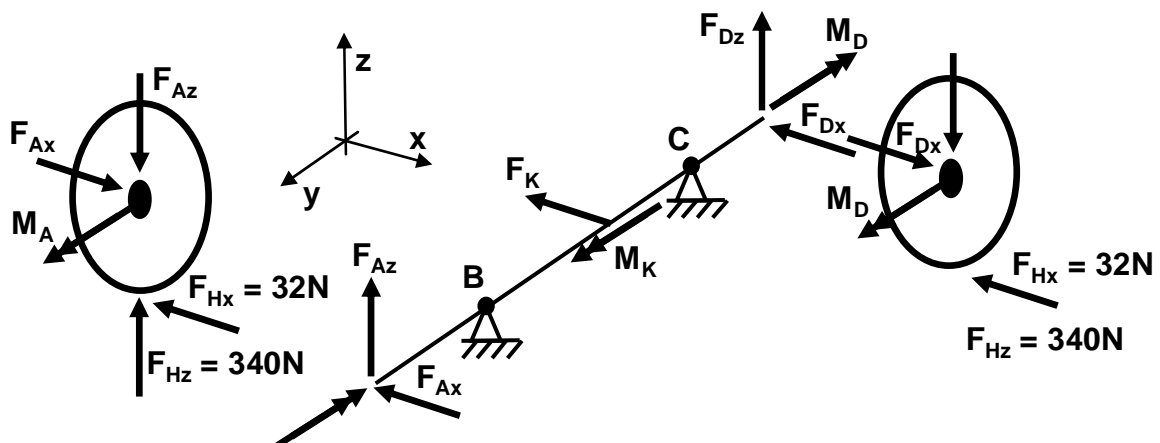
$$F_L = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 = 0.5 \frac{16}{15} \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 10^2 = 64$$

Das Kettcar ist symmetrisch. Daher kann es zur Bestimmung der Straßenkräfte in die skizzierte xz-Ebene projiziert werden.



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_L - 2F_{Hx} &= 0 & \Rightarrow & \quad F_{Hx} = 32\text{N} \\ \sum M_y|_H = 0: \quad -250F_L - 1200 \cdot 2F_V + 400G &= 0 & \Rightarrow & \quad F_V = 160\text{N} \\ \sum F_z = 0: \quad 2F_V - G + 2F_{Hz} &= 0 & \Rightarrow & \quad F_{Hz} = 340\text{N} \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Antriebsmoment  $M_K$  wird die hintere Radachse teilweise frei geschnitten.



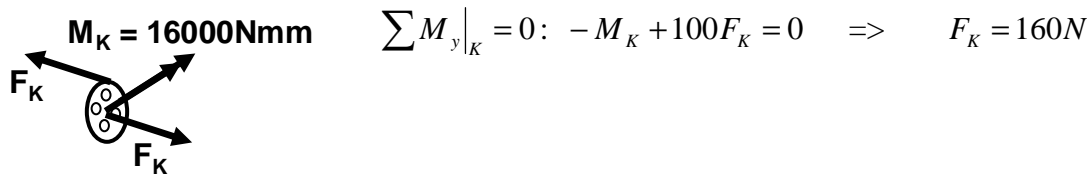
Aus Gründen der Symmetrie erkennt man sofort, dass die Kräfte und Momente an beiden Rädern identisch sind. Bilanz des Momentes um die y-Achse am Rad A:

$$\sum M_y|_A = 0: \quad M_A - 250F_{Hx} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 8000\text{Nmm} \quad \Rightarrow \quad M_D = 8000\text{Nmm}$$

Bilanz des Momentes um die Radachse:

$$\sum M_y|_A = 0: \quad -M_A + M_K - M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_K = 16000\text{Nmm}$$

Der Fahrer muss ein Antriebsmoment  $M_K = 16\text{Nm}$  erzeugen. Zur Berechnung der dazu notwendigen Kettenkraft  $F_K$  wird das hintere Kettenrad frei geschnitten.



b.) Die maximale horizontale Kraft  $F_{Hx,max}$ , die von der Strasse auf das Rad übertragen werden kann, beträgt  $\mu_0 F_{Hz}$ . Bilanz des Momentes mit  $M_{A,max} = 0.5M_{K,max}$ .

$$\sum M_y|_A = 0: M_{A,max} - 250F_{Hx,max} = 0.5M_{K,max} - 250\mu_0 F_{Hz} = 0$$

$$\Rightarrow M_{K,max} = 85000\text{Nmm}$$

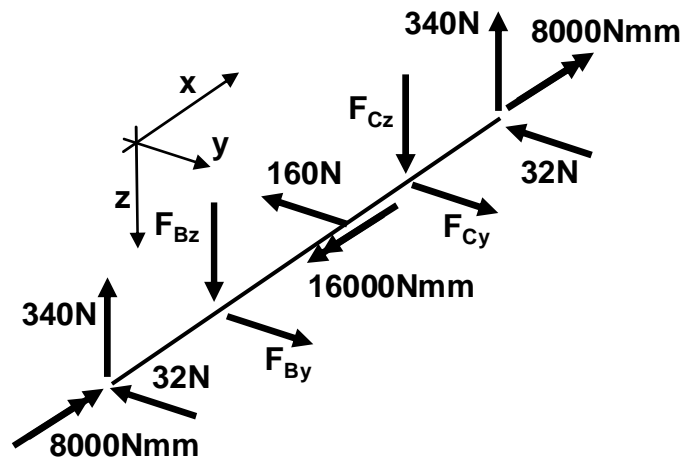
c.) Innere Kräfte und Momente an der hinteren Radachse:

Bilanz der Kräfte am Rad A:

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - F_{Hx} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 32\text{N} \Rightarrow F_{Dx} = 32\text{N}$$

$$\sum F_z = 0: F_{Az} - F_{Hz} = 0 \Rightarrow F_{Az} = 340\text{N} \Rightarrow F_{Dz} = 340\text{N}$$

Bis auf die Kräfte an den Achslagerungen sind alle Kräfte und Momente, die an der Hinterachse wirksam sind bekannt. Für die weitere Betrachtung wird ein achsenspezifisches Koordinatensystem eingeführt.

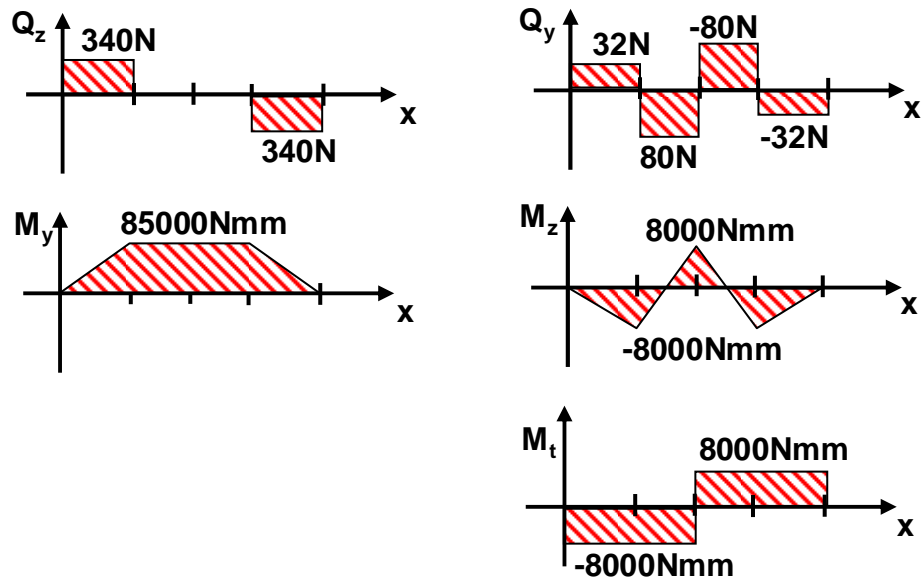


$$\sum M_y|_B = 0: -250 \cdot 340 - 400F_{Cz} + 650 \cdot 340 = 0 \Rightarrow F_{Cz} = 340\text{N}$$

$$\sum F_z = 0: -340 + F_{Bz} + F_{Cz} - 340 = 0 \Rightarrow F_{Bz} = 340\text{N}$$

$$\sum M_z|_B = 0: 250 \cdot 32 - 200 \cdot 160 + 400 \cdot F_{Cy} - 650 \cdot 32 = 0 \Rightarrow F_{Cy} = 112\text{N}$$

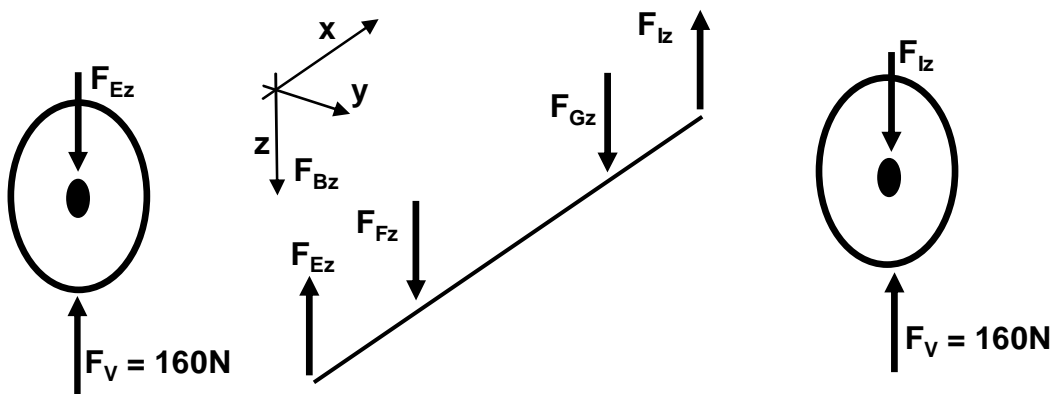
$$\sum F_y = 0: -32 + F_{By} - 160 + F_{Cy} - 32 = 0 \Rightarrow F_{By} = 112\text{N}$$



Innere Kräfte und Momente an der vorderen Radachse:

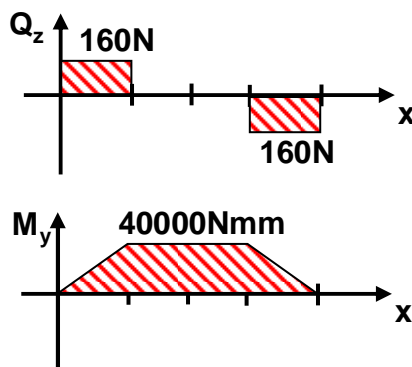
Bilanz der Kräfte am Rad A:

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Ez} - F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ez} = 160N \quad \Rightarrow \quad F_{Iz} = 340N$$



$$\sum M_y|_F = 0: \quad -250 \cdot F_{Ez} - 400 F_{Gz} + 650 \cdot 160 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Fz} = 340N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -160 + F_{Fz} + F_{Cz} - 160 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Gz} = 340N$$



d.) Das Kettcar legt pro Sekunde die Strecke  $S = 10\text{m}$  zurück. Der Umfang  $U$  der Räder beträgt mit dem Radius  $R = 0.25\text{m}$ :

$$U = 2\pi R = 2\pi \cdot 0.250 = 1.57\text{m}$$

Die Räder drehen sich  $n$  mal pro Sekunde.

$$n = \frac{S}{U} = 6.37$$

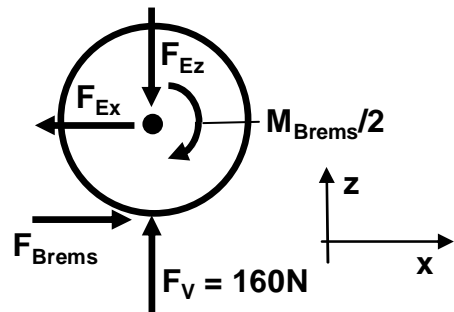
Dies ergibt die Drehgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi n = 40 \frac{1}{s}$$

Die Leistung ist das Produkt von Drehmoment mal Drehgeschwindigkeit, wobei das Moment in Nm einzusetzen ist. Der „sehr gut trainierte“ Kettcar-Fahrer benötigt die Leistung  $P$ :

$$P = M\omega = 16 \cdot 40 = 640\text{W}$$

e.) Die maximale Bremskraft  $F_{\text{Brems,max}}$ , die von der Straße auf das Rad übertragen werden kann, beträgt  $\mu_0 F_V$ . Die Bilanz des Momentes am Vorderrad ergibt das maximale Bremsmoment.



$$\sum M_y|_E = 0: \frac{M_{\text{Brems,max}}}{2} - 250F_{\text{Brems,max}} = \frac{M_{\text{Brems,max}}}{2} - 250\mu_0 F_V = 0$$

$$\Rightarrow M_{\text{Brems,max}} = 20000\text{Nmm} \quad \Rightarrow F_{\text{Brems,max}} = \mu_0 F_V = 80\text{N}$$

f.) Bei konstanter Bremskraft resultiert eine gleichmäßig beschleunigte Bremsbewegung mit konstanter Beschleunigung  $a$ .

$$a = \frac{2F_{\text{Brems,max}}}{m} = \frac{2F_{\text{Brems,max}}}{G/g} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10}{1000} = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für die Bremszeit  $t$  gilt bei konstanter Beschleunigung  $a$ :

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{10}{1.6} = 6.25\text{s}$$

Für den Bremsweg  $S$  gilt bei konstanter Beschleunigung  $a$ :

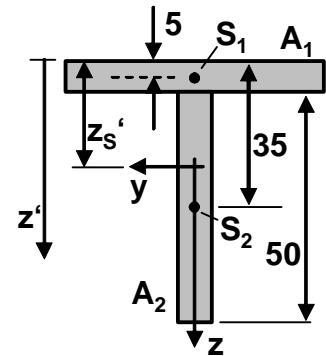
$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}0.8 \cdot 6.25^2 = 15.625\text{m}$$

**Lösungen Aufgabe 16:**

Der Gesamtflächenmittelpunkt aller Geometrien liegt im Koordinatenursprung ( $y = 0, z = 0$ ).

Geometrie 1 (exaktes Flächenträgheitsmoment):

Da die Geometrie nicht symmetrisch zu einer waagrechten Linie ist, muss für die Berechnung des exakten Flächenträgheitsmoments vorab die Lage des Gesamtflächenmittelpunkt ermittelt werden. Ein Bezugskoordinatensystem  $z'$  wird eingeführt, welches an der Bauteiloberkante seinen Ursprung hat. Die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes ist dann durch den Abstand  $z'_s$  gegeben. Für die Berechnung dieses Abstandes wird die Geometrie wie dargestellt in 2 Teilflächen zerlegt. Man benötigt die Flächeninhalte  $A_i$  der Teilflächen und die Lage ihrer Schwerpunkte  $S_i$  im Bezugskoordinatensystem  $z'$ . Die Skizze ergibt:



$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 5 \text{ mm}$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = 35 \text{ mm} \quad (B_i: \text{Breite}, H_i: \text{Höhe})$$

Damit ermittelt man den Abstand  $z'_s$ , welchen man für die Berechnung der Steinerschen Anteile des Flächenträgheitsmoments benötigt.

$$z'_s = \frac{1}{A_1 + A_2} (A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2}) = \frac{1}{600 + 500} (600 \cdot 5 + 500 \cdot 35) = 18.64 \text{ mm}$$

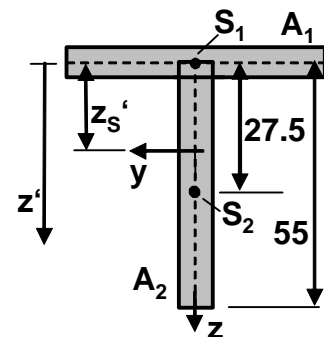
Bei den Steinerschen Anteilen der Teilflächen muss jeweils der Abstand in  $z$ -Richtung zwischen dem Gesamtflächenmittelpunkt und dem Flächenmittelpunkt der Teilfläche berücksichtigt werden.

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (z'_{S1} - z'_s)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 (z'_{S2} - z'_s)^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(5 - 18.64)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500(35 - 18.64)^2 = 354621 \text{ mm}^4$$

Geometrie 1 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments):

Beim dünnwandigen Ansatz reduziert man die Querschnittsfläche auf einzelne Linien (Profilmittellinien, gestrichelt dargestellt), welchen man die Wandstärke als Dicke zuordnet. Überlappende und vernachlässigte Flächen werden akzeptiert, da deren Einfluss durch die Dünnwandigkeit nur gering ist. Alle Maße werden auf die Profilmittellinien bezogen.



Wieder muss vorab die Lage des Gesamtflächenmittelpunkt ermittelt werden. Ein Bezugskoordinatensystem  $z'$  wird eingeführt, welches an der Profilmittellinie der waagrechten Teilfläche seinen Ursprung hat. Man benötigt die Flächeninhalte  $A_i$  der Teilflächen und die Lage ihrer Schwerpunkte  $S_i$  im Bezugskoordinatensystem  $z'$ . Die Skizze ergibt:

$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 0$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 55 = 550 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = 27.5 \text{ mm} \quad (B_i: \text{Breite}, H_i: \text{Höhe})$$



Damit ermittelt man den Abstand  $z'_s$ , welchen man für die Berechnung der Steinerschen Anteile des Flächenträgheitsmoments benötigt.

$$z'_s = \frac{1}{A_1 + A_2} (A_1 z'_{s1} + A_2 z'_{s2}) = \frac{1}{600 + 550} (600 \cdot 0 + 550 \cdot 27.5) = 13.15 \text{ mm}$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (z'_{s1} - z'_s)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 (z'_{s2} - z'_s)^2$$

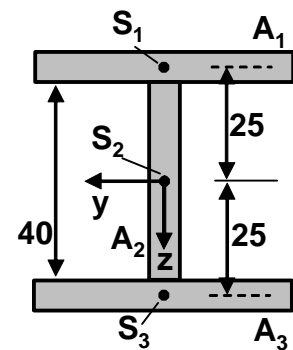
$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(0 - 13.15)^2 + \frac{10 \cdot 55^3}{12} + 550(27.5 - 13.15)^2 = 360657 \text{ mm}^4$$

Fehler  $\varepsilon$  bei Geometrie 1 mit dünnwandigem Ansatz:

$$\varepsilon = \left| \frac{354621 - 360657}{354621} \right| \cdot 100\% = 1.7\%$$

Geometrie 2 (exaktes Flächenträgheitsmoment):

Die Geometrie ist symmetrisch zur waagrechten Mittellinie. Das bedeutet, die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes liegt auf dieser Mittellinie und muss nicht ausgerechnet werden. Die Querschnittsfläche wird in drei Teilflächen zerlegt. Die Abstände der Schwerpunkte  $S_i$  der Teilflächen vom Gesamtflächenmittelpunkt können direkt angegeben werden.



$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s1} = -25 \text{ mm}$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 40 = 400 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s2} = 0$$

$$A_3 = B_3 H_3 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s3} = 25 \text{ mm} \quad (B_i: \text{Breite}, H_i: \text{Höhe})$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 z_{s1}^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 z_{s2}^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 z_{s3}^2$$

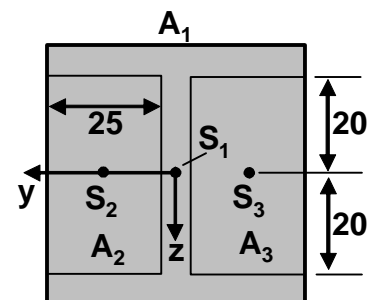
$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(-25)^2 + \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400 \cdot 0^2 + \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600 \cdot 25^2 = 813333 \text{ mm}^4$$

Alternativ kann man das Flächenträgheitsmoment berechnen, wenn man die Querschnittsfläche aus einem Quadrat der Breite 60 minus zwei Rechtecke der Breite 25 und der Höhe 40 betrachtet.

$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s1} = 0$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 25 \cdot 40 = 1000 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s2} = 0$$

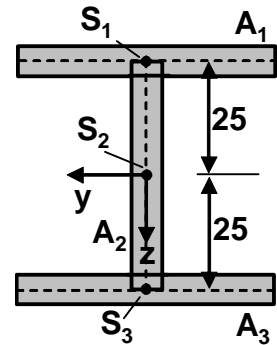
$$A_3 = B_3 H_3 = 25 \cdot 40 = 1000 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{s3} = 0$$



Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 z_{S1}^2 - \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 z_{S2}^2 - \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 z_{S3}^2 = \frac{B_1 H_1^3}{12} - \frac{B_2 H_2^3}{12} - \frac{B_3 H_3^3}{12}$$

$$= \frac{60 \cdot 60^3}{12} - \frac{25 \cdot 40^3}{12} - \frac{25 \cdot 40^3}{12} = 813333 \text{ mm}^4$$



Geometrie 2 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments):

Beim dünnwandigen Ansatz bezieht man alle Abmessungen auf die Profilmittellinien und weist diesen Dicken zu.

$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{S1} = -25 \text{ mm}$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{S2} = 0$$

$$A_3 = B_3 H_3 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z_{S3} = 25 \text{ mm}$$

(B<sub>i</sub>: Breite, H<sub>i</sub>: Höhe)

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 z_{S1}^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 z_{S2}^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 z_{S3}^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(-25)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500 \cdot 0^2 + \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600 \cdot 25^2 = 864167 \text{ mm}^4$$

Fehler ε bei Geometrie 2 mit dünnwandigem Ansatz:

$$\varepsilon = \left| \frac{813333 - 864167}{813333} \right| \cdot 100\% = 6.25\%$$

Geometrie 3 (exaktes Flächenträgheitsmoment):

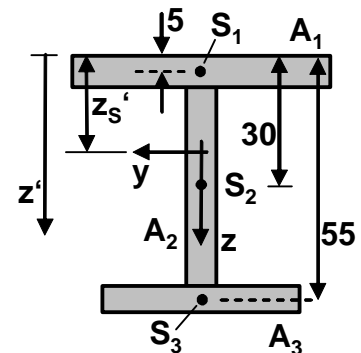
Die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes muss vorab berechnet werden. Die Querschnittsfläche wird in drei Teilflächen zerlegt. Das Bezugskoordinatensystem z' hat seinen Ursprung an der oberen Kante des Querschnittes.

$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 5 \text{ mm}$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 40 = 400 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = 30 \text{ mm}$$

$$A_3 = B_3 H_3 = 45 \cdot 10 = 450 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S3} = 55 \text{ mm}$$

(B<sub>i</sub>: Breite, H<sub>i</sub>: Höhe)



Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} (A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2} + A_3 z'_{S3}) = \frac{1}{600 + 400 + 450} (600 \cdot 5 + 400 \cdot 30 + 450 \cdot 55) = 27.41 \text{ mm}$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (z'_{S1} - z'_S)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 (z'_{S2} - z'_S)^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 (z'_{S3} - z'_S)^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(5 - 27.41)^2 + \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400(30 - 27.41)^2 + \frac{45 \cdot 10^3}{12} + 450(55 - 27.41)^2 = 708635 \text{ mm}^4$$

Geometrie 3 (dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmoments):

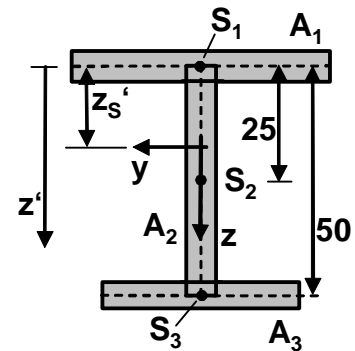
Flächeninhalte und  $z'_S$ -Koordinaten der Flächenmittelpunkte der Teilflächen. Das Bezugskordinatensystem  $z'$  hat seinen Ursprung auf der Profilmittellinie der oberen waagrechten Teilfläche.

$$A_1 = B_1 H_1 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 0$$

$$A_2 = B_2 H_2 = 10 \cdot 50 = 500 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = 25 \text{ mm}$$

$$A_3 = B_3 H_3 = 10 \cdot 45 = 450 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S3} = 45 \text{ mm}$$

( $B_i$ : Breite,  $H_i$ : Höhe)



Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} (A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2} + A_3 z'_{S3}) = \frac{1}{600 + 500 + 450} (600 \cdot 0 + 500 \cdot 25 + 450 \cdot 50) = 22.58 \text{ mm}$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (z'_{S1} - z'_S)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 (z'_{S2} - z'_S)^2 + \frac{B_3 H_3^3}{12} + A_3 (z'_{S3} - z'_S)^2$$

$$= \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 600(0 - 22.58)^2 + \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 500(25 - 22.58)^2 + \frac{45 \cdot 10^3}{12} + 450(50 - 22.58)^2 = 760094 \text{ mm}^4$$

Fehler  $\varepsilon$  bei Geometrie 3 mit dünnwandigem Ansatz:

$$\varepsilon = \left| \frac{708635 - 760094}{708635} \right| \cdot 100\% = 7.26\%$$

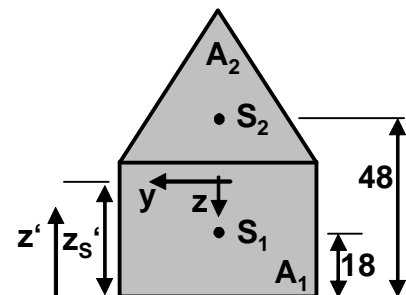
Geometrie 4:

Die Querschnittsfläche wird in ein Rechteck  $A_1$  und in ein Dreieck  $A_2$  zerlegt. Im Bezugskordinatensystem  $z'$  gelten die folgenden Abmessungen:

$$A_1 = B_1 H_1 = 45 \cdot 36 = 1620 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 18$$

$$A_2 = \frac{B_2 H_2}{2} = \frac{45 \cdot 36}{2} = 810 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = 48 \text{ mm}$$

(vgl. Aufgabe 5 und 6)



Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_S = \frac{1}{A_1 + A_2} (A_1 z'_{S1} + A_2 z'_{S2}) = \frac{1}{1620 + 810} (1620 \cdot 18 + 810 \cdot 48) = 28 \text{ mm}$$

Flächenträgheitsmoment:

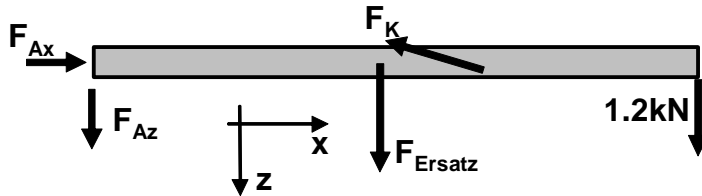
$$I_y = \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (-z'_{S1} + z'_S)^2 + \frac{B_2 H_2^3}{12} + A_2 (-z'_{S2} + z'_S)^2$$

$$= \frac{45 \cdot 36^3}{12} + 1620(-18 + 28)^2 + \frac{45 \cdot 36^3}{36} + 810(-48 + 28)^2 = 719280 \text{ mm}^4$$

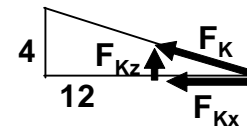
**Lösungen Aufgabe 17:**

Der Balken wird frei geschnitten, wobei für die Berechnung der Kettenkraft  $F_K$  und der Lagerkräfte die Streckenlast durch die Ersatzkraft  $F_{Ersatz}$ , die bei  $x = 10\text{m}$  wirkt, ersetzt wird.

$$F_{Ersatz} = qL = 0.1 \cdot 20 = 2\text{kN}$$



Die Kettenkraft muss in eine waagrechte und in eine senkrechte Komponente zerlegt werden. Das geometrische Dreieck und das Kräfte-dreieck ergeben:



$$\frac{F_{Kx}}{F_{Kz}} = \frac{12}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad F_{Kx} = 3F_{Kz}$$

Gleichgewichtsbedingungen:

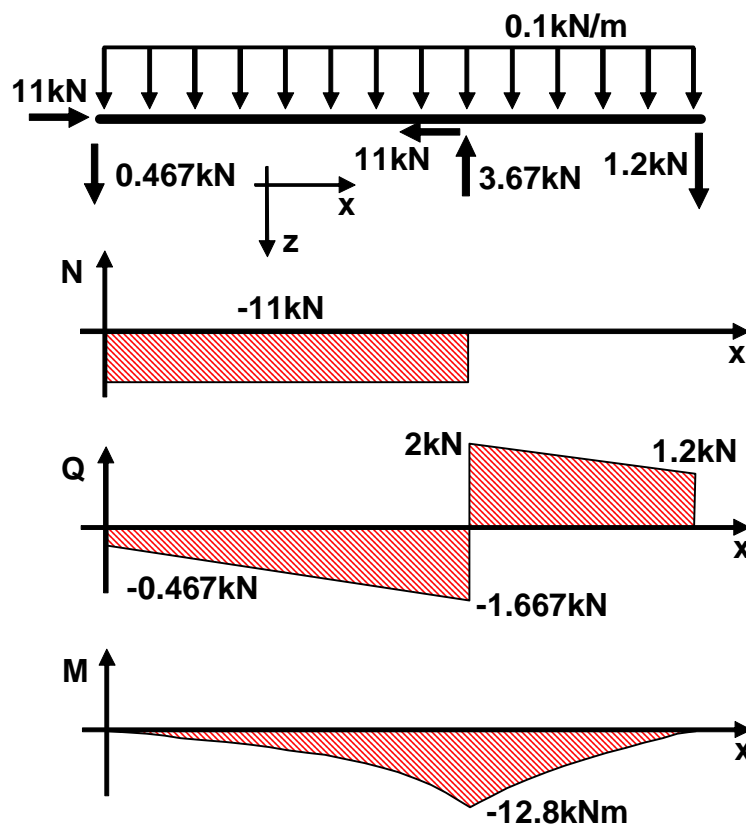
$$\sum M|_A = 0: \quad -10F_{Ersatz} + 12F_{Kz} - 20 \cdot 1.2 = -10 \cdot 2 + 12F_{Kz} - 20 \cdot 1.2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Kz} = \frac{11}{3}\text{kN} = 3.667\text{kN} \quad \Rightarrow \quad F_{Kx} = 3F_{Kz} = 11\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 11\text{kN}$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Ersatz} - F_{Kz} + 1.2 = F_{Az} + 1.2 - 3.667 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 0.467\text{kN}$$

Innere Kräfte und Momente:



Das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  kann von Aufgabe 33, Geometrie 2 übernommen werden. Die Querschnittsfläche setzt sich aus den Flächeninhalten der drei Teilflächen zusammen.

$$I_y = 813333 \text{ mm}^4 \quad \text{und} \quad A = A_1 + A_2 + A_3 = 600 + 400 + 600 = 1600 \text{ mm}^2$$

Zuerst werden die **Normalspannungen  $\sigma_{\text{Biegung}}$  infolge des Biegemoments** berechnet. Es werden die maximalen Spannungen gesucht. Diese befinden sich an der Stelle des maximalen Moments bei  $x = 12\text{m}$ . Daher muss in der Formel für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments das maximale Moment  $M_{\text{max}} = -12.8\text{kNm}$  verwendet werden.

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M_{\text{max}}}{I_y} z = \frac{-12.8 \cdot 10^6}{813333} z = -15.74 z$$

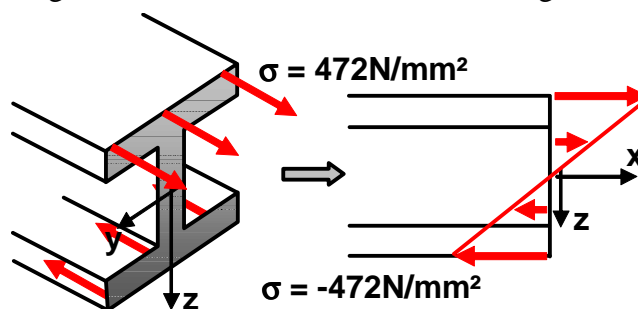
Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein negativer  $z$ -Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte negative Wert beträgt  $z = -30\text{mm}$ . Dann befindet man sich an der Oberseite des Profils. An dieser Seite wird das Profil infolge des Biegemoments in  $x$ -Richtung auseinander gezogen.

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = -30) = -15.74 \cdot (-30) = 472 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein positiver  $z$ -Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der betragsmäßig größte positive Wert lautet  $z = 30\text{mm}$ . Dann befindet man sich an der Unterseite des Profils. An dieser Seite wird das Profil infolge des Biegemoments in  $x$ -Richtung zusammen gedrückt.

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = 30) = -15.74 \cdot 30 = -472 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

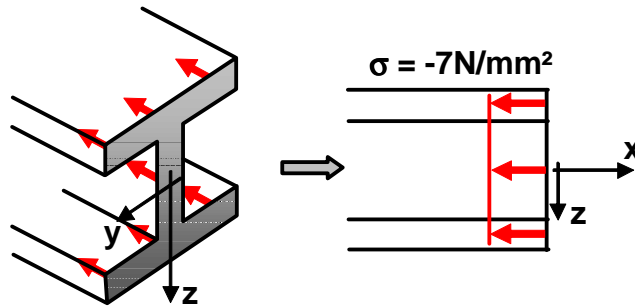
Zeichnet man die Maximalwerte an Ober- und Unterseite in das Profil ein, kann man den Spannungsverlauf in Abhängigkeit von  $z$  darstellen. Die Formel für die Berechnung der Biegespannung ist linear. Daher können die Extremwerte durch eine Gerade verbunden werden. Der Spannungsverlauf wird durch diese Gerade dargestellt.



Auch die **Normalkraft erzeugt Normalspannungen**. Diese sind über dem Querschnitt konstant. Da die Querschnittsfläche des Balkens sich nicht ändert, erhält man im Bereich der maximalen Normalkraft  $N_{\text{max}} = -11\text{kN}$  die maximale Normalspannung infolge Normalkraft.

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} = \frac{-11000}{1600} = -6.875 \approx -7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

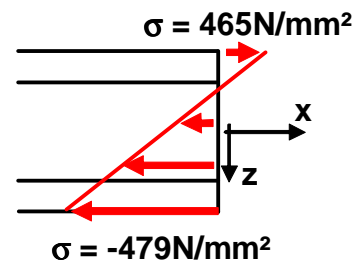
Auch diese negative Normalspannungen bzw. Druckspannungen infolge Normalkraft können in der Querschnittsfläche eingetragen werden.



Sind nun die maximalen Normalspannungen im Bauteil gesucht, muss man die Normalspannungen infolge Biegemoments und die Normalspannungen infolge Normalkraft überlagern. Der hier untersuchte Balken hat im Bereich von  $x = 12\text{m}$  sein maximales Moment. Da sich die Normalkraft aber an dieser Position ändert ( $N = -11\text{kN}$  bei  $x < 12\text{m}$  bzw.  $N = 0$  bei  $x > 12\text{m}$ ) muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Es muss eine Position unmittelbar vor  $x = 12\text{m}$  und unmittelbar nach  $x = 12\text{m}$  betrachtet werden. Die dabei auftretenden Maximalwerte stellen die maximalen Zug- und Druckspannungen dar.

Position 1,  $x < 12\text{m}$ :

Das Biegemoment und die Normalkraft sind ungleich null und werden überlagert. Das bedeutet, dass die Normalspannungen infolge des Biegemoments und infolge Normalkraft addiert werden. Dies ergibt die Extremwerte an Unter- und Oberseite:



$$\text{Unterseite: } \sigma_{\text{Druck},1} = \sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = -472 - 7 = -479 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Oberseite: } \sigma_{\text{Zug},1} = \sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = 472 - 7 = 465 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Position 2,  $x > 12\text{m}$ :

Hier ist nur das Biegemoment ungleich null. Daher entspricht der überlagerte Spannungsverlauf dem Spannungsverlauf infolge des Biegemoments.

$$\text{Unterseite: } \sigma_{\text{Druck},2} = \sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = -472 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Oberseite: } \sigma_{\text{Zug},2} = \sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = 472 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

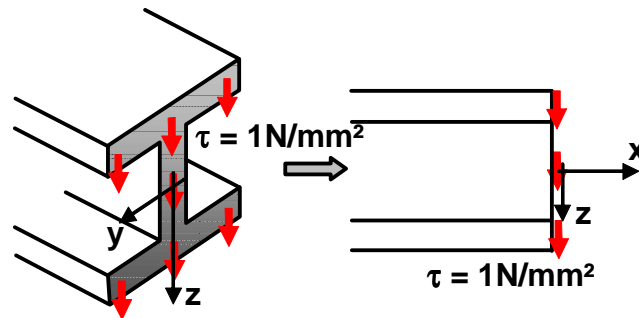
Maximale Normalspannungen im Balken:

$$\sigma_{\text{max Druck}} = \sigma_{\text{Druck},1} = -479 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{max Zug}} = \sigma_{\text{Zug},2} = 472 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

In diesem Beispiel ist die Normalspannung infolge Normalkraft viel kleiner als die Normalspannung infolge des Biegemoments. Dies tritt sehr häufig auf. Daher ist es oft zulässig, die Normalspannung infolge Normalkraft zu vernachlässigen und nur die Normalspannungen infolge des Biegemoments zu berücksichtigen.

Die **Querkraft verursacht die Schubspannung infolge Querkraft**. Mit den in der Vorlesung gewählten Annahmen ist sie über der Querschnittsfläche konstant. Die maximale Schubspannung infolge Querkraft erhält man im Bereich der maximalen Querkraft  $Q_{\max}$  an der Position  $x = 12\text{m}$ . Da im Balken keine Torsion auftritt, ist sie die einzige Schubspannung. Auch Sie kann in die Querschnittsfläche eingezeichnet werden.

$$\sigma_{\max \text{ Schub}} = \sigma_{\text{Schub, Querkraft}} = \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{2000}{1600} = 1.25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Im Verhältnis zu den Normalspannungen ist die Schubspannung infolge der Querkraft sehr klein. Außer bei sehr kurzen Balken tritt dies immer ein. Daher kann häufig die Schubspannung infolge Querkraft vernachlässigt werden.

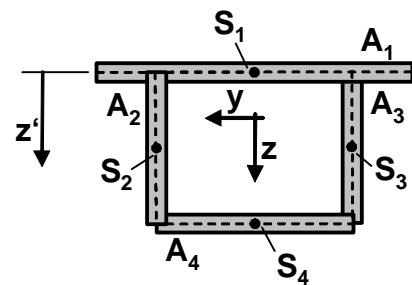
### Lösungen Aufgabe 18:

Zuerst wird das Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Querschnitts berechnet. Dazu wird die Gesamtquerschnittsfläche in vier Teilflächen zerlegt. Für die Berechnung des Gesamtflächenmittelpunktes wird auf Höhe der oberen Profilmittellinie der Ursprung des Bezugskoordinatensystem  $z'$  gewählt.

$$A_1 = B_1 H_1 = 700 \cdot 2 = 1400 \text{mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S1} = 0$$

$$A_2 = A_3 = B_2 H_2 = 2 \cdot 300 = 600 \text{mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S2} = z'_{S3} = 150 \text{mm}$$

$$A_4 = B_4 H_4 = 400 \cdot 2 = 800 \text{mm}^2 \quad \text{und} \quad z'_{S4} = 300 \text{mm} \quad (B_i: \text{Breite}, H_i: \text{Höhe})$$



Die Flächen  $A_2$  und  $A_3$  verhalten sich bei der Berechnung identisch. Statt den Werten für die Fläche  $A_3$  können die Werte der Fläche  $A_2$  zweimal verwendet werden.

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$\begin{aligned} z'_S &= \frac{1}{A_1 + 2A_2 + A_4} (A_1 z'_{S1} + 2A_2 z'_{S2} + A_4 z'_{S4}) \\ &= \frac{1}{1400 + 2 \cdot 600 + 800} (1400 \cdot 0 + 2 \cdot 600 \cdot 150 + 800 \cdot 300) = 123.5 \text{mm} \end{aligned}$$

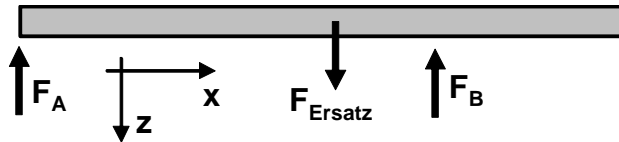
Flächenträgheitsmoment:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{B_1 H_1^3}{12} + A_1 (z'_{S1} - z'_S)^2 + 2 \frac{B_2 H_2^3}{12} + 2A_2 (z'_{S2} - z'_S)^2 + \frac{B_4 H_4^3}{12} + A_4 (z'_{S4} - z'_S)^2 \\ &= \frac{700 \cdot 2^3}{12} + 1400(0 - 123.5)^2 + 2 \frac{2 \cdot 300^3}{12} + 2 \cdot 600(150 - 123.5)^2 + \frac{400 \cdot 2^3}{12} + 800(300 - 123.5)^2 \end{aligned}$$

$$= 466 \frac{2}{3} + 21353150 + 2 \cdot 4500000 + 2 \cdot 421350 + 266 \frac{2}{3} + 24921800 = 56118383 \frac{1}{3} \approx 56.1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Der Balken wird frei geschnitten und die Streckenlast durch die Ersatzkraft  $F_{\text{Ersatz}}$  ersetzt.  
 Diese greift bei  $x = 3.5\text{m}$  an.

$$F_{\text{Ersatz}} = qL = 40 \cdot 7 = 280 \text{ kN}$$



Gleichgewichtsbedingungen:

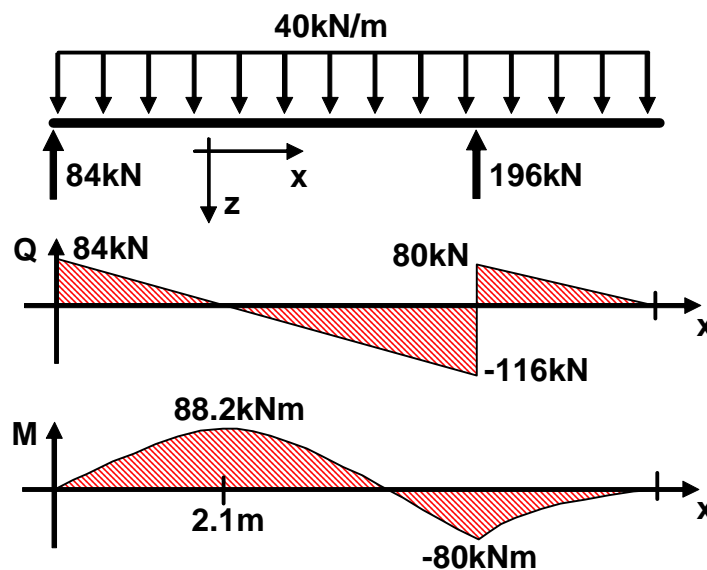
$$\sum M|_A = 0: \quad -3.5 F_{\text{Ersatz}} + 5 F_B = -3.5 \cdot 280 + 5 F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 196 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: \quad \text{es wirken keine Kräfte in x-Richtung}$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_A + F_{\text{Ersatz}} - F_B = -F_A + 280 - 196 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 84 \text{ kN}$$

Innere Kräfte und Momente:

Es wirken keine Kräfte in x-Richtung. Das Moment hat ein Maximum bei  $x = 2.1\text{m}$  und ein Minimum bei  $x = 5\text{m}$ .



Im Balken sind nur **Normalspannungen infolge des Biegemoments** vorhanden. Allerdings ist die Querschnittsfläche des Balkens nicht symmetrisch zur y-Achse. Daher gilt nicht automatisch, dass an der Stelle des größten Betrages des Momentes auch die betragsmäßig größten Spannungen wirken. Daher müssen die Normalspannungen am Ort des Maximums des Momentes  $M_{\text{max}} = 88.2 \text{ kNm}$  und am Ort des Minimums des Momentes  $M_{\text{min}} = -80 \text{ kNm}$  untersucht werden. Die an beiden Positionen gefundenen maximalen Beträge stellen die Maximalspannungen (Zug- und Druckspannungen) im Bauteil dar.



Position 1,  $x = 2.1m$  :

$$\sigma_{\text{Biegemoment},1}(z) = \frac{M_{\text{max}}}{I_y} z = \frac{88.2 \cdot 10^6}{56.1 \cdot 10^6} z = 1.57z$$

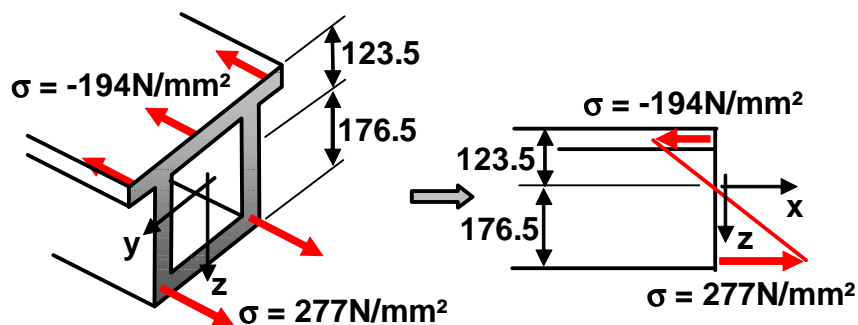
Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein positiver z-Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte positive Wert beträgt  $z = 176.5\text{mm}$ . Dabei wird berücksichtigt, dass das Profil dünnwandig ist. Man nimmt an, dass bei dünnwandigen Profilen sich die Spannung über der Wandstärke kaum bzw. nicht ändert. Dann gilt, dass auf den Außenflächen des Profils die gleichen Spannungswerte wie auf der Profilmittellinie wirksam sind. Daher ist es zulässig, die z-Koordinaten der Profilmittellinie einzusetzen. An der Unterseite sind die maximalen Zugspannungen.

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment},1} = \sigma_{\text{Biegemoment},1}(z = 176.5) = 1.57 \cdot 176.5 = 277 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein negativer z-Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der betragsmäßig größte negative Wert lautet  $z = -123.5\text{mm}$ . Auch hier wird die Dünnwandigkeit ausgenutzt. An der Oberseite des Balkens sind die maximalen Druckspannungen.

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment},1} = \sigma_{\text{Biegemoment},1}(z = -123.5) = 1.57 \cdot (-123.5) = -194 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Die Ergebnisse kann man über der Querschnittsfläche darstellen. Da die Spannungen linear von z abhängig sind, kann man die Extremwerte an Ober und Unterseite mit einer Geraden verbinden und erhält den Verlauf der Spannungen an der Position 1,  $x = 2.1m$ .



Position 2,  $x = 5m$  :

$$\sigma_{\text{Biegemoment},2}(z) = \frac{M_{\text{min}}}{I_y} z = \frac{-80.0 \cdot 10^6}{56.1 \cdot 10^6} z = -1.43z$$

Dies bedeutet, dass für die maximalen positiven Normalspannungen bzw. Zugspannungen ein negativer z-Wert in die Formel eingesetzt werden muss. Der betragsmäßig größte negative Wert beträgt  $z = -123.5\text{mm}$ . An der Oberseite sind die maximalen Zugspannungen.

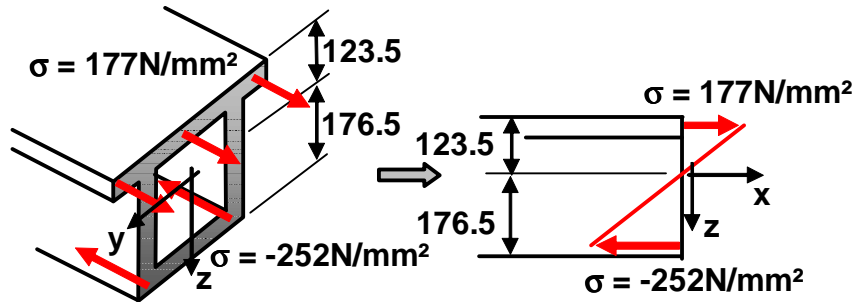
$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment},2} = \sigma_{\text{Biegemoment},2}(z = -123.5) = -1.43 \cdot (-123.5) = 177 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Für die maximalen negativen Normalspannungen bzw. Druckspannungen muss ein positiver z-Wert in die Formel für die Berechnung der Biegespannung eingesetzt werden. Der

betragsmäßig größte positive Wert lautet  $z = 176.5\text{mm}$ . An der Oberseite des Balkens sind die maximalen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max \text{ Druck, Biegemoment } 1} = \sigma_{\text{Biegemoment } 2}(z = 176.5) = -1.43 \cdot 176.5 = -252 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Wieder wird der Spannungsverlauf über dem Querschnitt dargestellt.

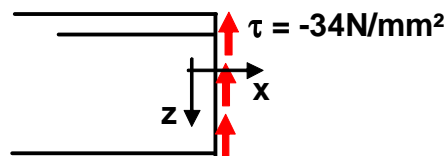


Maximale Zug- und Druckspannungen im Bauteil:

$$\sigma_{\max \text{ Druck}} = \sigma_{\max \text{ Druck, Biegemoment } 1} = -252 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{\max \text{ Zug}} = \sigma_{\max \text{ Zug, Biegemoment } 1} = 277 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die **Querkraft verursacht die Schubspannung infolge Querkraft**. Es wird angenommen, dass Sie über dem Querschnitt konstant ist, Den maximalen Betrag der Schubspannung infolge Querkraft erhält man im Bereich der betragsmäßig größten Querkraft  $Q_{\min} = -116\text{kN}$  an der Position  $x = 5\text{m}$ . Da im Balken keine Torsion auftritt, ist sie die einzige Schubspannung. Auch Sie kann in die Querschnittsfläche eingezeichnet werden. Sie zeigt in Richtung der negativen z-Richtung und hat den Betrag  $34\text{N/mm}^2$ .

$$\sigma_{\min \text{ Schub}} = \sigma_{\text{Schub, Querkraft}} = \frac{Q_{\min}}{A} = \frac{Q_{\min}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{-116000}{3400} = -34 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



### Lösungen Aufgabe 19:

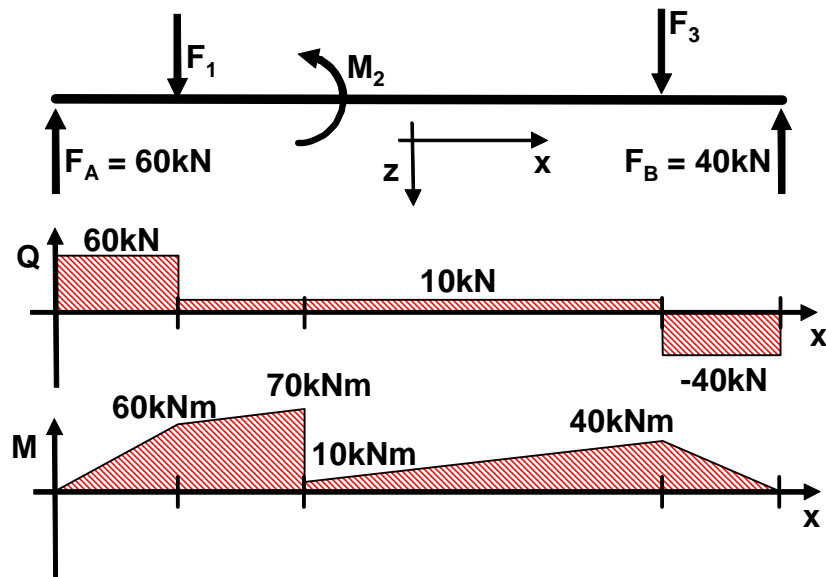
Die Lagerkräfte ersetzen die Lager und werden mit den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt.

$$\sum F_x = 0: \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung}$$

$$\sum M|_A = 0: \quad -1 \cdot F_1 + M_2 - 5F_3 + 6F_B = -1 \cdot 50 + 60 - 5 \cdot 50 + 6F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 40\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_A + F_1 + F_2 - F_B = -F_A + 50 + 50 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 60\text{kN}$$

Innere Kräfte und Momente:



Mit  $i = 1,2$  (erster und zweiter Wellenabschnitt) lautet das Flächenträgheitsmoment für die kreisrunde Vollwelle:

$$I_{y,i} = \frac{\pi}{4} R_i^4 = \frac{\pi}{64} D_i^4 \quad (R_i: \text{Radius}, D_i: \text{Durchmesser})$$

Am Außenradius  $R_i = D_i/2$  erhält man die maximalen Spannungen.

$$\sigma_{\max,i} = \frac{M_{\max,i}}{I_y} \frac{D_i}{2} = \frac{32M_{\max,i}}{\pi D_i^3}$$

Aufgelöst nach dem Durchmesser  $D_i$  erhält man mit  $\sigma_{\max,1} = \sigma_{\max,2} = \sigma_{\max} = 150\text{N/mm}^2$ :

$$D_i = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max,i}}{\pi\sigma_{\max}}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi\sigma_{\max}}} \sqrt[3]{M_{\max,i}} = 0.408 \sqrt[3]{M_{\max,i}}$$

1. Wellenabschnitt (auf ganze Zahlen aufgerundet):

$$M_{\max,1} = 70\text{kNm} = 70 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0.408 \sqrt[3]{70 \cdot 10^6} = 169\text{mm}$$

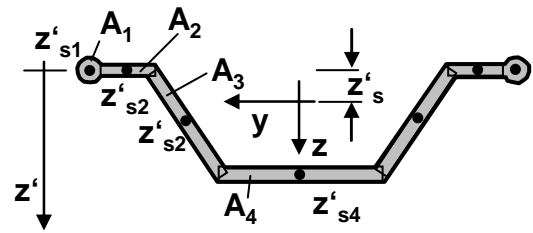
2. Wellenabschnitt (auf ganze Zahlen aufgerundet):

$$M_{\max,2} = 40\text{kNm} = 40 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 0.408 \sqrt[3]{40 \cdot 10^6} = 140\text{mm}$$

**Lösungen Aufgabe 20:**

Geometrie 1:

Das Profil besteht aus 4 Teilflächen, wobei  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  doppelt vorhanden sind.



Vorab muss die Lage des Flächenmittelpunktes bestimmt werden. Dazu wird das Koordinatensystem  $z'$  eingeführt. In diesem Koordinatensystem haben die Flächenmittelpunkte der vier Teilflächen folgende Koordinaten:  
 $z'_{s1} = 0$ ,  $z'_{s2} = 0$ ,  $z'_{s3} = 25$  und  $z'_{s4} = 50$

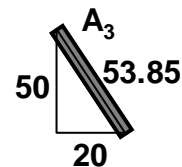
Ebenso werden die Flächeninhalte benötigt. Für die Flächen  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_4$  können diese direkt aus der Skizze entnommen werden.

$$A_1 = 10\text{mm}^2, \quad A_2 = 20 \cdot 2 = 40\text{mm}^2 \quad \text{und} \quad A_4 = 50 \cdot 2 = 100\text{mm}^2$$

Für die Ermittlung von  $A_3$  wird über ein geometrisches Dreieck die Länge  $L_3$  der Fläche berechnet. Die Wandstärke beträgt  $s = 2\text{mm}$ .

$$L_3 = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53.85\text{mm}$$

$$\Rightarrow A_3 = 53.85 \cdot 2 = 107.7\text{mm}^2$$



Die Lage  $z'_s$  des Gesamtflächenmittelpunktes ergibt sich zu:

$$z'_s = \frac{1}{2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4} (2z'_{s1}A_1 + 2z'_{s2}A_2 + 2z'_{s3}A_3 + z'_{s4}A_4) = 25$$

Für die Berechnung des Gesamtflächenträgheitsmoments  $I_y$  muss vorab das Eigenflächenträgheitsmoment  $I_{y1}^*$  der Fläche  $A_1$  ermittelt werden.

$$A_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} = 1.78\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I_{y1}^* = \frac{\pi}{4} R_1^4 = \frac{\pi}{4} 1.78^4 = 7.88\text{mm}^4$$

Die Eigenflächenträgheitsmomente  $I_{y2}^*$  und  $I_{y4}^*$  erhält man über die Standardformel.

$$I_{y2}^* = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13.33\text{mm}^4 \quad \text{und} \quad I_{y4}^* = \frac{B_4 H_4^3}{12} = \frac{50 \cdot 2^3}{12} = 33.33\text{mm}^4$$

Für das Eigenflächenträgheitsmomente  $I_{y3}^*$  muss man die Formel für dünnwandig, schräge Profile verwenden, wobei  $H$  der senkrechte Abstand in  $z'$ -Richtung zwischen Ober- und Unterkante der Profilmittellinie ist.

$$I_{y3}^* = \frac{A_3}{12} H^2 = \frac{107.7}{12} 50^2 = 22437.5\text{mm}^4$$

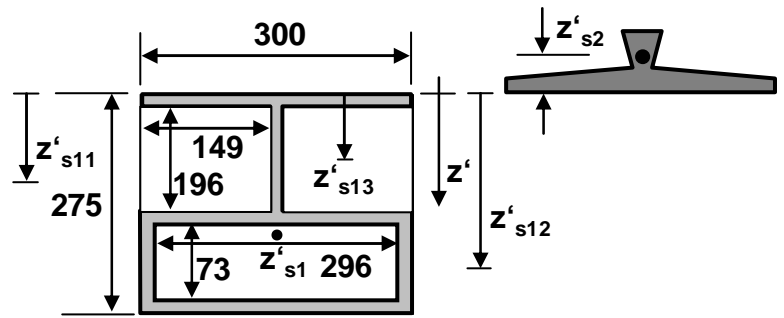
Es ergibt sich das Gesamtflächenträgheitsmoments  $I_y$ :

$$I_y = 2 \sum_{i=1}^3 I_{yi}^* + I_{y4}^* + 2(z'_{s1} - z'_s)^2 A_1 + 2(z'_{s2} - z'_s)^2 A_2 + 2(z'_{s3} - z'_s)^2 A_3 + (z'_{s4} - z'_s)^2 A_4$$

$$\Rightarrow I_y = 44950.75 + 125000 = 169950.75\text{mm}^4$$

Geometrie 2:

Es wird das Bezugssystem  $z'$  eingeführt, bezüglich welchem die Abstände der Flächenmittelpunkte angegeben werden. Das Profil besteht aus 2 Teilflächen, wobei  $A_1, A_2$ . Für die Teilfläche  $A_2$  sind alle notwendigen Angaben bekannt. Es ist zu beachten, dass der Flächenmittelpunkt  $z'_{s2}$  in negativer  $z'$ -Richtung liegt und somit auch einen negativen Wert besitzt.



$$A_2 = 7260\text{mm}^2, \quad z'_{s2} = -35 \quad \text{und} \quad I_{y2}^* = 5230000\text{mm}^4$$

Für die Berechnung der Größen für die Teilfläche  $A_1$  wird diese durch ein großes Rechteck  $A_{11}$  weniger das Rechteck  $A_{12}$  und abzüglich zweimal des Rechtecks  $A_{13}$  ersetzt.

$$A_{11} = 300 \cdot 275 = 82500\text{mm}^2, \quad z'_{s11} = \frac{275}{2} = 137.5$$

$$\text{und} \quad I_{y11}^* = \frac{300 \cdot 275^3}{12} = 519921875\text{mm}^4$$

$$A_{12} = 296 \cdot 73 = 21608\text{mm}^2, \quad z'_{s12} = 275 - 2 - \frac{73}{2} = 236.5$$

$$\text{und} \quad I_{y12}^* = \frac{296 \cdot 73^3}{12} = 9595752.67\text{mm}^4$$

$$A_{13} = 149 \cdot 196 = 29204\text{mm}^2, \quad z'_{s13} = 2 + \frac{196}{2} = 100$$

$$\text{und} \quad I_{y13}^* = \frac{149 \cdot 196^3}{12} = 93491738.67\text{mm}^4$$

Gesamtflächenmittelpunkt:

$$z'_s = \frac{z'_{s11}A_{11} - z'_{s12}A_{12} - 2z'_{s13}A_{13} + z'_{s2}A_2}{A_{11} - A_{12} - 2A_{13} + A_2} = 14.22$$

Gesamtflächenträgheitsmoment:

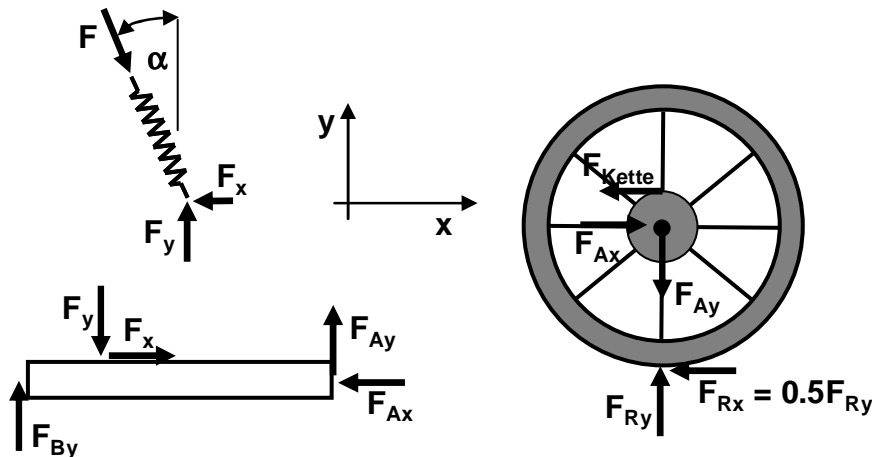
$$I_y = I_{y11}^* + (z'_{s11} - z'_s)^2 A_{11} - I_{y12}^* - (z'_{s12} - z'_s)^2 A_{12} - 2I_{y13}^* - 2(z'_{s13} - z'_s)^2 A_{13} + I_{y2}^* + (z'_{s2} - z'_s)^2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad I_y = 149667441\text{mm}^4$$

**Lösungen Aufgabe 21:**

Die frei geschnittenen Bauteile ergeben das dargestellte Schnittbild. Federn können nur Kräfte in Federrichtung übertragen. Das bedeutet, dass am unteren Ende der Feder auch die Kraft  $F$  wirksam sein muss. Man zerlegt die obere und untere Kraft  $F$  in ihre waagrechten und senkrechten Komponenten. Kräftedreieck und geometrisches Dreieck sind winkelgleich (kongruent).

$$\frac{F_x}{F} = \sin \alpha = 0.6 \quad \Rightarrow \quad F_x = 0.6F \quad \text{und} \quad \frac{F_y}{F} = \cos \alpha = 0.8 \quad \Rightarrow \quad F_y = 0.8F$$



b.) An der Schwinge werden die Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet.

$$\sum M|_A = 0: \quad 5LF_{Ay} - LF_y = 5LF_{Ay} - 0.8LF = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 0.16F$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - F_y + F_{Ay} = F_{By} - 0.8F + 0.16F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = 0.64F$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} + F_x - F_{Ax} = -F_{Bx} + 0.6F - F_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine konkrete Aussage}$$

Mit der bekannten Kraft  $F_{Ay}$  betrachtet man die Gleichgewichtsbedingungen am Rad.

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + F_{Ry} = -0.16F + F_{Ry} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ry} = 0.16F$$

$$\Rightarrow \quad F_{Rx} = 0.5F_{Ry} = 0.08F$$

$$\sum M|_A = 0: \quad R_2 F_{Kette} - R_1 F_{Rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Kette} = \frac{R_1}{R_2} F_{Rx} = 5 \cdot 0.08F = 0.4F$$

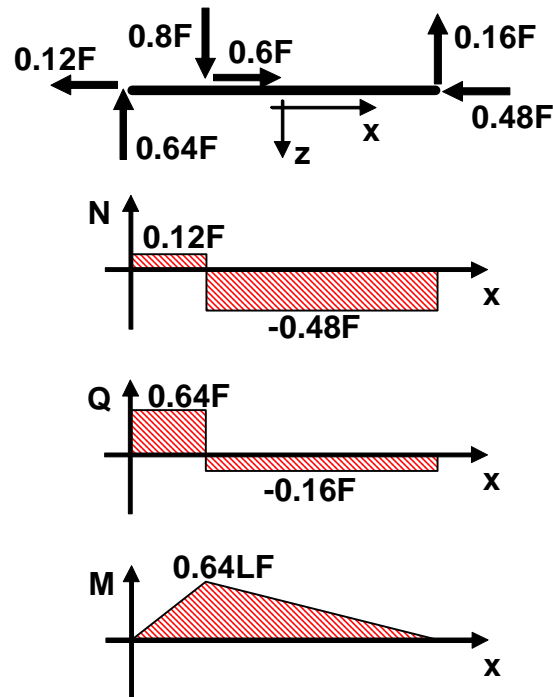
c.) Das verbleibende Kräftegleichgewicht in x-Richtung am Rad wird noch ausgewertet.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Kette} - F_{Rx} + F_{Ax} = -0.4F - 0.08F + F_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 0.48F$$

Mit  $F_{Ax}$  wechselt man zurück zur Schwinge und wertet das jetzt aussagefähige Kräftegleichgewicht in x-Richtung aus.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} + F_x - F_{Ax} = -F_{Bx} + 0.6F - F_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = 0.12F$$

Innere Kräfte und Momente in der Schwinge:

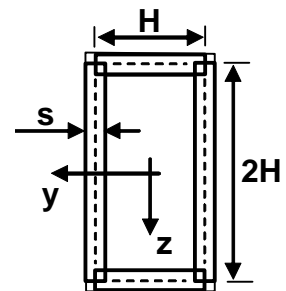


d.) Für die Berechnung der Spannungen wird die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment benötigt. Das dünnwandige Rechteck wird in vier Teilflächen zerlegt. Die Querschnittsfläche beträgt dann:

$$A = 2 \cdot s \cdot 2H + 2 \cdot Hs = 6Hs$$

Für das Flächenträgheitsmoment gilt:

$$I_y = 2 \frac{s(2H)^3}{12} + 2 \frac{Hs^3}{12} + 2 \cdot H^2 Hs = \frac{10}{3} H^3 s + \underbrace{\frac{1}{6} Hs^3}_{\approx 0} = \frac{10}{3} H^3 s$$



Dabei ist berücksichtigt, dass bei dünnwandigen Profilen  $s \ll H$  gilt und somit der Term  $Hs^3$  vernachlässigbar klein gegenüber dem Term  $H^3s$  ist.

Am Punkt  $x = L$  hat man das größte Biegemoment. Da die Normalkraft bei  $x < L$  unterschiedlich zu  $x > L$  ist, muss man beide Fälle betrachten. Position 1 liegt ein „kleines Stück“ vor  $x = L$ , Position 2 liegt ein „kleines Stück“ hinter  $x = L$ . An beiden Positionen wirkt ungefähr das maximale Moment.

Position 1:

Zuerst werden die **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet:

$$\sigma_{\text{Biegemoment},1}(z) = \frac{M_{\max}}{I_y} z = \frac{0.64FL}{\frac{10}{3} H^3 s} z = 0.192 \frac{FL}{H^3 s} z = 0.192 \frac{F}{H^3 s} \frac{H}{2} z = 0.096 \frac{F}{H^2 s} z$$

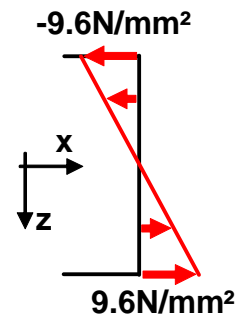
Die maximalen Zugspannungen sind positiv, daher muss für  $z$  der größte mögliche positive  $z$ -Wert eingesetzt werden. Mit  $z = H$  befindet man sich an der Unterseite der Schwinge. Dabei

ist wieder die Dünnwandigkeit des Bleches berücksichtigt. Über die kleine Wandstärke kann die Spannung näherungsweise konstant betrachtet werden. Daher ist es ausreichend die Spannung auf der Profilmittellinie zu berechnen.

$$\sigma_{\max \text{ Zug, Biegemoment},1} = \sigma_{\text{Biegemoment},1}(z = H) = 0.096 \frac{F}{sH} = 0.096 \cdot 100 = 9.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

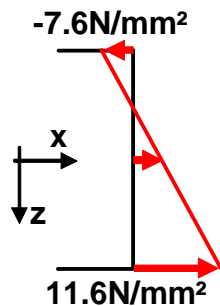
Die maximalen Druckspannungen infolge Biegemoment findet man dann an der Oberseite der Schwinge bei  $z = -H$ .

$$\sigma_{\max \text{ Druck, Biegemoment},1} = \sigma_{\text{Biegemoment},1}(z = -H) = -0.096 \frac{F}{sH} = -0.096 \cdot 100 = -9.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

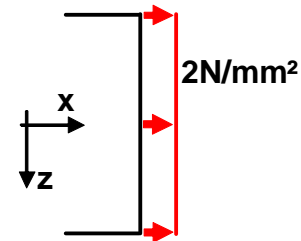


Auch die **Normalkraft erzeugt eine Normalspannung**.

$$\sigma_{\text{Normalkraft},1} = \frac{N}{A} = \frac{0.12F}{6Hs} = 0.02 \frac{F}{sH} = 0.02 \cdot 100 = 2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$



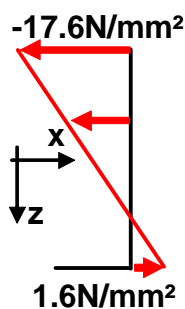
Die Normalspannungsverteilung, die im Querschnitt anzutreffen ist, setzt sich aus der Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannung infolge Normalkraft zusammen. Man findet an der Unterseite die maximalen Zugspannungen  $11.6 \text{ N/mm}^2$  und an der Oberseite die maximalen Druckspannungen  $-7.6 \text{ N/mm}^2$ .



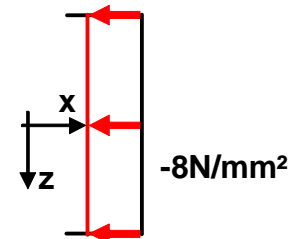
Position 2:

Die **Normalspannungen infolge Biegemoment** sind identisch zu jenen an der Position 1. Für die **Normalspannungen infolge Normalkraft** erhält man:

$$\sigma_{\text{Normalkraft},2} = \frac{N}{A} = \frac{-0.48F}{6Hs} = -0.08 \frac{F}{sH} = -0.08 \cdot 100 = -8 \frac{N}{\text{mm}^2}$$



Wieder gilt, dass die Normalspannungsverteilung, die im Querschnitt anzutreffen ist, sich setzt aus der Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannung infolge Normalkraft zusammensetzt. Man findet an der Unterseite die maximalen Zugspannungen  $1.6 \text{ N/mm}^2$  und an der Oberseite die maximalen Druckspannungen  $-17.6 \text{ N/mm}^2$ .



Maximale Zug- und Druckspannungen in der Gesamtschwinge:

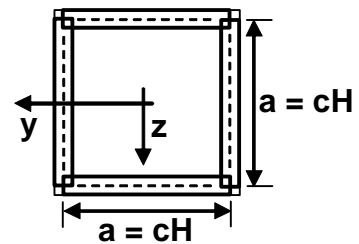
Die maximalen Zugspannungen findet man an der Unterseite an Position 1, die maximalen Druckspannungen an der Oberseite bei Position 2.

$$\sigma_{\max \text{ Zug}} = \sigma_{\max \text{ Zug, Biegemoment},1} + \sigma_{\text{Normalkraft},1} = 11.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$



$$\sigma_{\max \text{ Druck}} = \sigma_{\max \text{ Druck, Biegemoment, 2}} + \sigma_{\text{Normalkraft, 2}} = -17.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

e.) Bei der Verwendung des quadratischen Profils, soll sich der maximale Spannungsbetrag ( $\sigma_{\max, \text{Druck}} = -17.6 \text{ N/mm}^2$ ) nicht ändern. Zuerst werden Querschnittsfläche und Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Quadrats berechnet. Dazu wird dieses in vier Rechtecke zerlegt.



$$A = 4 \cdot as = 4as$$

$$I_y = 2 \frac{sa^3}{12} + 2 \frac{as^3}{12} + 2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 as = \frac{2}{3} a^3 s + \underbrace{\frac{1}{6} as^3}_{\approx 0} = \frac{2}{3} a^3 s$$

Betrachtet wird die maximale Druckspannung an der Oberseite ( $z = -a/2$ ) der Position 2:

$$\sigma_{\max \text{ Druck}} = \sigma_{\max \text{ Druck, Biegemoment, 2}} + \sigma_{\text{Normalkraft, 2}} = \frac{0.64FL}{\frac{2}{3} a^3 s} \left( -\frac{a}{2} \right) - \frac{0.48F}{4as} = -17.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

In dieser Gleichung wird L durch H/2 und a durch cH ersetzt. Die Einheiten werden gekürzt.

$$\frac{0.64F \frac{H}{2}}{\frac{2}{3} (cH)^3 s} \left( -\frac{cH}{2} \right) - \frac{0.48F}{4cHs} = -0.24 \frac{F}{sH} \frac{1}{c^2} - 0.12 \frac{F}{sH} \frac{1}{c} = \frac{-0.24 \cdot 100}{c^2} - \frac{0.12 \cdot 100}{c} = \frac{-24}{c^2} - \frac{12}{c} = -17.6$$

Die resultierende Gleichung wird mit  $c^2$  multipliziert, und alle Terme werden auf die linke Seite gebracht. Die quadratische Gleichung wird mit der Mitternachtsformel gelöst.

$$17.6c^2 - 12c - 24 = 0$$

$$\Rightarrow c_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 17.6(-24)}}{2 \cdot 17.6} = \frac{12 \pm 42.82}{35.2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{12 + 42.82}{35.2} = 1.56 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{12 - 42.82}{35.2} = -0.88$$

Die mathematische Lösung  $c_2$  ist physikalisch nicht sinnvoll. Das bedeutet, dass eine Kantenlänge  $a = c_1 H = 1.56H$  gewählt werden muss.

### Lösungen Aufgabe 22 (vgl Aufgabe 36 TM1):

a.) Die Gewichtskraft G beträgt 30000N, die in der Balkenmitte wirkende Ersatzkraft  $F_{\text{Ersatz}}$  erhält man mit:

$$F_{\text{Ersatz}} = 18q = 18 \cdot 1400 = 25200 \text{ N}$$

Für die Berechnung der am Balken angreifenden Kräfte muss das Bauteil wie dargestellt frei geschnitten werden.

An der Seilrolle erkennt man mit dem Momentengleichgewicht den Zusammenhang zwischen den Seilkräften  $F_{S1}$  und  $F_{S2}$ .

$$F_{S1} = F_{S2} = F_S$$

Die Beiden Seilkräfte müssen in ihre Komponenten zerlegt werden. Aus den geometrischen Abmessungen erhält man:

$$F_{S1x} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 7.5^2}} F_{S1} = \frac{4}{5} F_{S1} = \frac{4}{5} F_S, \quad F_{S1z} = \frac{7.5}{\sqrt{10^2 + 7.5^2}} F_{S1} = \frac{3}{5} F_{S1} = \frac{3}{5} F_S$$

$$F_{S2x} = \frac{18}{\sqrt{18^2 + 7.5^2}} F_{S2} = \frac{12}{13} F_{S2} = \frac{12}{13} F_S \quad \text{und} \quad F_{S2z} = \frac{7.5}{\sqrt{18^2 + 7.5^2}} F_{S2} = \frac{5}{13} F_{S2} = \frac{5}{13} F_S$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen für das Fahrzeug ermittelt man die Kräfte  $F_H$  und  $F_V$ .

$$\sum M|_H = 0: \quad 3LF_V - 2LG = 0 \quad \Rightarrow \quad F_V = \frac{2}{3} G = 20000N$$

$$\sum F_z = 0: \quad G - F_H - F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = \frac{1}{3} G = 10000N$$

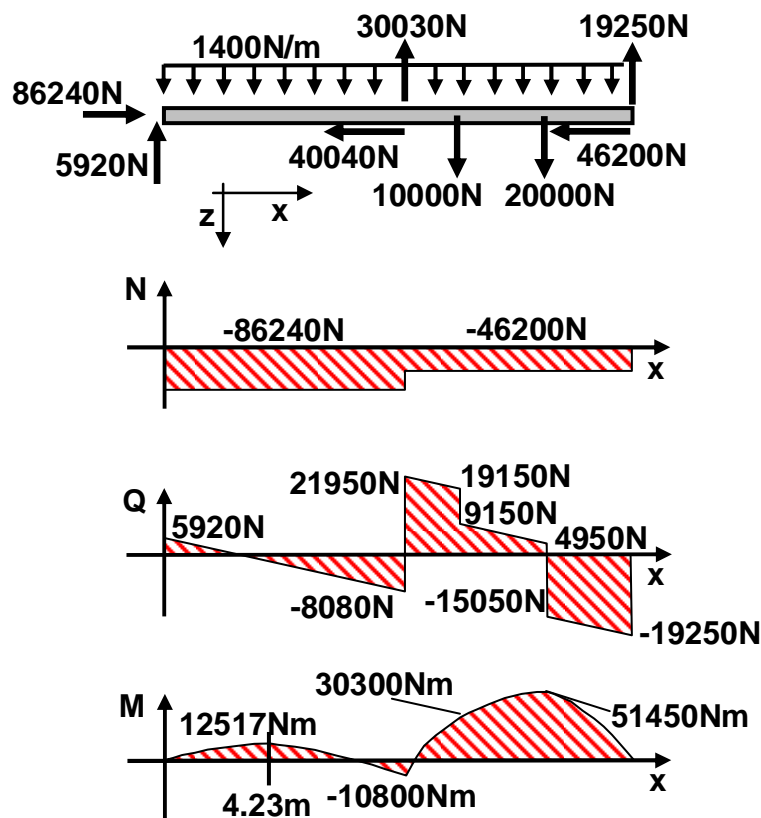
Im nächsten Schritt können die Lagerkräfte  $F_{Ax}$ ,  $F_{Az}$  und die Seilkraft  $F_S$  berechnet werden.

$$\sum M|_A = 0: \quad -9F_{Ersatz} + 10F_{S1z} - 12F_H - 15F_V + 18F_{S2z} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_S = 50050N$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{S1x} - F_{S2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 86240N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_{Ersatz} - F_{S1z} + F_H + F_V - F_{S2z} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = 5920N$$

Innere Kräfte und Momente:



Für die Berechnung der Querschnittsfläche, des Flächenträgheitsmoment und der Spannungen ist es zulässig, die oberen Flanken zusammen zu schieben. Es resultiert ein dünnwandiges Rechteck. Dies ergibt eine Querschnittsfläche  $A$ :

$$A = 2 \cdot s2L + 2 \cdot 8Ls = 20Ls = 20 \cdot 180 \cdot 10 = 36000mm^2$$

Für das Flächenträgheitsmoment gilt:

$$I_y = 2 \frac{s(2L)^3}{12} + 2 \frac{8Ls^3}{12} + 2 \cdot L^2 8Ls = 17 \frac{1}{3} L^3 s + \underbrace{\frac{4}{3} Ls^3}_{\approx 0} = 17 \frac{1}{3} L^3 s = 17 \frac{1}{3} \cdot 180^3 \cdot 10 = 1.011 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Maximale Normalspannungen am Ort des maximalen Biegemoments:

Zuerst werden die maximalen **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet.

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M(x=15)}{I_y} z = \frac{51450 \cdot 10^3}{1.011 \cdot 10^9} z = 0.0509 z$$

An der Unterseite erhält man die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z=180) = 9.16 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

An der Oberseite erhält man die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments.

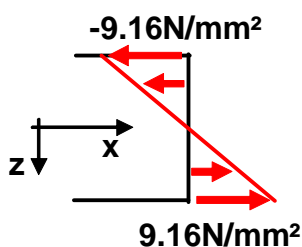
$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z=-180) = -9.16 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Auch die **Normalkraft erzeugt Normalspannungen**.

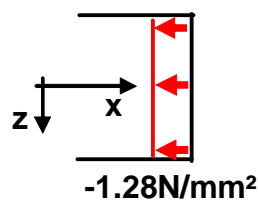
$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N}{A} = \frac{-46200}{36000} = -1.28 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalkraft ergibt die im Bauteil anzutreffenden Normalspannungen.

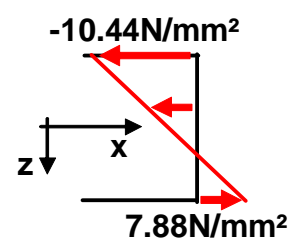
**Normalspannungen  
infolge Biegemoment**



**Normalspannungen  
infolge Normalkraft**



**Resultierende  
Normalspannungen**



Andere Querschnitte müssen nicht untersucht werden. Ein lokales Spannungsmaximum erreicht man noch bei  $x = 4.23\text{m}$ . Im Bereich der maximalen Normalkraft ist dort das Biegemoment maximal. Der Betrag des Biegemoments geht ungefähr auf ein Viertel zurück. Daraus ergeben sich Normalspannungen infolge des Biegemoments von ca. einem Viertel von  $9.16\text{N/mm}^2$ . Obwohl sich die Normalkraft ungefähr verdoppelt und dadurch auch verdoppelte Normalspannungen in folge der Normalkraft resultieren, sind die überlagerten Spannungswerte bei  $x = 4.23\text{m}$  kleiner als bei  $x = 15\text{m}$ .

Somit betragen die maximalen Zugspannungen des Bauteils  $7.88\text{N/mm}^2$  und die maximalen Druckspannungen  $-10.44\text{N/mm}^2$ .

b.) Die Wandstärke  $s$  wird bei der Berechnung der Querschnittsfläche  $A$  und des Flächenträgheitsmoments  $I_y$  linear berücksichtigt. Bei der Bestimmung der Spannungen werden Querschnittsfläche  $A$  und Flächenträgheitsmoment durch die Faktoren  $1/A$

(Normalspannungen infolge Normalkraft) und  $1/I_y$  (Normalspannungen infolge des Biegemoments) berücksichtigt. Dadurch kann man die Abhängigkeit der Normalspannungen von der Wandstärke  $s$  angeben. ( $c_i$ : Proportionalitätsfaktoren)

$$\sigma = \frac{c_1^*}{I_y} + \frac{c_3^*}{A} = \frac{c_1^*}{c_2 s} + \frac{c_3^*}{c_4 s} = \frac{c_1^*}{\underbrace{c_2}_{c_1} s} + \frac{c_3^*}{\underbrace{c_4}_{c_2} s} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s} = \frac{1}{s} (c_1 + c_2) = \frac{c}{s}$$

Aus diesem Zusammenhang erkennt man, dass Normalspannung mal Wandstärke eine Konstante  $c$  darstellt.

$$\sigma s = c \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{Wandstärke1}} s_1 = c = \sigma_{\text{Wandstärke2}} s_2$$

Hat man bei der vorgegebenen Wandstärke  $s_1 = 10\text{mm}$  den maximalen Spannungsbetrag  $\sigma_{\text{Wandstärke1}} = 10.44\text{N/mm}^2$  erhalten, errechnet man für den vorgegebenen Spannungsbetrag  $\sigma_{\text{Wandstärke2}} = 5\text{N/mm}^2$  die nun notwendig Wandstärke  $s_2$ .

$$s_2 = \frac{\sigma_{\text{Wandstärke1}}}{\sigma_{\text{Wandstärke2}}} s_1 = \frac{10.44}{5} 10 = 20.88\text{mm}$$

**Lösungen Aufgabe 23:**

a.) Wenn die Lampe kippt, fällt sie nach rechts. Dabei hebt der Lampenfuß bis auf den Kontaktpunkt A vom Boden ab.

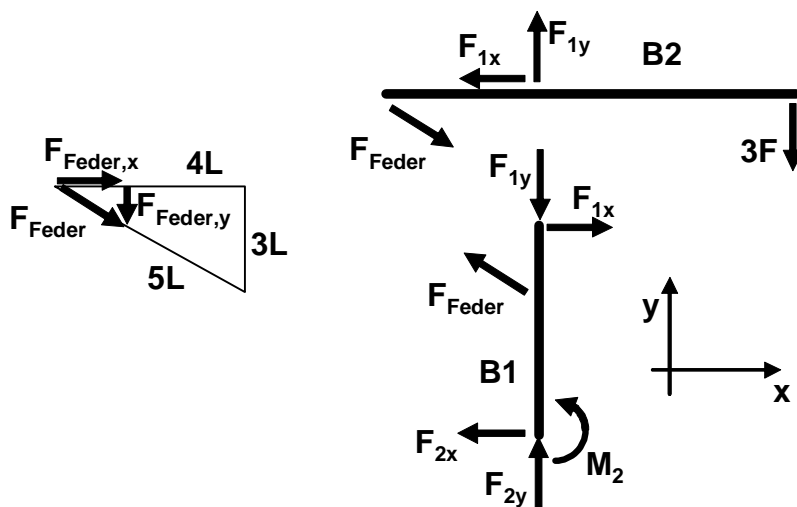
Daraus kann man das gesuchte Stabilitätskriterium ableiten.

$$\sum M|_A = 0: \quad LG_2 - 15L \cdot 3F = 0$$

$$\Rightarrow \quad G_2 = 45F = 45N$$

Die Gewichtskraft des Lampenfußes muss mindestens 45N betragen.

b.) Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente wird die Lampe wie dargestellt frei geschnitten. Der Lampenfuß wird durch zwei Kräfte  $F_{2x}$  und  $F_{2y}$  und das Moment  $M_2$  ersetzt.



Die Federkraft  $F_{Feder}$  wird mit Hilfe des geometrischen Dreiecks in ihre Komponenten zerlegt.

$$\frac{F_{Feder,x}}{F_{Feder,y}} = \frac{4L}{3L} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{Feder,x} = \frac{4}{3} F_{Feder,y}$$

Zur Berechnung der Schnittkräfte wird zuerst der Balken B2 betrachtet.

$$\sum M|_l = 0: \quad 4LF_{Feder,y} - 16L \cdot 3F = 4LF_{Feder,y} - 48LF = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Feder,y} = 12F$$

$$\Rightarrow \quad F_{Feder,x} = \frac{4}{3} F_{Feder,y} = \frac{4}{3} 12F = 16F$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{Feder,y} + F_{1y} - 3F = -12F + F_{1y} - 3F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1y} = 15F$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Feder,x} - F_{1x} = 16F - F_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1x} = 16F$$

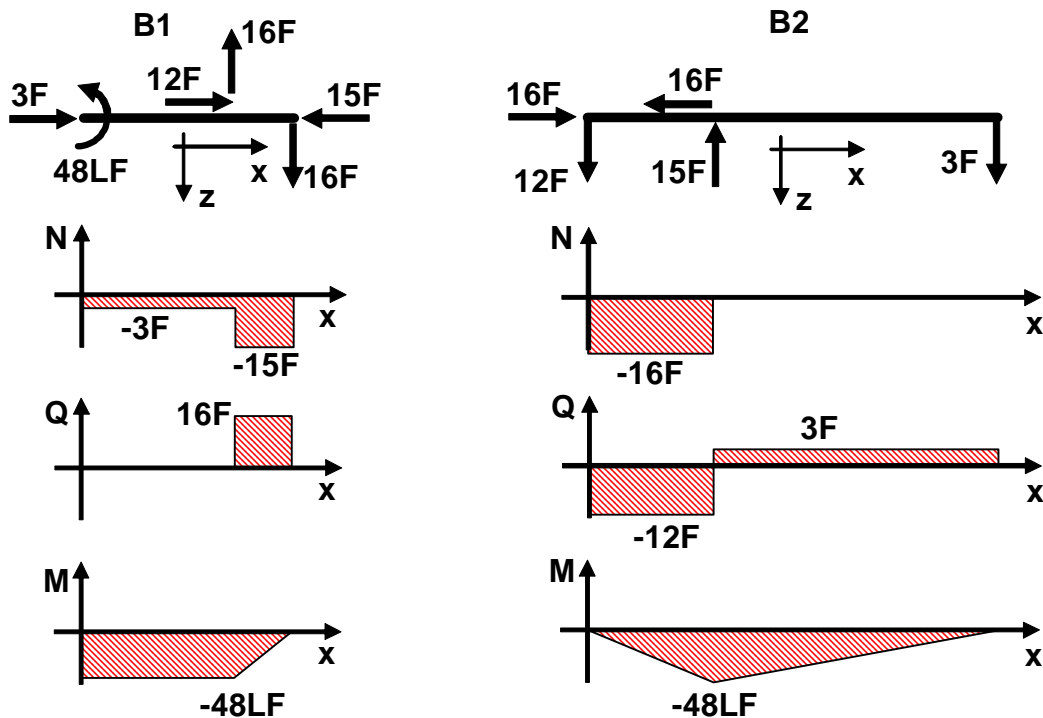
Gleichgewichtsbedingungen am Balken B1:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} + F_{Feder,y} - F_{1y} = F_{2y} + 12F - 15F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2y} = 3F$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{2x} - F_{Feder,x} + F_{1x} = -F_{2x} - 16F + 16F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2x} = 0$$

$$\sum M|_2 = 0: \quad M_2 + 7LF_{Feder,x} - 10LF_{1x} = M_2 + 7L \cdot 16F - 10L \cdot 16F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 48LF$$

Innere Kräfte und Momente:



c.) Der Betrag des größten Biegemoments beträgt  $M_{\max} = 48LF$ . Für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments benötigt man das Flächenträgheitsmoment des kreisrunden, dünnwandigen Profils.

$$I_y = \pi R_m^3 s$$

Für die Ermittlung des gesuchten Radius  $R_m$  werden  $M_{\max}$ ,  $I_y$  und die maximal zulässige Spannung  $\sigma_{\text{zul}} = 10\text{N/mm}^2$  in die Formel für die Berechnung der Normalspannung infolge des Biegemoments eingesetzt.

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{M_{\max}}{I_y} R_m = \frac{48LF}{\pi R_m^3 s} R_m = \frac{48LF}{\pi R_m^2 s}$$

$$\Rightarrow R_m = \sqrt{\frac{48LF}{\pi \sigma_{\text{zul}} s}} = \sqrt{\frac{48}{\pi \sigma_{\text{zul}}}} \sqrt{\frac{LF}{s}} = \sqrt{\frac{48}{\pi \cdot 10}} \sqrt{\frac{50 \cdot 1}{1}} = 8.74\text{mm}$$

d.) Für die Normalspannungen infolge Normalkraft wird der maximale Betrag der Normalkraft bei gleichzeitigem maximalen Betrag des Moments gewählt.

$$N_{\max} = 16F$$

Die Querschnittsfläche beträgt:

$$A = 2\pi R_m s$$

Daraus ermittelt man den maximalen Betrag der Normalspannung infolge Normalkraft.

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{16F}{2\pi R_m s} = \frac{8F}{\pi R_m s} = \frac{8 \cdot 1}{\pi \cdot 8.74 \cdot 1} = 0.29 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Der maximale Betrag der Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  ist die Überlagerung der Normalspannung infolge des Biegemoments und der Normalkraft. Da Biegemoment und Normalkraft negativ sind, sind die maximalen Spannungen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{zul} + \sigma_{Normalkraft} = 10 + 0.29 = 10.29 \frac{N}{mm^2}$$

d.) Die Gesamtfederkraft lautet:

$$F_{Feder} = \sqrt{F_{Feder,x}^2 + F_{Feder,y}^2} = \sqrt{(16F)^2 + (12F)^2} = 20F$$

Zwischen der Verlängerung  $\Delta x = 10\text{mm}$  der Feder und der Federkraft  $F_{Feder}$  gilt mit der Federkonstanten  $c$  folgender Zusammenhang:

$$F_{Feder} = c\Delta x \quad \Rightarrow \quad c = \frac{F_{Feder}}{\Delta x} = \frac{20F}{\Delta x} = \frac{20 \cdot 1}{10} = 2 \frac{N}{mm}$$

### Lösungen Aufgabe 24:

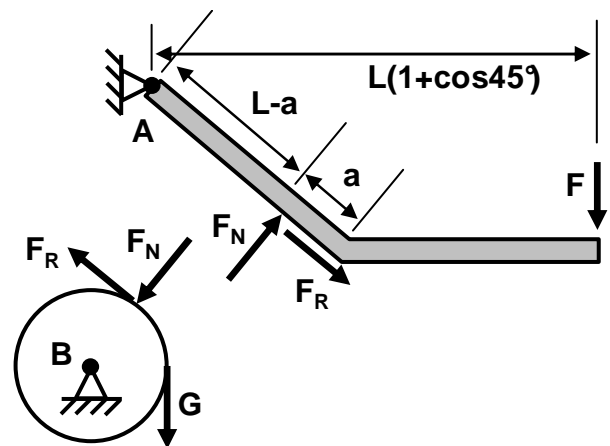
a.) Die Rolle und der Bremshebel müssen frei geschnitten und die dargestellten Schnittkräfte hinzugefügt werden. Betrachtet man die Rolle, so können  $F_N$  und  $F_R$  in Abhängigkeit von  $G$  und  $\mu_0$  angegeben werden.

$$\sum M|_B = 0: \quad \frac{L}{4} F_R - \frac{L}{4} G = 0$$

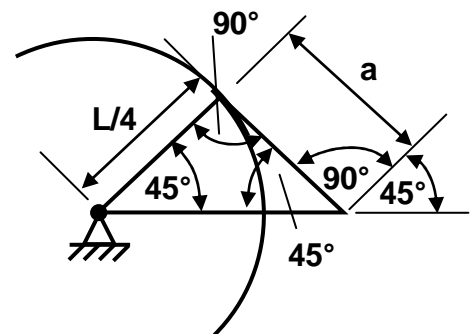
$$\Rightarrow F_R = G$$

$$F_R = \mu_0 F_N$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{F_R}{\mu_0} = \frac{G}{\mu_0}$$



Betrachtet man den Bremshebel, setzt  $F = G/2$ , so ergibt das Momentengleichgewicht um A eine Berechnungsgleichung, die nur  $\mu_0$  als Unbekannte beinhaltet. Allerdings muss dazu die Länge  $L-a$  bzw.  $a$  bekannt sein. Zur Bestimmung dieser Länge spannt man ein Dreieck auf. Die Eckpunkte sind der Rollenmittelpunkt, der Knick im Bremshebel und der Berührungspunkt zwischen Rolle und Bremshebel. Da die Kraft  $F_N$  senkrecht auf der Rolle und auf dem Bremshebel steht, muss das Dreieck rechtwinklig sein. Aus der Skizze folgt, dass dann die beiden verbleibenden Winkel  $45^\circ$  betragen müssen.



$$\Rightarrow a = \frac{L}{4} \quad \Rightarrow \quad L - a = L - \frac{L}{4} = \frac{3}{4}L$$

$$\sum M|_A = 0: \quad (L-a)F_N - L(1 + \cos 45^\circ)F = \frac{3}{4}L \frac{G}{\mu_0} - L(1 + \cos 45^\circ) \frac{G}{2} = 0$$

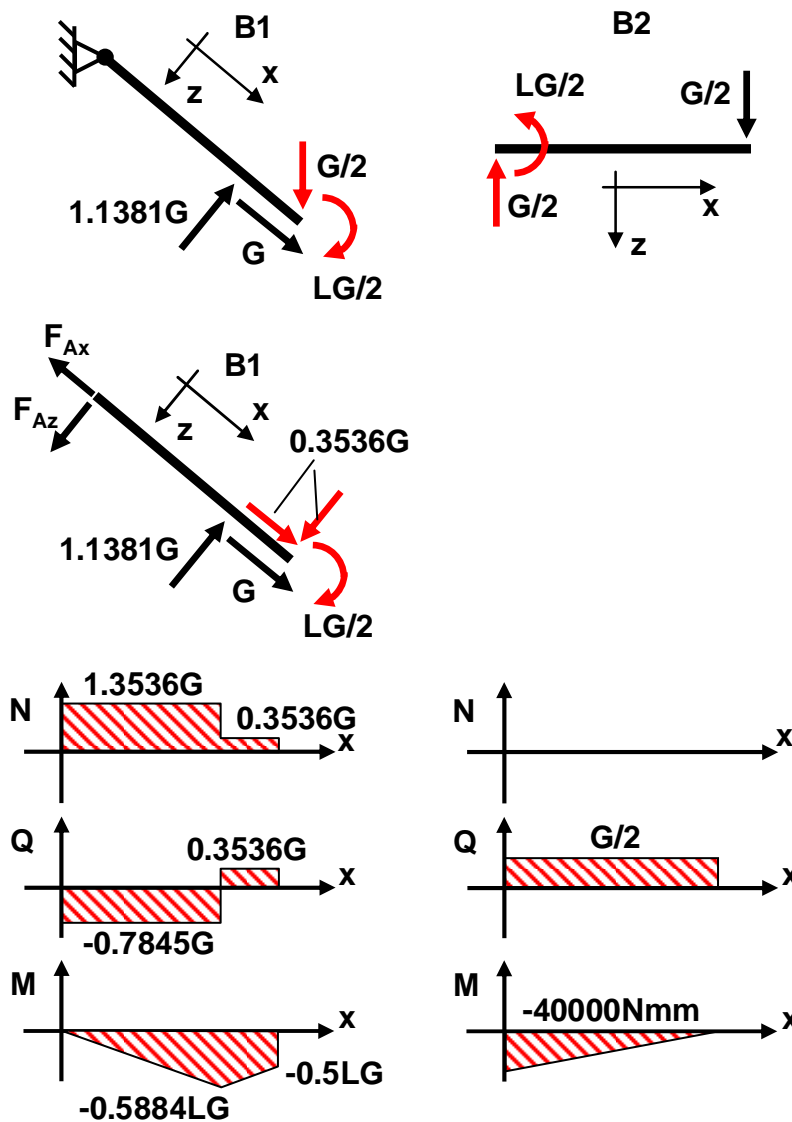
$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{3/4}{(1 + \cos 45^\circ)/2} = \frac{1.5}{1 + \cos 45^\circ} = 0.8787$$

$$\Rightarrow F_N = 1.1381G$$

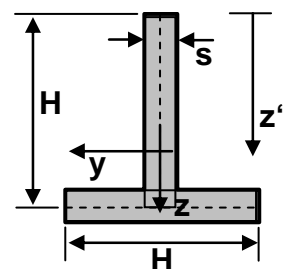
b.) Für die Bestimmung der inneren Kräfte und Momente fehlen zwar noch die Lagerkräfte am Lager A. Es ist aber einfacher, den Hebel in zwei Balken zu zerlegen, für jeden Balken ein eigenes xz-Koordinatensystem einzuführen und dann im balkenspezifischen Koordinatensystem die Lagerkräfte anzugeben. Im linken Balken B1 muss die Schnittkraft  $G/2$  in eine zum Balken parallel und eine zum Balken senkrechte Komponenten zerlegt werden. Infolge des Winkels  $45^\circ$  sind beiden Komponenten  $G/2 \cos 45^\circ = 0.3536G$ . Die Kräftebilanzen am linken Balken B1 ergeben die Lagerkräfte.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + G + 0.3536G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 1.3536G$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} - 1.1381G + 0.3536G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = 0.7845G$$



Für die Berechnung der Normalspannungen muss der Flächenmittelpunkt, der Flächeninhalt und das Flächenträgheitsmoment des Profils berechnet werden. Dazu wird das dünnwandige T-Profil in zwei Teilflächen zerlegt. An der oberen Kante wird der Nullpunkt des Bezugssystem  $z'$  festgelegt.





$$A = Hs + sH = 2Hs, \quad z'_s = \frac{HHs + \frac{H}{2}sH}{2Hs} = 0.75H$$

$$I_y = \underbrace{\frac{Hs^3}{12}}_{\approx 0} + (H - 0.75H)^2 Hs + \frac{sH^3}{12} + (0.5H - 0.75H)^2 sH = \frac{5}{24} H^3 s$$

Maximale Normalspannungen am Ort des maximalen Biegemoments:

Zuerst werden die maximalen **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet.

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{-0.5884LG}{\frac{5}{24}H^3s} z = -2.8243 \frac{LG}{H^3s} z$$

An der Unterseite erhält man die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = \frac{H}{4} \right) = -0.7061 \frac{LG}{H^2s} = -0.7061 \frac{LG}{(0.5L)^2s} = -2.8244 \frac{G}{Ls}$$

An der Oberseite erhält man die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = -\frac{3}{4}H \right) = 2.1182 \frac{LG}{H^2s} = 2.1182 \frac{LG}{(0.5L)^2s} = 8.4728 \frac{G}{Ls}$$

Die **Normalkraft erzeugt Normalspannungen**. Durch den Sprung an der Stelle des maximalen Moments, müssen die Spannungen kurz vor ( $\sigma_{\text{Normalkraft, vor}}$ ) und kurz nach ( $\sigma_{\text{Normalkraft, nach}}$ ) der Sprungstelle betrachtet werden.

$$\sigma_{\text{Normalkraft, vor}} = \frac{N_{\text{vor}}}{A} = \frac{1.3536G}{2Hs} = 0.6768 \frac{G}{Hs} = 0.6768 \frac{G}{0.5Ls} = 1.3536 \frac{G}{Ls}$$

$$\sigma_{\text{Normalkraft, nach}} = \frac{N_{\text{nach}}}{A} = \frac{0.3536G}{2Hs} = 0.1768 \frac{G}{Hs} = 0.1768 \frac{G}{0.5Ls} = 0.3536 \frac{G}{Ls}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalkraft ergibt die im Bauteil anzutreffenden Normalspannungen.

$$\sigma_{\text{max Druck}} = \sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft, nach}} = -2.4708 \frac{G}{Ls}$$

$$\sigma_{\text{max Zug}} = \sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft, vor}} = 9.8264 \frac{G}{Ls}$$

Maximale Normalspannungen am Anfang von Balken B2:

Am Anfang des Balkens B2 wirkt nur ein Biegemoment. Daher treten nur Normalspannungen infolge Biegemoment auf. Sie erhält man, wenn man die Spannungen am Maximum des Biegemoments mit dem Faktor  $0.5/0.5884 = 0.8498$  multipliziert.

$$\sigma_{\text{max Druck}} = 0.8498 \left( -2.8244 \frac{G}{Ls} \right) = 2.4002 \frac{G}{Ls}$$

$$\sigma_{\text{max Zug}} = 0.8498 \left( 8.4728 \frac{G}{Ls} \right) = 7.2002 \frac{G}{Ls}$$

Diese Spannungen sind kleiner wie an der Stelle des maximalen Biegemoments. Daher sind an der Stelle des maximalen Moments die größten Zug- und Druckspannungen im Bauteil.

**Lösungen Aufgabe 25:**

a.) Zu Beginn muss der wirksame Hebelarm  $a$  der Kraft  $F$  bezüglich des Punktes  $A$  ermittelt werden. Aus der Skizze kann man den Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  und den Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$  erkennen.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 0.75 \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ \\ \Rightarrow \sin \alpha &= 0.6 \quad \text{und} \quad \cos \alpha = 0.8 \\ \Rightarrow \sin 2\alpha &= 0.96 \quad \text{und} \quad \cos 2\alpha = 0.28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \beta + 90^\circ &= 90^\circ - 2\alpha = 16.26^\circ \\ \Rightarrow \sin \beta &= 0.28 \quad \text{und} \quad \cos \beta = 0.96 \end{aligned}$$

$$a = c - b$$

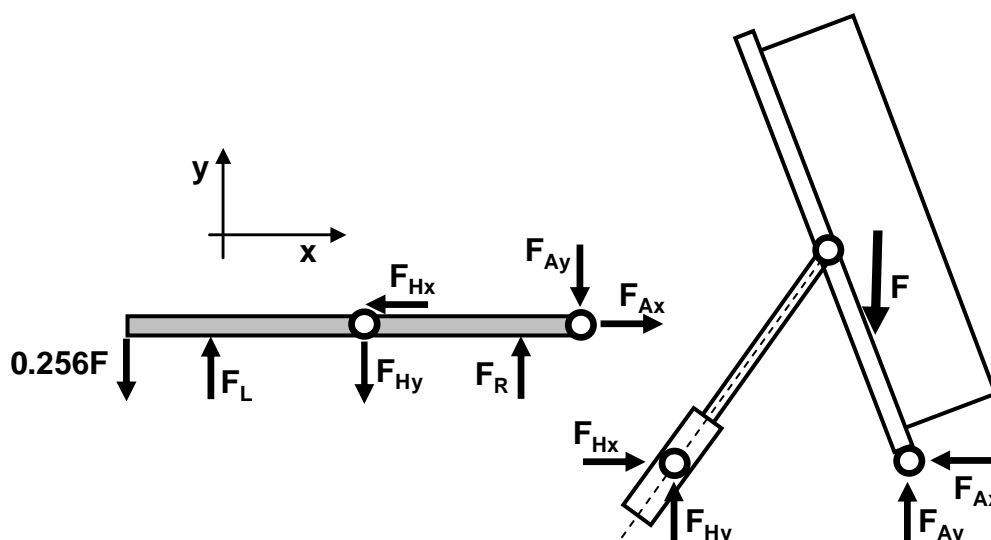
Die Längen  $b$  und  $c$  kann man über die zwei rechtwinkligen Dreiecke bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{c}{3L} &= \cos 2\alpha \Rightarrow c = 3L \cos 2\alpha = 0.28 \cdot 3L = 0.84L \\ \frac{b}{0.5L} &= \cos \beta \Rightarrow b = 0.5L \cos \beta = 0.96 \cdot 0.5L = 0.48L \\ \Rightarrow a &= c - b = 0.84L - 0.48L = 0.36L \end{aligned}$$

Ist das Gegengewicht  $G$  zu klein, kippt das Fahrzeug über das rechte Rad. Daher ist die für  $G$  zu erfüllende Kippbedingung das Momentengleichgewicht um den rechten Radaufstandspunkt bei gleichzeitig verschwindender Aufstandskraft am linken Rad.

$$\sum M|_B = 0: \quad 5LG - (L - 0.36L)2F = 0 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{2}{5}0.64F = 0.256G$$

b.) Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente im waagrechten Balken muss dieser und der Ausleger frei geschnitten werden.

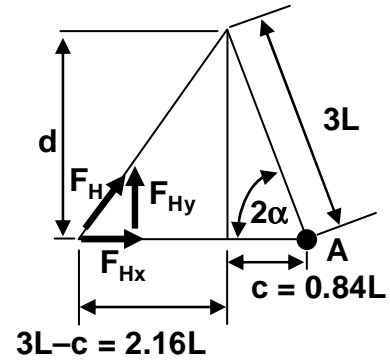


Zuerst wird der Ausleger untersucht.

$$\sum M|_A = 0: \quad 0.36LF - 3LF_{Hy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Hy} = 0.12F$$

Der Hubzylinder ist an beiden Enden gelenkig gelagert. Er kann dadurch nur Kräfte in Zylinderichtung übertragen. Über ein zwei rechtwinklige Dreieck kann der Zusammenhang zwischen  $F_{Hx}$  und  $F_{Hy}$  ermittelt werden. Mit dem rechten Dreieck ermittelt man die Höhe  $d$ .

$$\frac{d}{3L} = \sin 2\alpha \Rightarrow d = 3L \sin 2\alpha = 3L \cdot 0.96 = 2.88L$$



Das rechte Dreieck liefert den Zusammenhang zwischen den Kräften  $F_{Hx}$  und  $F_{Hy}$ .

$$\frac{F_{Hx}}{F_{Hy}} = \frac{3L - c}{d} = \frac{2.16L}{2.88L} = 0.75 \Rightarrow \frac{F_{Hx}}{F_{Hy}} = 0.75 = 0.75 \cdot 0.12F = 0.09F$$

Die Kräftebilanzen ergeben die Kräfte  $F_{Ax}$  und  $F_{Ay}$ .

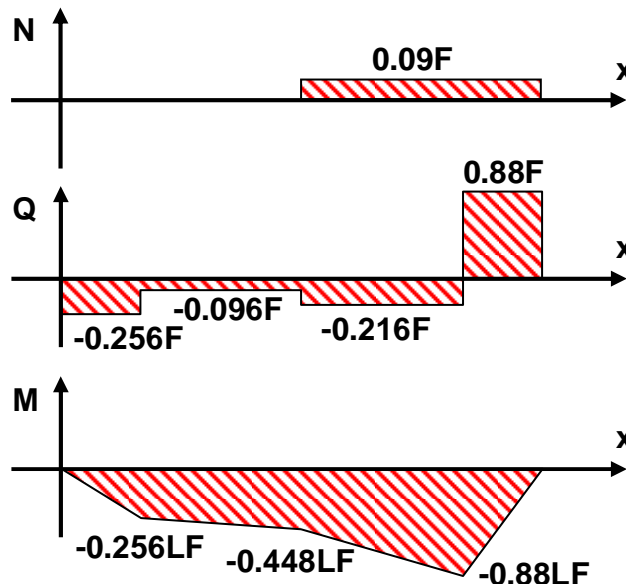
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_{Hx} - F_{Ax} &= 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0.09F \\ \sum F_y = 0: \quad F_{Hy} - F + F_{Ay} &= 0 \Rightarrow F_{Ay} = 0.88F \end{aligned}$$

Am Balken werden die Radaufstandskräfte  $F_L$  und  $F_R$  berechnet.

$$\begin{aligned} \sum M|_L = 0: \quad 0.256LF - 2LF_{Hy} + 4LF_R - 5LF_{Ay} &= 0.256LF - 0.24LF + 4LF_R - 4.4LF = 0 \\ \Rightarrow F_R &= 1.096F \end{aligned}$$

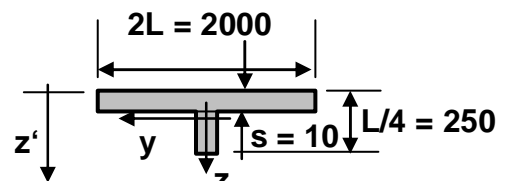
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \quad -0.256F + F_L - F_{Hy} + F_R - F_{Ay} &= -0.256F + F_L - 0.12F + 1.096F - 0.88F = 0 \\ \Rightarrow F_L &= 0.16F \end{aligned}$$

Innere Kräfte und Momente im waagrechten Balken:



Für die Spannungsberechnung benötigt man noch den Flächenmittelpunkt, die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment des Profils des waagrechten Balkens.

An der Profiloberkante ist der Nullpunkt des Bezugskoordinatensystem  $z'$ .



$$A = 2000 \cdot 10 + 240 \cdot 10 = 22400 \text{ mm}^2,$$

$$z'_s = \frac{5 \cdot 20000 + 130 \cdot 2400}{22400} = 18.4$$

$$I_y = \frac{2000 \cdot 10^3}{12} + (5 - 18.4)^2 \cdot 20000 + \frac{10 \cdot 240^3}{12} + (130 - 18.4)^2 \cdot 2400 = 45168810.67 = 4.5169 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

An der Position des maximalen Biegemoments sind die maximalen Normalspannungen. Das maximale Moment hat den Wert  $M_{\max} = -0.88LF = 0.88 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$ .

Zuerst werden die maximalen **Normalspannungen infolge des Biegemoments** berechnet.

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{-0.88LF}{I_y} z = \frac{-0.88 \cdot 10^7}{4.5169 \cdot 10^7} z = -0.1948z$$

An der Unterseite erhält man die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = 250 - 18.4) = -0.1948 \cdot 231.6 = -45.1157 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

An der Oberseite erhält man die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = -18.4) = -0.1948 \cdot (-18.4) = 3.5843 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die **Normalkraft erzeugt zusätzliche Normalspannungen**.

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{0.09F}{A} = \frac{900}{22400} = 0.0402 \text{ N}$$

Gegenüber den Spannungen infolge des Biegemoments sind die Normalspannungen der Normalkraft zu vernachlässigen.

Die **Querkraft erzeugt Schubspannungen**.

$$\tau_{\text{Querkraftkraft}} = \frac{0.88F}{A} = \frac{8800}{22400} = 0.3929 \text{ N}$$

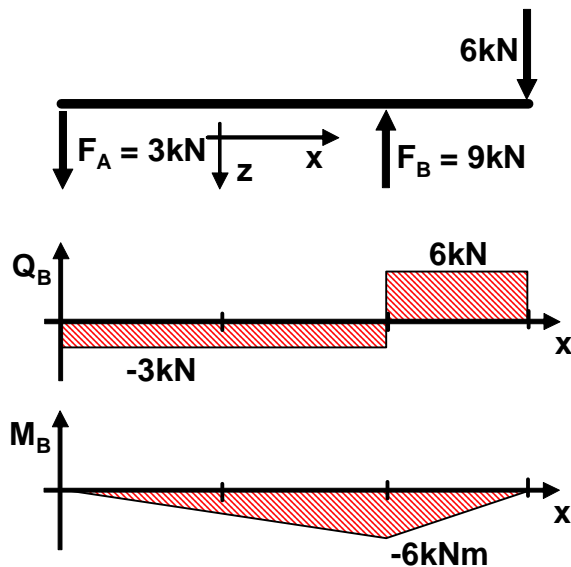
Auch die Schubspannungen sind verschwindend klein gegenüber den Normalspannungen infolge des Biegemoments.

**Lösungen Aufgabe 26:**

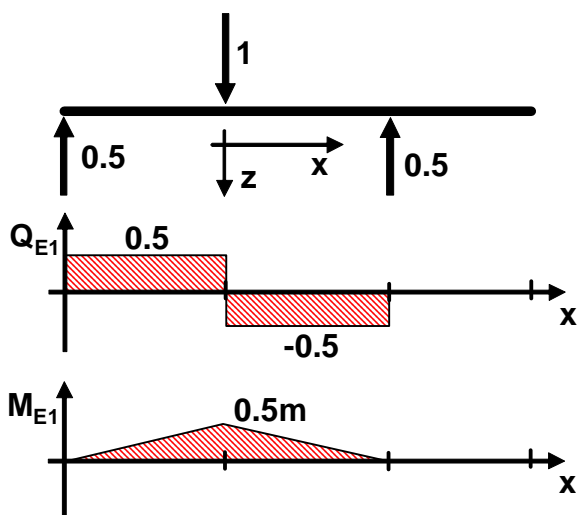
Geometrie 1:

Berechnung der inneren Kräfte und Momente infolge der äußeren Kraft 6kN:

$$\begin{aligned} \sum M|_A = 0: & \quad 2F_B - 3 \cdot 6 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_B = 9 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0: & \quad F_A - F_B + 6 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_A = 3 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0: & \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung} \end{aligned}$$



Berechnung der Verschiebung  $u_1$ :



An der zu untersuchenden Stelle 1 wird die Kraft 1 in Richtung von  $u_1$  angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

$$\begin{aligned} \sum M|_A = 0: & \quad 2F_B - 1 \cdot 1 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_B = 0.5 \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_A - F_B + 1 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_A = 0.5 \\ \sum F_x = 0: & \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Integraltafeln wird die Verschiebung  $u_1$  berechnet. Dazu muss der Balken in zwei Abschnitte der Länge  $2L$  und  $L$  zerlegt werden. Im ersten Abschnitt hat das Moment  $M_B$  einen Dreiecksverlauf und das Moment  $M_{E1}$  den Verlauf eines Daches. Im zweiten Abschnitt ist das Moment  $M_{B1}$  konstant null. Daher trägt dieser Abschnitt nichts zur Verschiebung  $u_1$  bei. Alle Größen werden in N und mm umgewandelt.

$$\begin{aligned} u_1 &= \underbrace{\int_{2L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{\text{Abschnitt 1}} + \underbrace{\int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx}_{\text{Abschnitt 3}} = \frac{1}{EI_y} \left( \int_{2L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + 0 \right) \\ &= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left( \frac{(-6 \cdot 10^6) \cdot (0.5 \cdot 10^3) \cdot 2 \cdot 10^3}{4} \right) = \frac{-1.5 \cdot 10^{12}}{1.5 \cdot 10^{11}} = -10 \text{ mm} \end{aligned}$$

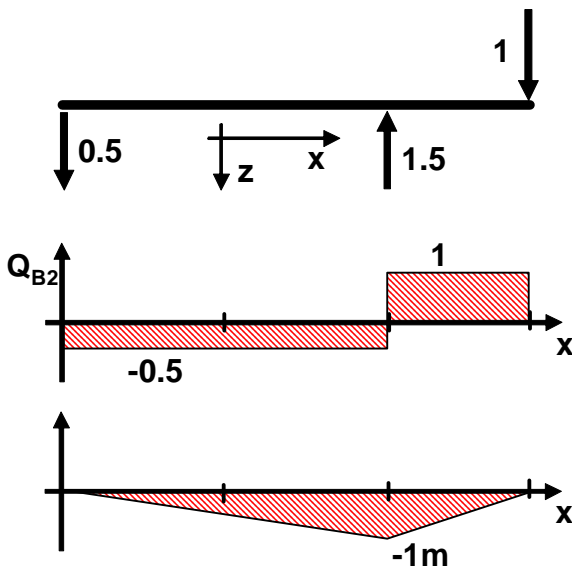
Am Punkt 1 geht der Balken um 10mm nach oben (negatives Vorzeichen).

Alternativ kann der Gesamtbalken auch in drei Abschnitte der Länge  $L$  zerlegt werden. Dann erhält man im ersten Abschnitt Dreieck mit Dreieck mit gleicher Seite, im zweiten Abschnitt Dreieck mit Trapez und der dritte Abschnitt ist wieder null mit Dreieck und trägt dadurch nichts zur Verschiebung  $u_1$  bei.

$$u_1 = \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left( \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + 0 \right)$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left( \frac{(-3 \cdot 10^6) \cdot (0.5 \cdot 10^3) \cdot 10^3}{3} + \frac{(0.5 \cdot 10^3) \cdot 10^3 (2 \cdot (-3 \cdot 10^6) + (-6 \cdot 10^6))}{6} \right) = -10 \text{ mm}$$

Berechnung der Verschiebung  $u_2$ :



Für die Berechnung der Verschiebung  $u_2$  muss an der Stelle 2 eine Kraft 1 in Richtung der Verschiebung  $u_2$  angebracht werden. Da das Bauteil ursprünglich nur mit einer äußeren Kraft 6kN belastet wird, die Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft 6kN gesucht ist, können die Schaubilder  $Q_{B2}$  und  $M_{B2}$  direkt aus den Schaubildern  $Q_E$  und  $M_E$  ermittelt werden, indem in den Ausgangsschaubildern alle Größen durch 6kN geteilt werden.

Für die Integration mit den Integrationsstafeln kann der Gesamtbalken als ein Integrationsintervall bzw. Abschnitt betrachtet werden. Beide Funktionen  $M_B$  und  $M_{E2}$  haben dabei den Verlauf eines Daches. Alle Größen

werden wieder in N und mm umgewandelt.

$$u_2 = \int_{3L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_{3L} \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx$$

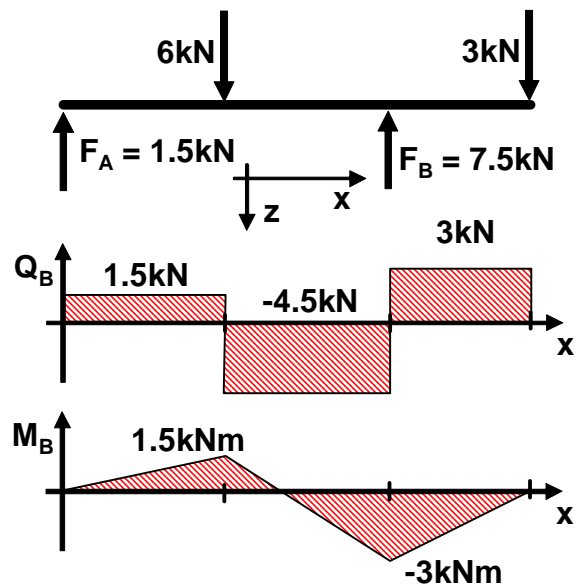
$$= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left( \frac{(-6 \cdot 10^6) \cdot (-1 \cdot 10^3) \cdot 3 \cdot 10^3}{3} \right) = \frac{6 \cdot 10^{12}}{1.5 \cdot 10^{11}} = 40 \text{ mm}$$

Am Punkt 2 verbiegt sich der Balken um 40mm nach unten.

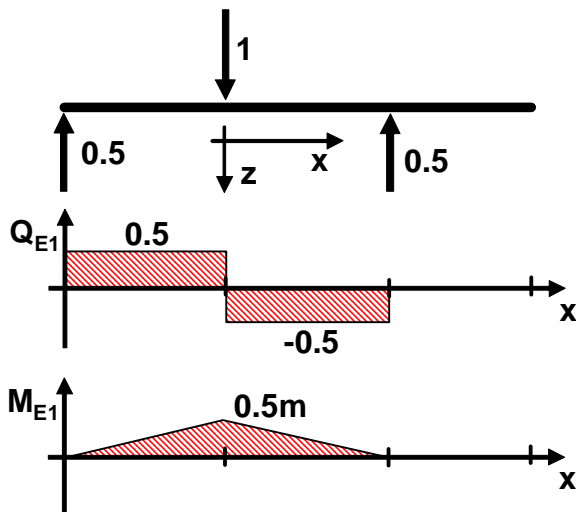
Geometrie 2:

Berechnung der inneren Kräfte und Momente infolge der äußeren Kräfte 6kN und 3kN:

$$\begin{aligned} \sum M|_A = 0: & \quad -1 \cdot 6 + 2F_B - 3 \cdot 3 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_B = 7.5 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_A + 6 - F_B + 3 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_A = 1.5 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0: & \quad \text{keine Kräfte in x-Richtung} \end{aligned}$$



Berechnung der Verschiebung  $u_1$ :



An der zu untersuchenden Stelle 1 wird die Kraft 1 in Richtung von  $u_1$  angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

Die daraus resultierende Belastung ist identisch zu der Belastung bei der Berechnung von  $u_1$  an der Geometrie 1. Daher können die dort gewonnenen Schaubilder für  $Q_{E1}$  und  $M_{E1}$  übernommen werden.

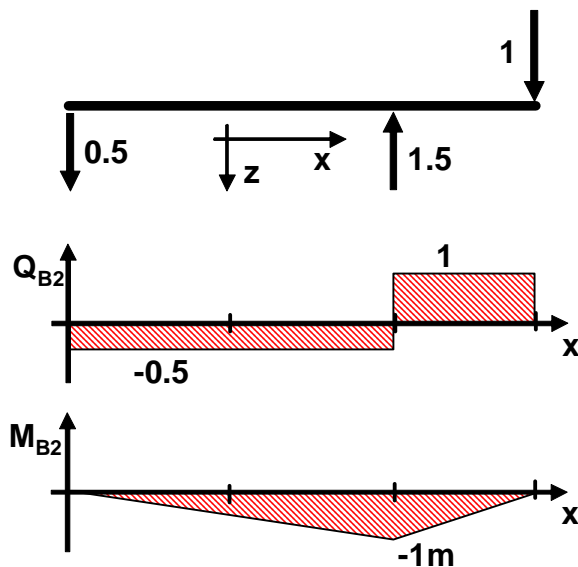
Der Balken wird in drei Abschnitte bzw. Integrationsintervalle der Länge  $L$  zerlegt. Im ersten Abschnitt erhält man zwei Dreiecksverläufe, im zweiten einen Dreiecksverlauf und einen

trapezförmigen Verlauf. Im dritten Abschnitt ist  $M_{E1}$  konstant null. Somit trägt der dritte Abschnitt nichts zur Berechnung der Verschiebung  $u_1$  bei.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left( \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + 0 \right) \\ &= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left( \frac{(1.5 \cdot 10^6) \cdot (0.5 \cdot 10^3) \cdot 10^3}{3} + \frac{(0.5 \cdot 10^3) \cdot 10^3 (2 \cdot (1.5 \cdot 10^6) + (-3 \cdot 10^6))}{6} \right) = \frac{5}{3} \text{ mm} \end{aligned}$$

Der Punkt 1 senkt sich um 1.67mm ab.

Berechnung der Verschiebung  $u_2$ :



An der zu untersuchenden Stelle 2 wird die Kraft 1 in Richtung von  $u_2$  angebracht. Es ergeben sich die dargestellten Lagerkräfte, inneren Kräfte und innere Momente.

Die daraus resultierende Belastung ist identisch zu der Belastung bei der Berechnung von  $u_2$  an der Geometrie 1. Daher können die dort gewonnenen Schaubilder für  $Q_{E2}$  und  $M_{E2}$  übernommen werden.

Der Balken wird in drei Abschnitte bzw. Integrationsintervalle der Länge  $L$  zerlegt. Im ersten Abschnitt erhält man zwei Dreiecksverläufe. Im zweiten Abschnitt

ergeben sich zwei trapezförmige Verläufe. Im dritten Abschnitt existieren wieder zwei Dreiecksverläufe.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_B M_{E1}}{EI_y} dx \\
 &= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \frac{(1.5 \cdot 10^6) \cdot (-0.5 \cdot 10^3) \cdot 10^3}{3} \\
 &+ \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \left( + \frac{10^3 \left( (1.5 \cdot 10^6) \left( 2(-0.5 \cdot 10^3) + (-10^3) \right) + (-3 \cdot 10^6) \left( 2(-10^3) + (-0.5 \cdot 10^3) \right) \right)}{6} \right) \\
 &+ \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} \frac{(-3 \cdot 10^6) \cdot (-10^3) \cdot 10^3}{3} \\
 &= \frac{1}{15 \cdot 10^{10}} (-0.25 \cdot 10^{12} + 0.75 \cdot 10^{12} + 10^{12}) = 10 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Der Balken verbiegt sich an der Stelle 2 um 10mm nach unten.

### Lösungen Aufgabe 27:

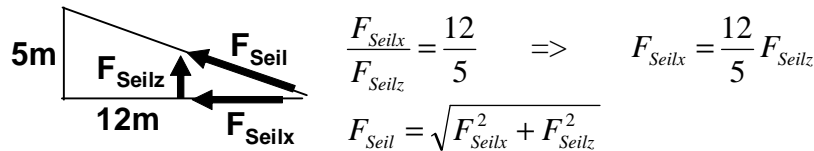
Für die Berechnung der Absenkung des Kraftangriffspunktes benötigt man die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment des Balkens. Dazu zerlegt man die Querschnittsfläche in drei Teilflächen, wobei die oberen beiden Flansche identisch sind.

$$A = 8 \cdot 196 + 2 \cdot 100 \cdot 12 = 3968 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 196^3}{12} + 2 \cdot \left( \frac{100 \cdot 12^3}{12} + 104^2 \cdot 1200 \right) = 31006890 = 3.1 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Für die Berechnung der Lagerkräfte, der inneren Kräfte und Momente wird der Balken freigeschnitten. Das Seil wird durch die Seilkraft  $F_{\text{Seil}}$  und das Balkenlager durch zwei Lagerkräfte ersetzt. Mit Hilfe des Kräftedreiecks und eines geometrischen Dreiecks können die waagrechte und senkrechte Komponente der Seilkraft ermittelt werden.





$$\sum M|_A = 0: -18 \cdot 5 + 12 F_{Seilz} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Seilz} = 7.5 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow F_{Seilx} = \frac{12}{5} F_{Seilz} = 18 \text{ kN}$$

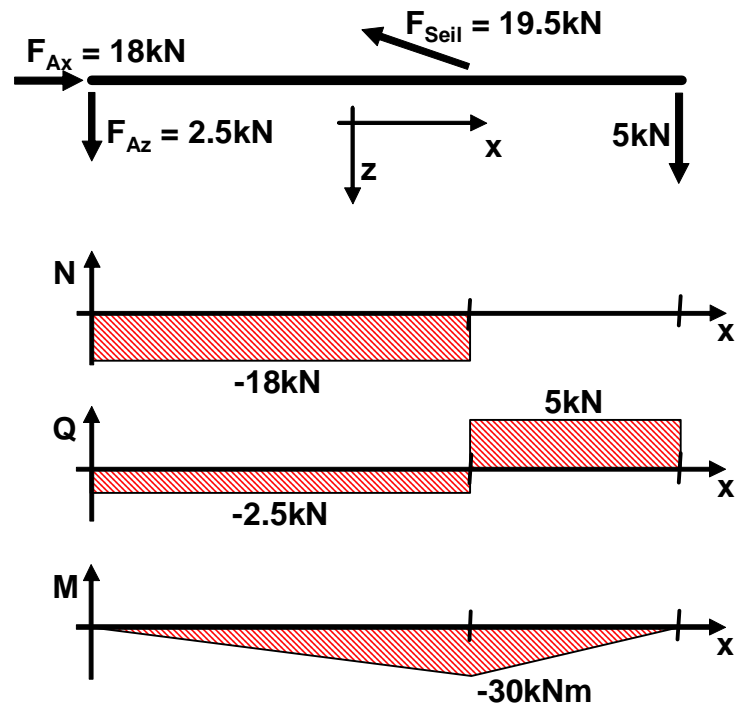
$$\Rightarrow F_{Seil} = \sqrt{F_{Seilx}^2 + F_{Seilz}^2} = 19.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - F_{Seilx} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = 18 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0: F_{Az} + F_{Seilz} + 5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{Az} = 2.5 \text{ kN}$$



Für die Berechnung der senkrechten Absenkung des Kraftangriffspunktes, muss dort eine Kraft vom Betrag 1 angebracht werden. Dadurch resultiert eine Belastung des Bauteils, die bis auf den Faktor 5kN identisch ist zur ursprünglichen Belastung. Daher sind auch die bekannten Schaubilder  $N_E$ ,  $Q_E$  und  $M_E$  bis auf den Faktor 5kN identisch mit den Schaubildern  $N$ ,  $Q$  und  $M$ . Sie müssen nicht neu berechnet werden, sondern können aus den bekannten Schaubildern übernommen werden, indem man in den bekannten Schaubildern alle Größen durch 5kN teilt.

Es muss berücksichtigt werden, dass sich der Kraftangriffspunkt nicht nur durch die Balkenverformung, sondern auch durch die Verlängerung des Seiles absenkt. Dafür kann das Seil wie ein Zugstab mit den Seilkräften  $F_{Seil} = 19.5 \text{ kN}$  und  $F_{SeilE} = 19.5 \text{ kN} / 5 \text{ kN} = 3.9$  betrachtet werden. Für die Integration wird die Seillänge  $L_{Seil}$  benötigt.

$$L_{Seil} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ m}$$

Das Biegemoment im Balken wird durch zwei dachförmige Verläufe über den ganzen Balken berücksichtigt. Alle Größen werden in N und mm umgerechnet. Für die Absenkung  $u$  des Kraftangriffspunktes gilt mit der Balkenlänge  $L = 18 \text{ m}$ :

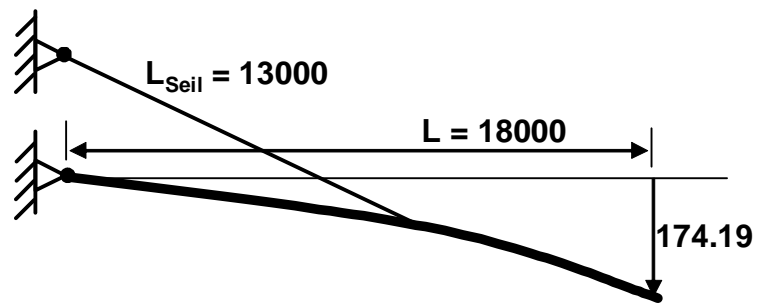
$$u = \underbrace{\int_L \frac{MM_E}{EI_y} dx}_{\text{Biegemoment, Balken}} + \underbrace{\int_{\frac{2}{3}L}^{\frac{1}{3}L} \frac{NN_E}{EA} dx}_{\text{Normalkraft, Balken}} + \underbrace{\int_{L_{Seil}} \frac{F_{Seil} F_{SeilE}}{EA_{Seil}} dx}_{\text{Normalkraft, Seil}} = \frac{1}{EI_y} \int_L MM_E dx + \frac{NN_E}{EA} \frac{2L}{3} + \frac{F_{Seil} F_{SeilE}}{EA_{Seil}} L_{Seil}$$

$$= \frac{1}{200000 \cdot 3.1 \cdot 10^7} \frac{(-30 \cdot 10^6)(-6 \cdot 10^3) \cdot 18 \cdot 10^3}{3} + \frac{(-18 \cdot 10^3)(-3.6) \cdot 2 \cdot 18 \cdot 10^3}{200000 \cdot 3968} + \frac{19.5 \cdot 10^3 \cdot 3.9}{30 \cdot 10^6} 13 \cdot 10^3$$

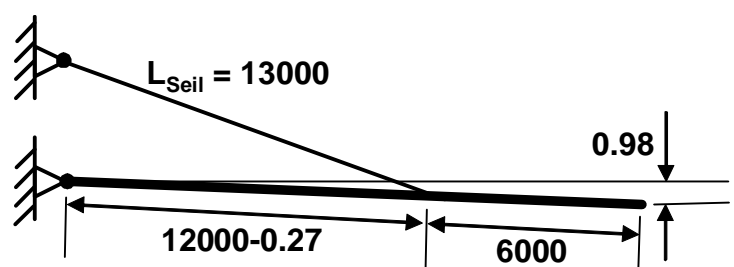
$$= 174.19 + 0.98 + 32.96 = 208.13 \text{ mm}$$

Der Kraftangriffspunkt senkt sich um 208mm nach unten ab.

Wäre die Zugsteifigkeit des Balkens und des Seiles unendlich steif ( $EA \rightarrow \infty$ ,  $EA_{Seil} \rightarrow \infty$ ), würde sich der Balken nur infolge des Biegemoments verbiegen. Die Seillänge  $L_{Seil}$  und die waagrechte Balkenlänge  $L$  blieben unverändert. Der Fehler, dass der Balken insgesamt länger werden muss, wenn sich der Kraftangriffspunkt infolge des Biegemoments senkrecht absenkt, entsteht durch die Annahmen bei der Herleitung der Berechnungsgleichungen und muss akzeptiert werden.

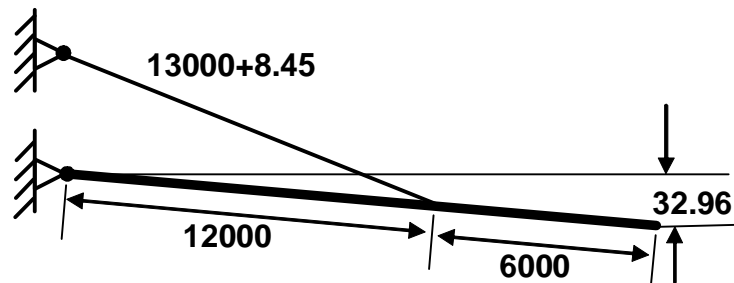


Wählt man die Biegesteifigkeit ( $EI_y \rightarrow \infty$ ) des Balkens und die Zugsteifigkeit ( $EA_{Seil} \rightarrow \infty$ ) des Seiles unendlich groß, so würde sich der Kraftangriffspunkt nur durch Verkürzung des Balkens in den ersten beiden Dritteln des Balkens absenken. Der Balken bliebe gerade und das Seil würde seine Ursprungslänge  $L_{Seil}$  behalten. Die Verkürzung des Balkens erhält man aus der negativen Normalkraft im Balken, dem Hookeschen Gesetz und der Definition der Dehnung.



$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{N}{EA} L = \frac{-18 \cdot 10^3}{200000 \cdot 3968} 12 \cdot 10^3 = -0.27 \text{ mm}$$

Betrachtet man den Balken als unendlich steif ( $EI_y \rightarrow \infty$ ,  $EA \rightarrow \infty$ ), so bleibt der Balken unverändert. Trotzdem senkt sich der Kraftangriffspunkt durch die Verlängerung des Seiles ab. Diese Seilverlängerung kann analog zur vorigen Balkenverkürzung berechnet werden.

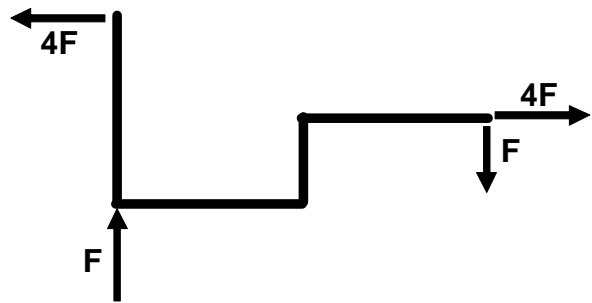


$$\frac{\Delta L_{Seil}}{L_{Seil}} = \varepsilon_{Seil} = \frac{\sigma_{Seil}}{E_{Seil}} = \frac{F_{Seil}}{EA_{Seil}} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_{Seil} = \frac{F_{Seil}}{EA_{Seil}} L_{Seil} = \frac{19.5 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} 13 \cdot 10^3 = 8.45 \text{ mm}$$

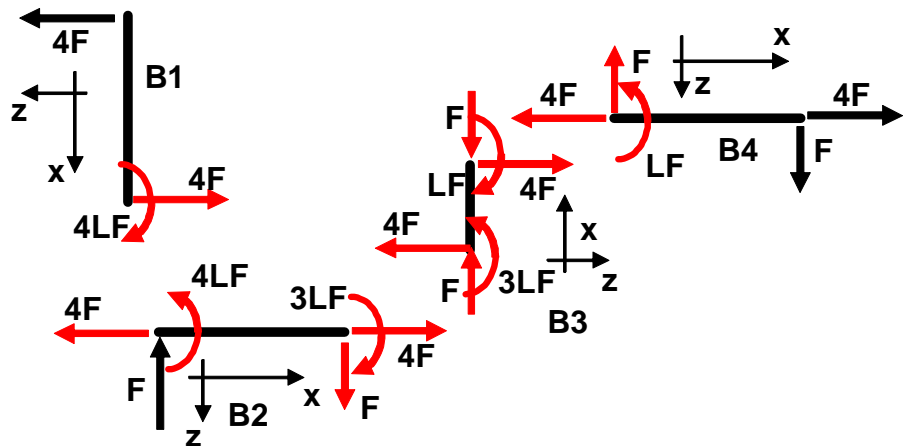
**Lösungen Aufgabe 28:**

Geometrie 1:

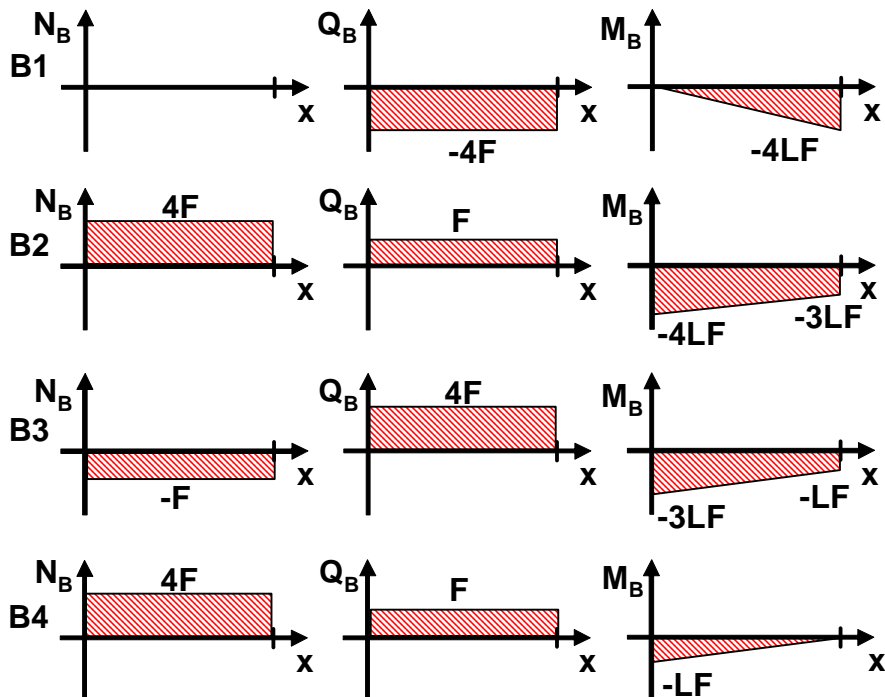
Lagerkräfte durch die Belastungen mit der Kraft  $F$ :



Schnittkräfte zwischen den vier Teilbalken B1, B2, B3 und B4 durch die Belastungen mit der Kraft  $F$ :



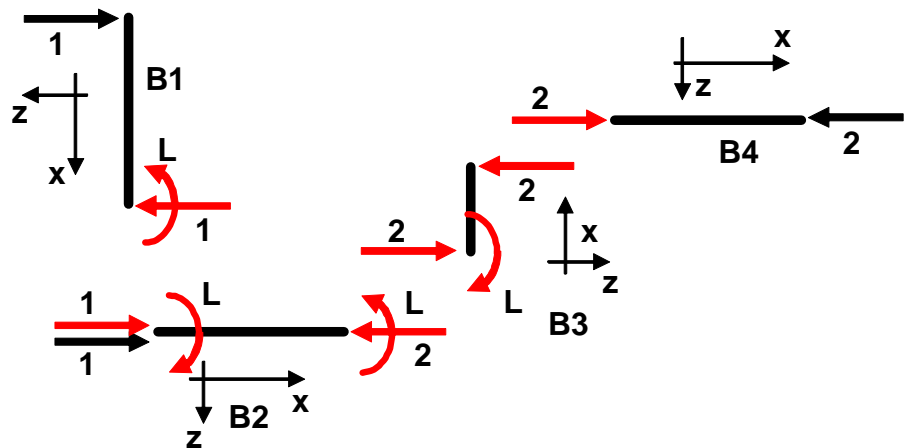
Innere Kräfte und Momente durch die Belastungen mit der Kraft  $F$ :



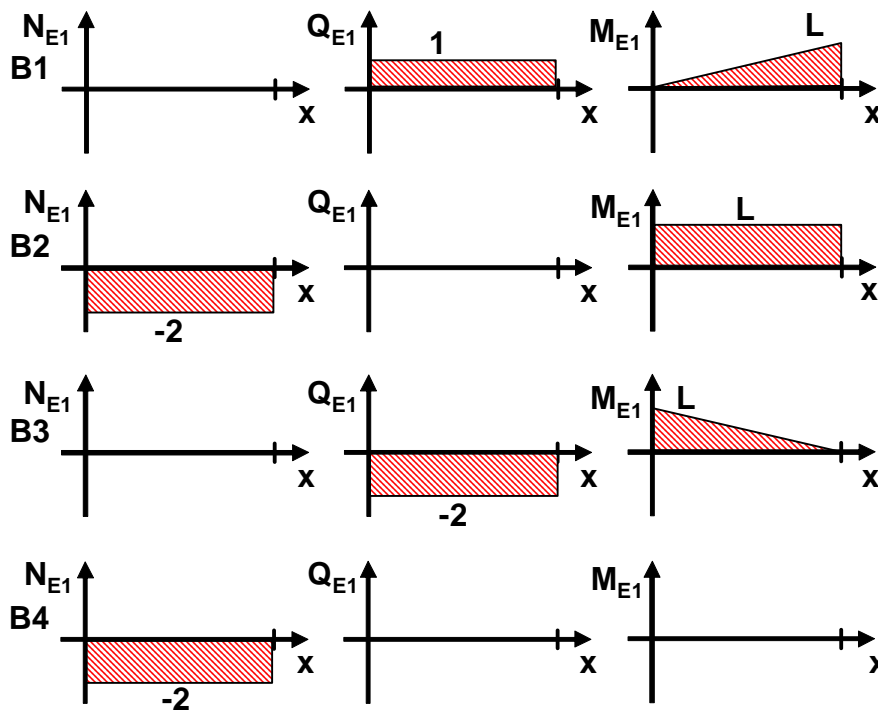
Berechnung der Verschiebung  $u_1$ :

An der Kraftangriffsposition muss eine waagrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe  $N_{E1}$ ,  $Q_{E1}$  und  $M_{E1}$  ermittelt werden.

Lagerkräfte und  
 Schnittkräfte zwischen den  
 vier Teilbalken B1, B2, B3  
 und B4:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



Verschiebung  $u_1$ :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{EA} (4F \cdot (-2) \cdot L + 4F \cdot (-2) \cdot L) \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left( \frac{(-4LF)L \cdot L}{3} + \frac{L \cdot L((-4LF) + (-3LF))}{2} + \frac{L \cdot \frac{L}{2}(2(-3L) + (-L))}{6} \right) \\
 &= \frac{FL}{EA} (-8 - 8) + \frac{FL^3}{EI_y} \left( -\frac{4}{3} - \frac{7}{2} + \frac{-7}{6} \right) = -16 \frac{FL}{EA} - \frac{65 FL^3}{12 EI_y}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Verschiebung  $u_2$ :

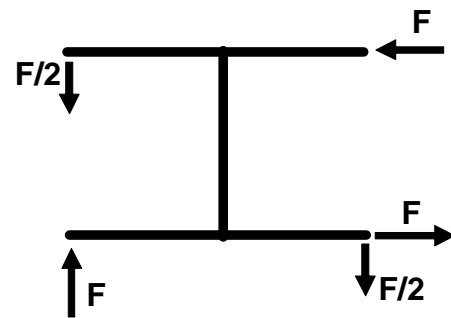
An der Kraftangriffsposition muss eine senkrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe  $N_{E2}$ ,  $Q_{E2}$  und  $M_{E2}$  ermittelt werden. Dies können direkt aus  $N_B$ ,  $Q_B$  und  $M_B$  ermittelt werden, wenn man in diesen Schaubildern  $F$  durch 1 ersetzt.

Verschiebung  $u_2$ :

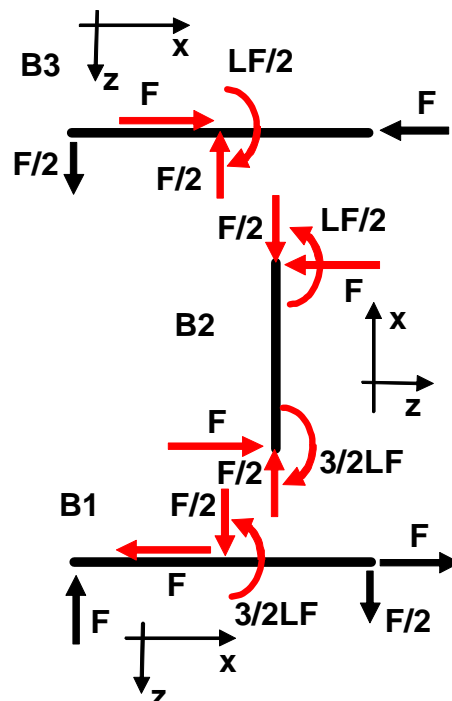
$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{1}{EA} \left( 4F \cdot 4 \cdot L + (-F)(-1) \frac{L}{2} + 4F \cdot 4 \cdot L \right) \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left( \frac{(-4LF)(-4L)L}{3} + \frac{L[(-4LF)(2(-4L) + (-3L)) + (-3LF)(2(-3L) + (-4L))]}{6} \right) \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left( \frac{\frac{L}{2}[(-3LF)(2(-3L) + (-L)) + (-LF)(2(-L) + (-3L))]}{6} + \frac{(-LF)(-L)L}{3} \right) \\
 &= \frac{FL}{EA} \left( 16 + \frac{1}{2} + 16 \right) + \frac{FL^3}{EI_y} \left( \frac{16}{3} + \frac{74}{6} + \frac{13}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{65}{2} \frac{FL}{EA} + \frac{121}{6} \frac{FL^3}{EI_y}
 \end{aligned}$$

Geometrie 2:

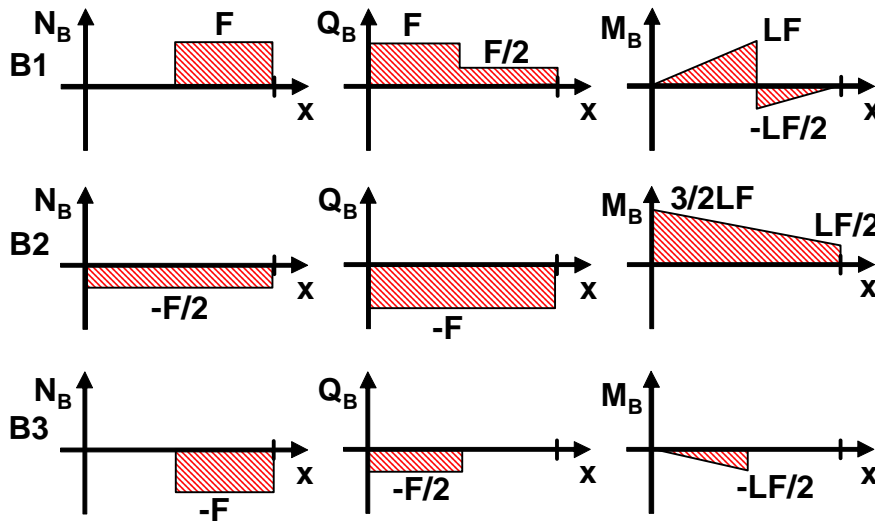
Lagerkräfte durch die Belastungen mit den beiden Kräften  $F$ :



Schnittkräfte zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3 durch die Belastungen mit den beiden Kräften  $F$ :



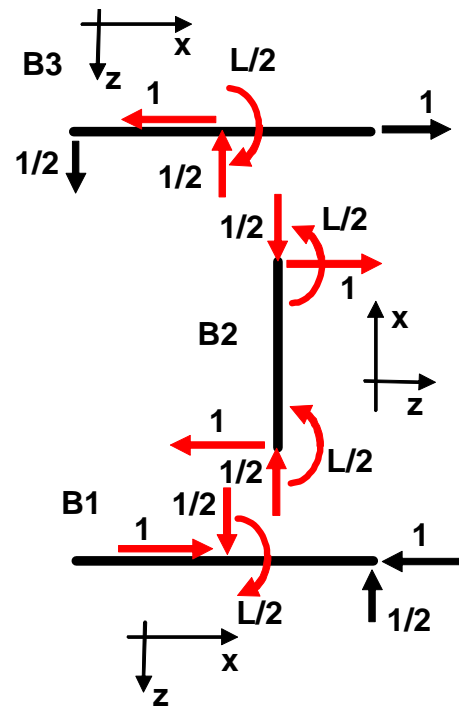
Innere Kräfte und Momente durch die Belastungen mit den beiden Kräften F:



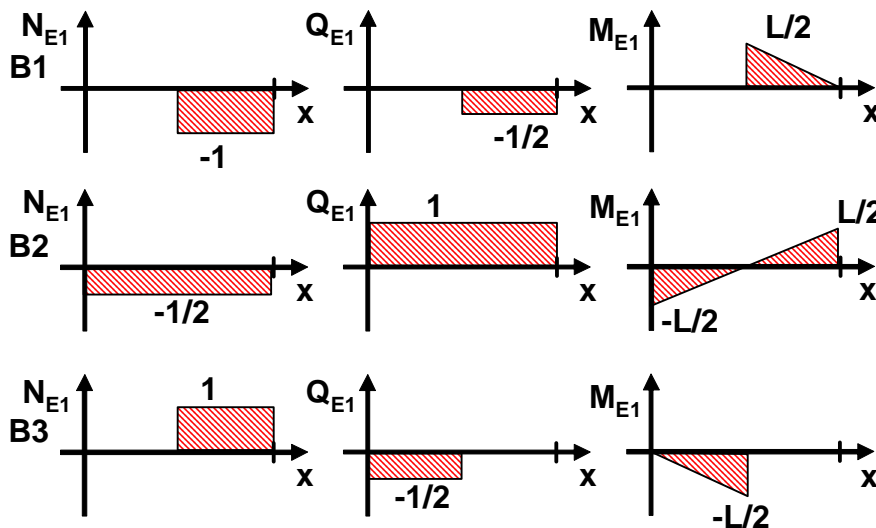
Berechnung der Verschiebung  $u_1$ :

An der Position 1 muss eine waagrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe  $N_{E1}$ ,  $Q_{E1}$  und  $M_{E1}$  ermittelt werden.

Lagerkräfte und Schnittkräfte infolge der Einheitskraft zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



Verschiebung  $u_1$ :

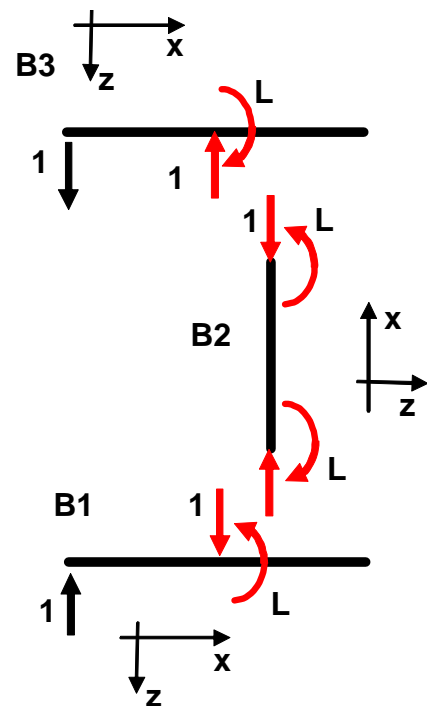
$$u_1 = \frac{1}{EA} \left( F(-1)L + \left(-\frac{F}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)L + (-F)1 \cdot L \right) + \frac{1}{EI_y} \left( \frac{\left(-\frac{FL}{2}\right) \left(\frac{L}{2}\right)L}{3} + \frac{L \left[ \frac{3LF}{2} \left( 2 \left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2} \right) + \frac{LF}{2} \left( 2 \frac{L}{2} + \left(-\frac{L}{2}\right) \right) \right]}{6} + \frac{\left(-\frac{FL}{2}\right) \left(-\frac{L}{2}\right)L}{3} \right)$$

$$= \frac{FL}{EA} \left( -1 + \frac{1}{4} - 1 \right) + \frac{FL^3}{EI_y} \left( \frac{1}{12} + \frac{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{6} - \frac{1}{12} \right) = -\frac{7FL}{4EA} - \frac{FL^3}{12EI_y}$$

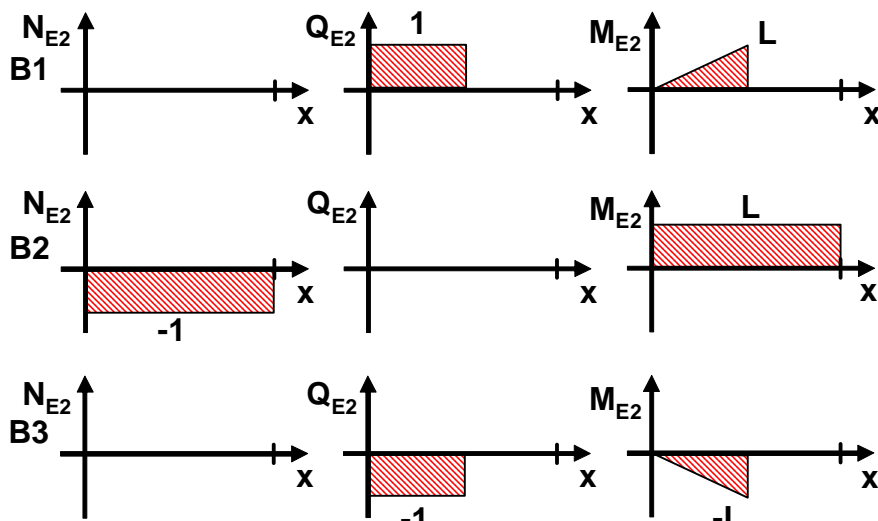
Berechnung der Verschiebung  $u_2$ :

An der Position 2 muss eine senkrechte Kraft vom Betrag 1 angebracht und die Verläufe  $N_{E2}$ ,  $Q_{E2}$  und  $M_{E2}$  ermittelt werden.

Lagerkräfte und Schnittkräfte infolge der Einheitskraft zwischen den drei Teilbalken B1, B2 und B3:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



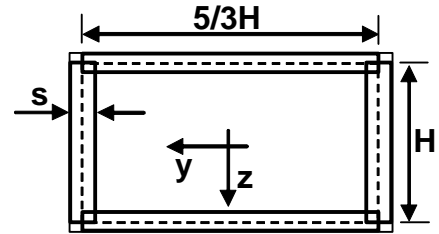
Verschiebung  $u_2$ :

$$u_2 = \frac{1}{EA} \left( \left( -\frac{F}{2} \right) (-1)L \right) + \frac{1}{EI_y} \left( \frac{LF \cdot L \cdot L}{3} + \frac{L \cdot L \left( \frac{3LF}{2} + \frac{LF}{2} \right)}{2} + \frac{\left( -\frac{FL}{2} \right) (-L)L}{3} \right)$$

$$= \frac{FL}{EA} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{FL^3}{EI_y} \left( \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{6} \right) = \frac{FL}{2EA} + \frac{3FL^3}{2EI_y}$$

**Lösungen Aufgabe 29:**

Für die Verschiebungs- und Spannungsberechnung benötigt man die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment des dünnwandigen Profils. Dafür zerlegt man dieses in vier Rechtecke.



$$A = 2 \frac{5}{3} Hs + 2sH = \frac{16}{3} Hs$$

$$I_y = 2 \frac{\frac{5}{3} Hs^3}{12} + 2 \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{5}{3} Hs + 2 \frac{sH^3}{12} = \frac{10Hs^3}{36} + H^3s = H^3s$$

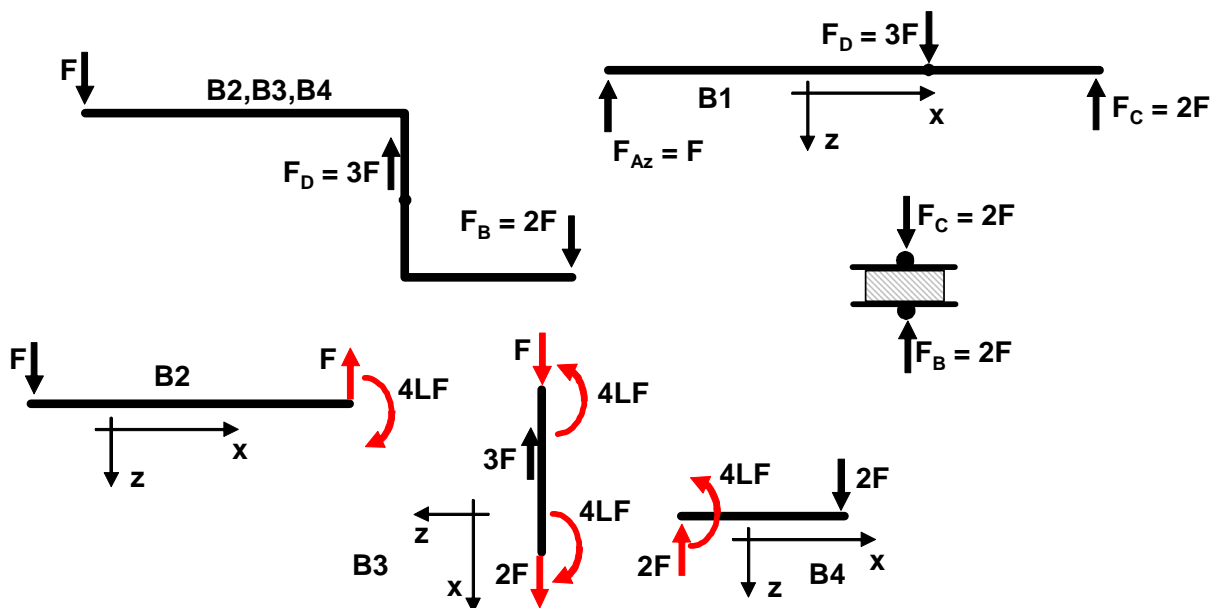
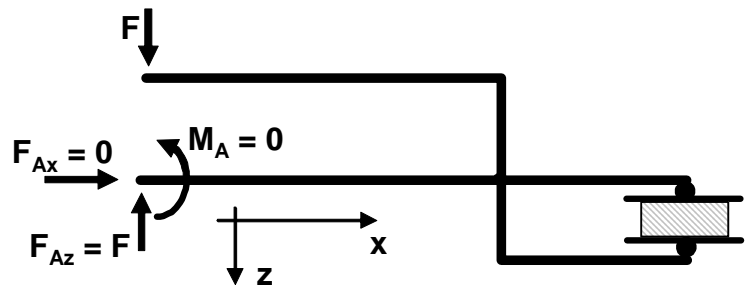
Begonnen wird mit der Berechnung der Lagerkräfte und des Lagermomentes. Dazu wird die gesamte Presse als ein Bauteil betrachtet.

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F = 0$$

$$\Rightarrow F_{Az} = F$$

$$\sum M|_A = 0: \quad M_A = 0$$





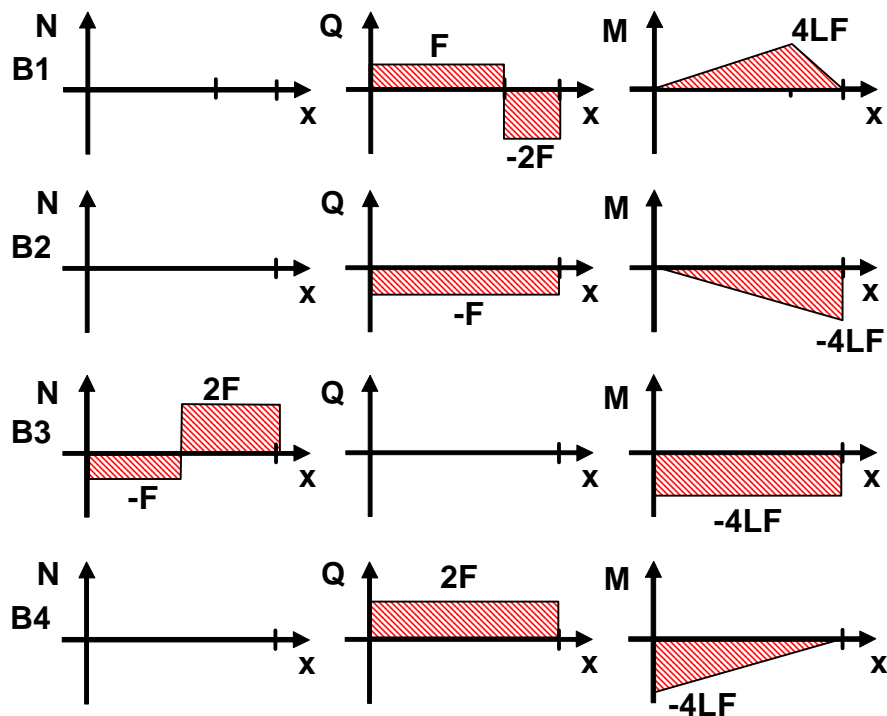
Das Bauteil muss in den Balken B1, in das Werkstück und in das Teilbauteil B2, B3, B4 zerlegt werden. Da keine waagrecht Kräfte am Bauteil wirksam sind, benötigt man auch keine waagrecht Schnittkräfte.

Betrachtung des Balkens B1:

$$\sum M|_D = 0: 2LF_C - 4LF_{Az} = 0 \Rightarrow F_C = 2F$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + F_D - F_C = 0 \Rightarrow F_D = 3F$$

Das Bauteil B2, B3, B4 muss wie oben dargestellt in die Teilbalken zerlegt werden. Anschließend können die inneren Kräfte und Momente bestimmt werden.



a.) Für die Berechnung der senkrechten Verschiebung  $u$  des Kraftangriffspunktes muss man für die Verläufe infolge Einheitskraft die Kraft  $F$  durch die 1 ersetzen. Die Belastung des Bauteils bleibt bis auf den Faktor  $F$  identisch. Daher können die Verläufe infolge Einheitskraft direkt aus den Schaubildern infolge der Kraft  $F$  ermittelt werden, indem man in diesen die Kraft  $F$  durch 1 ersetzt. Für die Verschiebung werden die Normalkraft und das Biegemoment berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{4LF \cdot 4L \cdot 6L}{3} + \frac{(-4LF)(-4L)4L}{3} + (-4LF)(-4L)2L + \frac{(-4LF)(-4L)2L}{3} \right) \\
 &+ \frac{1}{EA} ((-F)(-1)L + 2F \cdot 2 \cdot L) \\
 &= \frac{FL^3}{EI_y} \left( 32 + \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{3} \right) + \frac{FL}{EA} (1+4) = 96 \frac{FL^3}{EI_y} + 5 \frac{FL}{EA} = 96 \frac{FL^3}{EH^3s} + \frac{15}{16} \frac{FL}{EHs}
 \end{aligned}$$

b.) Die maximalen Normalspannungen treten im Teilbalken B3 auf. Die Gleichung für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments in Balken B3 lautet:

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{-4LF}{H^3 s} z$$

Die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem negativen betragsmäßig großen z-Wert:

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = -\frac{H}{2} \right) = \frac{-4LF}{H^3 s} \left( -\frac{H}{2} \right) = \frac{2LF}{H^2 s}$$

Die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem positiven betragsmäßig großen z-Wert:

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = \frac{H}{2} \right) = \frac{-4LF}{H^3 s} \frac{H}{2} = -\frac{2LF}{H^2 s}$$

Im Balken B3 existiert eine Normalkraft. Die negative Normalkraft in der ersten Balkenhälfte verstärkt die Druckspannungen infolge des Biegemoments. Diese Druckspannungen infolge Normalkraft in der ersten Balkenhälfte erhält man mit:

$$\sigma_{\text{Normalkraft,1}} = \frac{N}{A} = \frac{-F}{\frac{16}{3} Hs} = -\frac{3F}{16Hs}$$

In der zweiten Balkenhälfte wirkt eine positive Normalkraft, die eine positive Normalspannung infolge Normalkraft erzeugt.

$$\sigma_{\text{Normalkraft,2}} = \frac{N}{A} = \frac{2F}{\frac{16}{3} Hs} = \frac{3F}{8Hs}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge des Biegemoments und Normalkraft ergibt die maximalen Normalspannungen im Bauteil. Die maximalen Zugspannungen sind in der zweiten Hälfte des Balkens B3 und lauten:

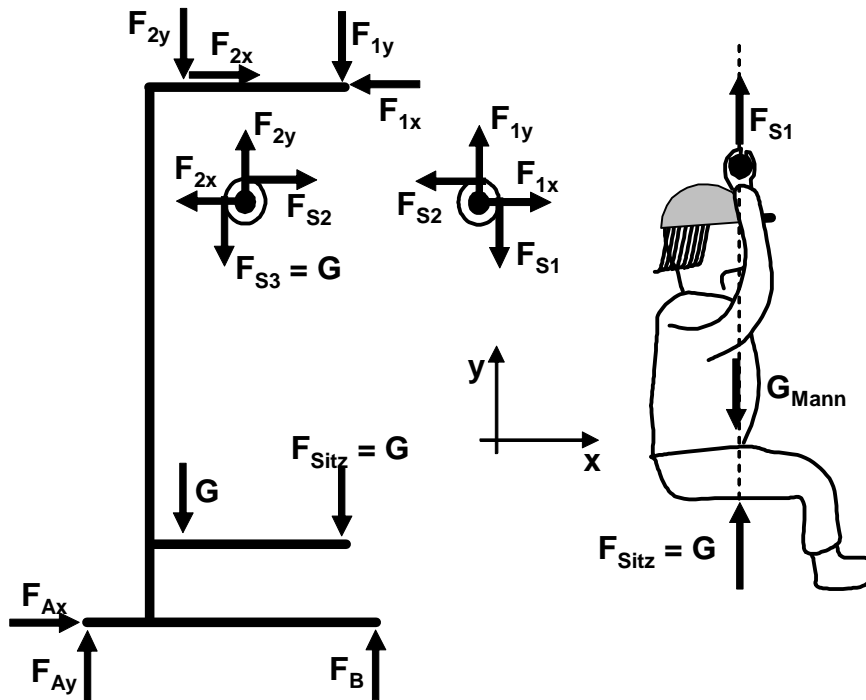
$$\sigma_{\text{max Zug}} = \sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft,2}} = \frac{2LF}{H^2 s} + \frac{3F}{8Hs}$$

Die maximalen Druckspannungen sind in der ersten Hälfte des Balkens B3 und lauten:

$$\sigma_{\text{max Druck}} = \sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft,1}} = -\frac{2LF}{H^2 s} - \frac{3F}{16Hs}$$

**Lösungen Aufgabe 30:**

a.) Zuerst werden der Rahmen, der Mensch und die Rollen frei geschnitten. Die dargestellten Schnittkräfte müssen eingeführt werden.



Die Bilanz der Momente an der linken Rolle (Punkt 23) mit dem Radius R ergibt:

$$\sum M|_{23} = 0: \quad RF_{S3} - RF_{S2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{S2} = F_{S3} = G$$

Die Bilanz der Momente an der rechten Rolle (Punkt 12) mit dem Radius R ergibt:

$$\sum M|_{12} = 0: \quad RF_{S2} - RF_{S1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{S1} = F_{S2} = G$$

Mit der Kräftebilanz in senkrechter Richtung am Mann erhält man dessen Gewichtskraft.

$$\sum F_y = 0: \quad F_{S1} - G_{Mann} + F_{Sitz} = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{Mann} = F_{S1} + F_{Sitz} = 2G$$

Da am Sitz und am Seil nur eine senkrechte Kraft übertragen werden können, müssen alle drei am Mann angreifenden Kräfte die gleiche Wirklinie besitzen. Ansonsten wäre das Momentengleichgewicht verletzt.

b.) Für die Lagerkraftberechnung kann das Gesamtbauteil mit den am Gesamtbauteilangreifenden Kräfte betrachtet werden

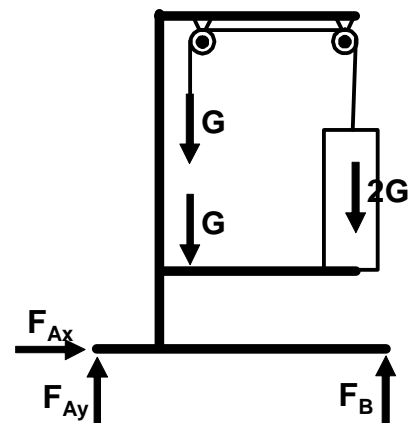
$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M|_A = 0: \quad 8LF_B - 3LG - 3LG - 7L2G = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_B = \frac{20}{8}G = 2.5G$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - G - G - 2G = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ay} = 4G - F_B = 1.5G$$



c.) Am Rahmen sind noch die Kräfte  $F_{1x}$ ,  $F_{1y}$ ,  $F_{2x}$  und  $F_{2y}$  unbekannt. Die gewinnt man mit den Kräftegleichgewichten an den beiden Rollen.

Linke Rolle:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{S2} - F_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow F_{2x} = F_{S2} = G$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{S3} + F_{2y} = 0$$

$$\Rightarrow F_{2y} = F_{S3} = G$$

Rechte Rolle:

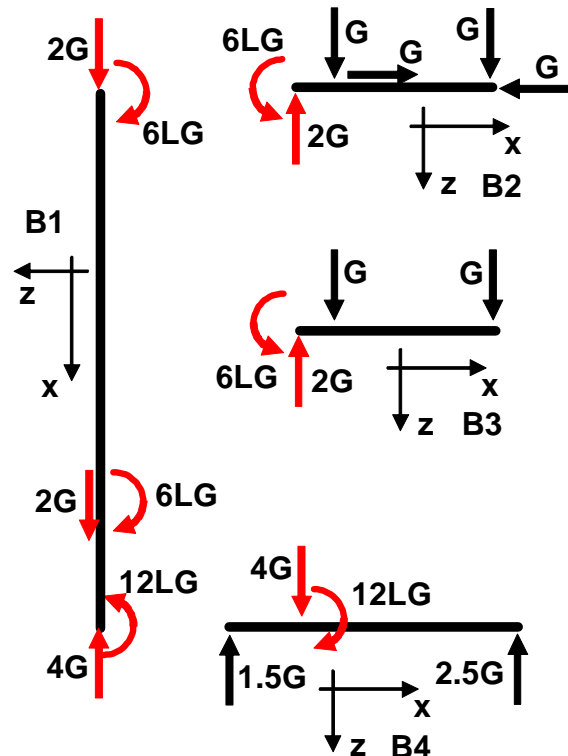
$$\sum F_x = 0: \quad -F_{S2} + F_{1x} = 0$$

$$\Rightarrow F_{1x} = F_{S2} = G$$

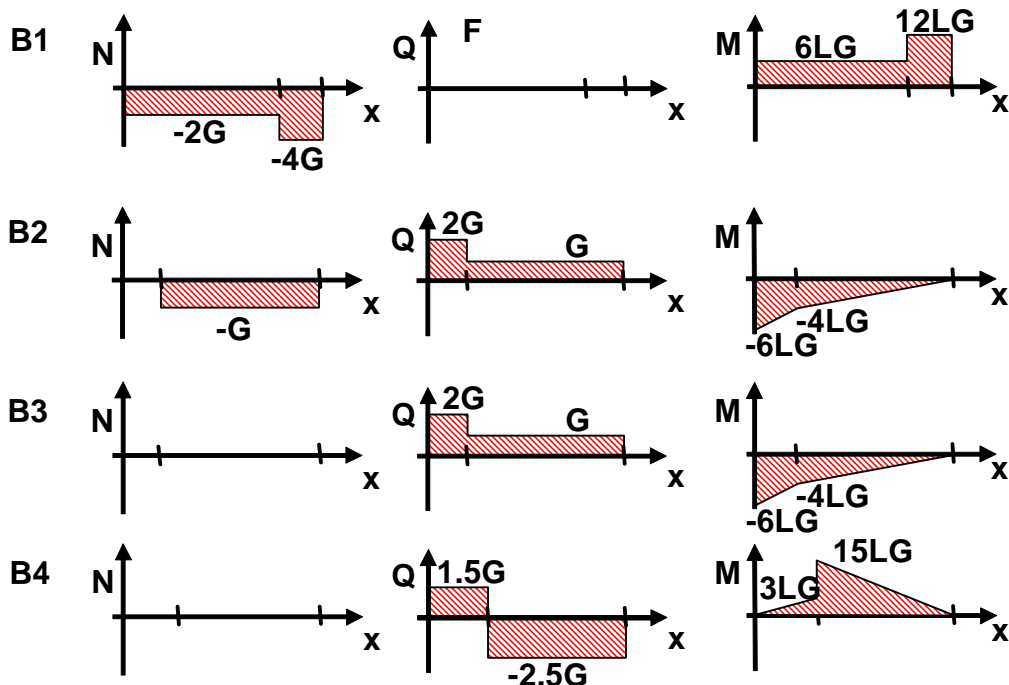
$$\sum F_y = 0: \quad -F_{S1} + F_{1y} = 0$$

$$\Rightarrow F_{1y} = F_{S1} = G$$

Der Rahmen kann in einen senkrechten B1 und drei wagrechte Balken B2, B3, B4 zerlegt werden. Die rechts dargestellten Schnittkräfte müssen an den isolierten Balken angebracht werden.



Innere Kräfte und Momente:

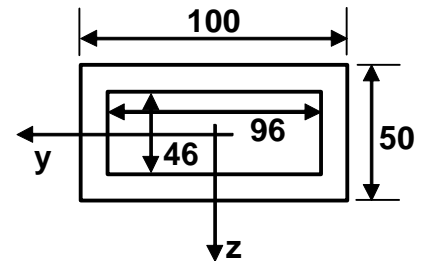


d.) Die maximalen Normalspannungen infolge Biegemoment existieren am Verbindungspunkt unterer waagrechter Balken mit senkrechtem Balken im waagrechten Balken.

e.) Die Zug- und Druckspannungen im senkrechten Balken setzen sich aus Normalspannungen infolge Biegemoment und Normalspannungen infolge Normalkraft zusammen. Zur Berechnung müssen das Flächenträgheitsmoment und die Querschnittsfläche bekannt sein.

$$I_y = \frac{100 \cdot 50^3}{12} - \frac{96 \cdot 46^3}{12} = 262979 \text{ mm}^4$$

$$A = 100 \cdot 50 - 96 \cdot 46 = 584 \text{ mm}^2$$



Zuerst wir die Stelle mit betragsmäßig größter Normalkraft (-4G) und größtem Biegemoment (12GL) betrachtet.

Normalspannungen infolge des Biegemomentes:

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{12LG}{I_y} z = \frac{12 \cdot 100 \cdot 500}{262979} z = 2.28z$$

Die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem positiven großen z-Wert an der Balkenunterseite:

$$\sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = 25) = 2.28 \cdot 25 = 57 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die maximalen Druckspannungen infolge des Biegemoments erhält man mit einem negativen betragsmäßig großen z-Wert an der Oberseite des Balkens:

$$\sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = -25) = 2.28(-25) = -57 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Normalspannungen infolge Normalkraft:

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N}{A} = \frac{-4G}{A} = -\frac{4 \cdot 500}{584} = -3.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Überlagerung der Normalspannungen infolge des Biegemoments und Normalkraft ergibt die maximalen Normalspannungen in diesem Balkenabschnitt.

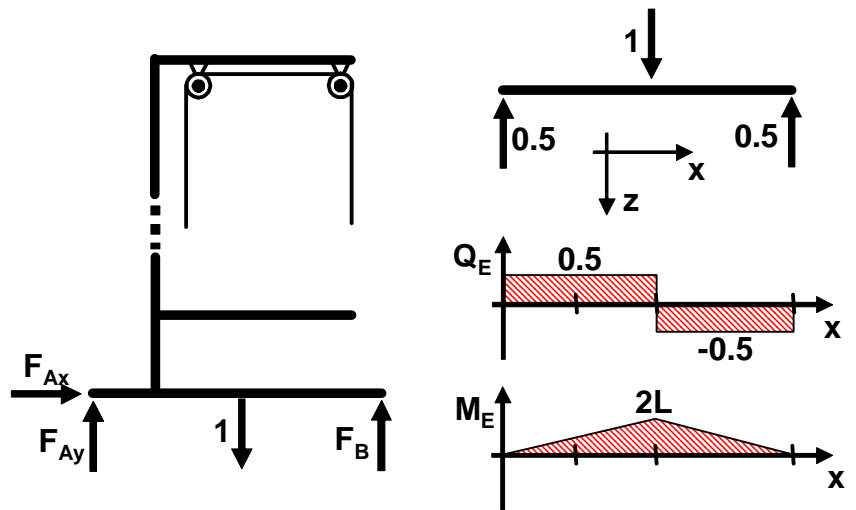
$$\sigma_{\text{max Zug}} = \sigma_{\text{max Zug, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = 57 - 3.4 = 53.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{max Druck}} = \sigma_{\text{max Druck, Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = -57 - 3.4 = -60.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Im Balkenbereich mit Normalkraft  $N = -2G$  und Biegemoment  $6LG$  wird die positive Zugspannung infolge Biegemoment weniger stark durch die Normalspannung infolge Normalkraft reduziert. Weil die Normalspannungen infolge des Biegemoments in diesem Bereich deutlich kleiner sind als im vorher betrachteten Bereich, resultieren in Summe kleinere maximale Zugspannungen. Daher sind die oben ausgerechneten Werte  $\sigma_{\text{maxZug}}$  und  $\sigma_{\text{maxDruck}}$  die Extremwerte im senkrechten Balken.

f.) Für die senkrechte Absenkung  $u$  des mittleren Punktes des unteren waagrechten Balkens, muss an der zu untersuchenden Stelle die Einheitskraft angebracht werden. Man erkennt, dass nur der untere waagrechte Balken von dieser „Belastung“ betroffen ist. Daher ergeben sich nur in diesem Balken infolge der Einheitskraft innere Kräfte und Momente ungleich null

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0 \\ \sum M|_A = 0: & \quad 8LF_B - 4L \cdot 1 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_B = 0.5 \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} + F_B - 1 = 0 \\ \Rightarrow & \quad F_{Ay} = 1 - F_B = 0.5 \end{aligned}$$



Berechnung der Verschiebung  $u$ :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{3LG \cdot L \cdot 2L}{3} + \frac{2L(15LG(2L+2L)+10LG(2 \cdot 2L+L))}{6} + \frac{10LG \cdot 2L \cdot 4L}{3} \right) = \frac{166}{3} \frac{GL^3}{EI_y} \\ &= \frac{166}{3} \frac{500 \cdot 100^3}{70000 \cdot 262979} = 1.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Lösungen Aufgabe 31:**

a.) Die Streckenlasten  $q_1$  und  $q_2$  werden durch die Ersatzkräfte  $F_{\text{Ersatz1}}$  und  $F_{\text{Ersatz2}}$  ersetzt.

$$F_{\text{Ersatz1}} = 1200q_1 = 1200 \cdot 20 = 24000 \text{ N}$$

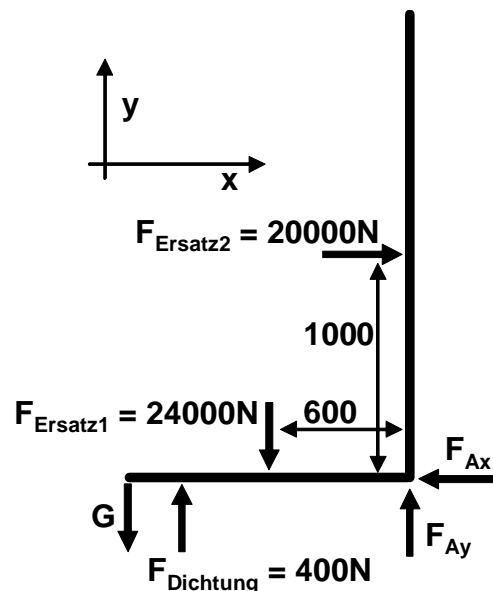
$$F_{\text{Ersatz2}} = 2000q_2 = 2000 \cdot 10 = 20000 \text{ N}$$

Sie greifen 600mm links vom Lager A bzw. 1000mm oberhalb vom Lager A an. In der Realität würde sich die Streckenlast  $q_2$  linear ändern. An der Wasseroberfläche hätte sie den Betrag null und am Lager A den Betrag 20N/mm.

Mit dem Momentengleichgewicht um das Lager A können das notwendige Gegengewicht und die Lagerkräfte berechnet werden.

$$\sum M|_A = 0: \quad 1200G - 1000F_{\text{Dichtung}} + 600F_{\text{Ersatz1}} - 1000F_{\text{Ersatz2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{1000F_{\text{Dichtung}} - 600F_{\text{Ersatz1}} + 1000F_{\text{Ersatz2}}}{1200} = \frac{1000 \cdot 400 - 600 \cdot 24000 + 1000 \cdot 20000}{1200} = 5000 \text{ N}$$



b.) Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente benötigt man auch die Lagerkräfte  $F_{Ax}$  und  $F_{Ay}$ .

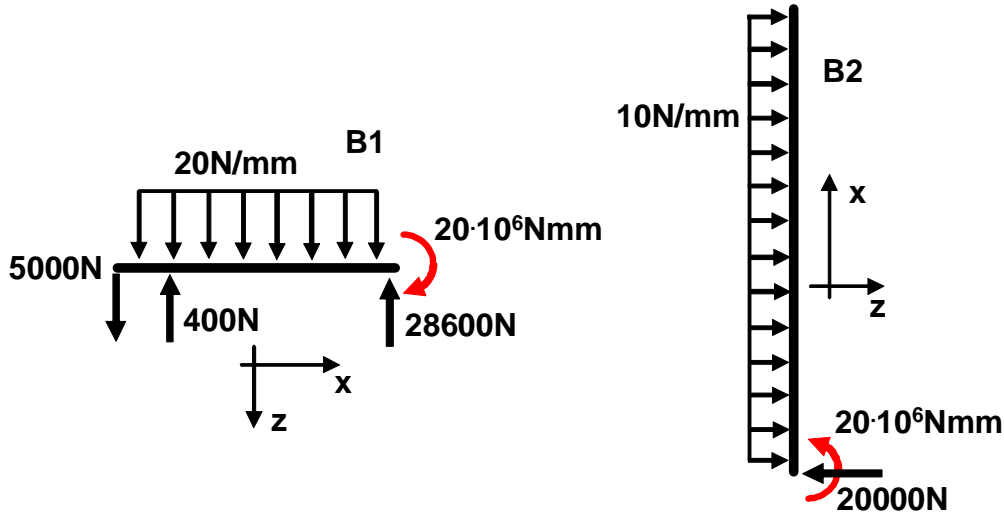
$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ersatz2} - F_{Ax} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = F_{Ersatz2} = 20000N$$

$$\sum F_y = 0: \quad -G + F_{Dichtung} - F_{Ersatz1} + F_{Ay} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = G - F_{Dichtung} + F_{Ersatz1} = 5000 - 400 + 24000 = 28600N$$

Zerschneidet man die beiden Balken, erhält man das dargestellte Schnittbild:



Innere Kräfte und Momente:

Balken B1:

Intervall 1 ( $0 \leq x \leq 200$ ):

$$Q(x) = -5000 - 20x$$

$$M(x) = -5000x - 10x^2 + c_1$$

Randbedingung  $M(x=0) = 0$ :

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

Endwert:

$$M(x=200) = -5000 \cdot 200 - 10 \cdot 200^2 = -1.4 \cdot 10^6 Nmm$$

Intervall 2 ( $200 \leq x \leq 1200$ ):

$$Q(x) = -4600 - 20x$$

$$M(x) = -4600x - 10x^2 + c_1$$

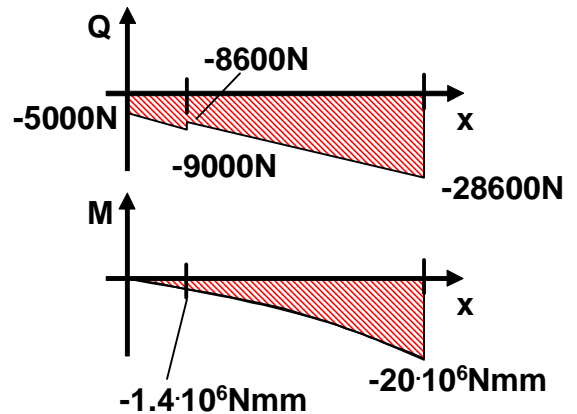
Randbedingung  $M(x=200) = -1.4 \cdot 10^6$ :

$$M(x=200) = -1.4 \cdot 10^6 = -4600 \cdot 200 - 10 \cdot 200^2 + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = -80000$$

Endwert:

$$M(x=1200) = -4600 \cdot 1200 - 10 \cdot 1200^2 - 80000 = -20 \cdot 10^6 Nmm$$



Balken B2:

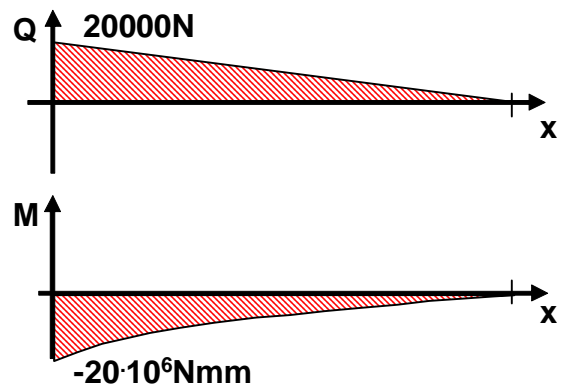
$$Q(x) = 20000 - 10x$$

$$M(x) = 20000x - 5x^2 + c_1$$

Randbedingung  $M(x=0) = -20 \cdot 10^6$ :

$$M(x=0) = -20 \cdot 10^6 = 20000 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = -20 \cdot 10^6$$



Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{1000 \cdot 20^3}{12} = 666667 \text{ mm}^4$$

Betrag der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M_{\text{max}}}{I_y} z = \frac{-20 \cdot 10^6}{666667} z = -30z$$

Maximale Zugspannungen für  $z = -10$ :

$$\sigma_{\text{max ZugBiegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = -10) = -30(-10) = 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Druckspannungen für  $z = 10$ :

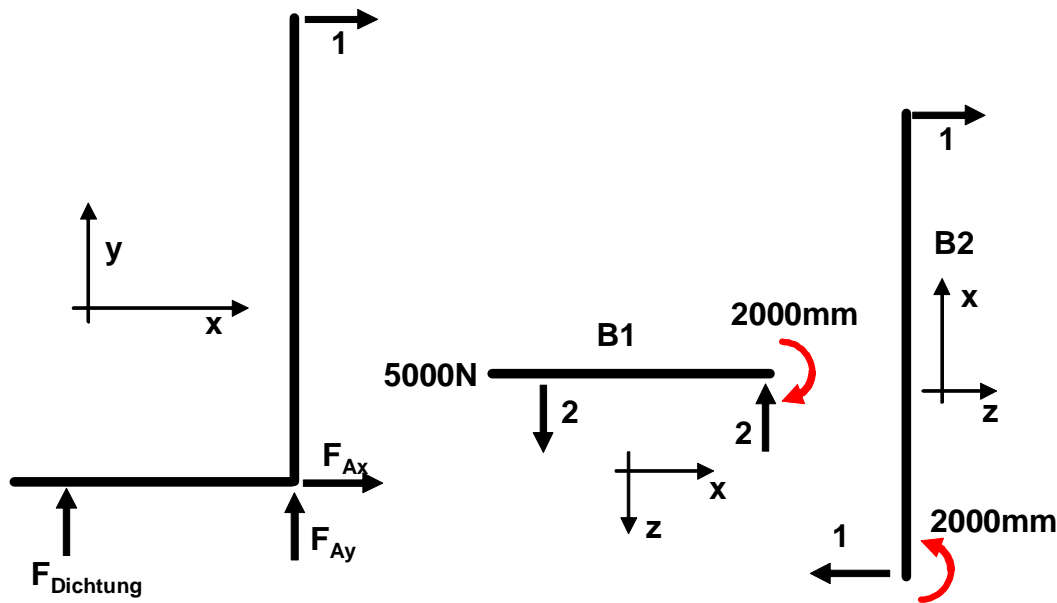
$$\sigma_{\text{max DruckBiegemoment}} = \sigma_{\text{Biegemoment}}(z = 10) = -30 \cdot 10 = -300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

c.) Für die Berechnung der waagrechten Verschiebung  $u$  des Kraftangriffspunktes von  $F$  muss diese durch die Einheitskraft ersetzt werden. Am Bauteil sind weiter die Lagerkräfte  $F_{Ax}$  und  $F_{Ay}$  zu berücksichtigen. Da das Bauteil statisch bestimmt gelagert sein muss, benötigt man eine zusätzliche Lagerung. Die Dichtung sorgt dafür, dass der Balkenpunkt, welcher die Dichtung berührt, sich nicht vertikal verschiebt. Daher ist bekannt, dass die vertikale Verschiebung an diesem Punkt gleich null ist. Daher kann man die Relativverschiebung des Kraftangriffspunktes von  $F$  bezüglich dieses Punktes angeben. Da dieser sich nicht bewegt, ist dies gleichzeitig die Absolutverschiebung. Zur Berechnung der Relativverschiebung kann am Dichtungspunkt eine senkrechte Lagerung angenommen werden. Daher kann dort die fehlende Lagerkraft  $F_{\text{Dichtung}}$  eingezeichnet werden.

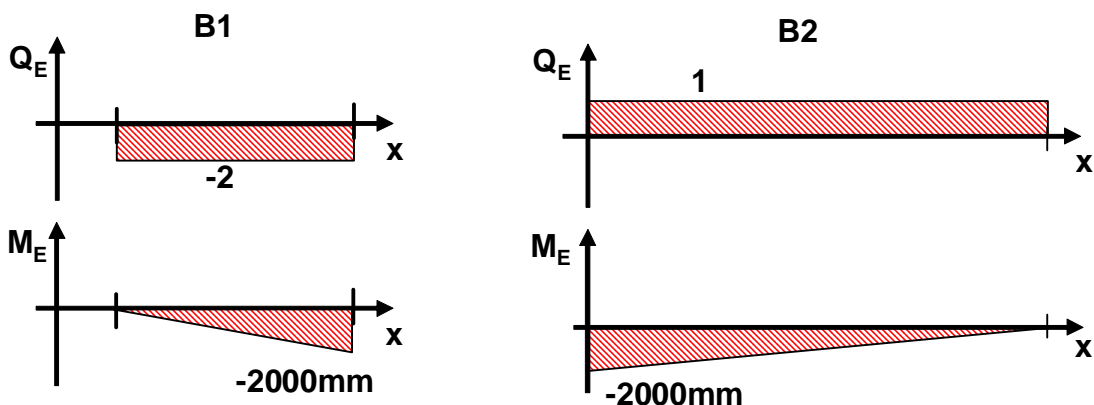
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + 1 = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Ax} = -1 \\ \sum M|_A = 0: & \quad -2000 \cdot 1 - 1000 F_{\text{Dichtung}} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{\text{Dichtung}} = -2 \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{\text{Dichtung}} + F_{Ay} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Ay} = -F_{\text{Dichtung}} = 2 \end{aligned}$$



Dies ergibt die dargestellten Schnittbilder:



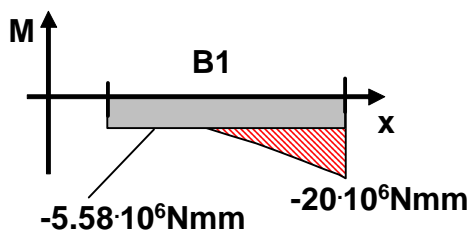
Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft:



Da  $M_E$  im ersten Intervall von Balken B1 gleich null ist, muss das erste Intervall nicht berücksichtigt werden. Der Mittelwert  $M_1$  des zu berücksichtigenden zweiten Intervalls im Balken B1 erhält man durch die Integration des Ausgangsmomentes über die Intervalllänge. Den Wert des Integrals muss man anschließend durch die Intervalllänge teilen.

$$M_1 = \frac{1}{1000} \int_{200}^{1000} M(x) dx = \frac{1}{1000} \int_{200}^{1000} -4600x - 10x^2 - 80000 dx$$

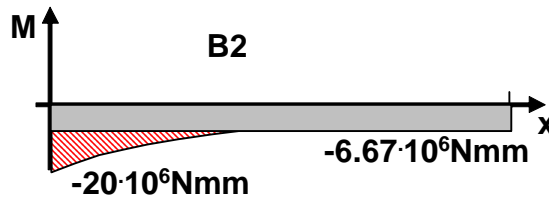
$$= \frac{1}{1000} \left[ -2300x^2 - \frac{10}{3}x^3 - 80000x \right]_{200}^{1000} = -5.58 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



Analog berechnet man das mittlere Moment  $M_2$  im zweiten Balken B2.

$$M_2 = \frac{1}{2000} \int_0^{2000} M(x) dx = \frac{1}{2000} \int_0^{2000} 20000x - 5x^2 - 20 \cdot 10^6 dx$$

$$= \frac{1}{2000} \left[ 10000x^2 - \frac{5}{3}x^3 - 20 \cdot 10^6 x \right]_0^{2000} = -6.67 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



Berechnung der Verschiebung  $u$ :

$$u = \frac{1}{200000 \cdot 666667} \left( \frac{(-2000)(-5.58 \cdot 10^6) \cdot 1000}{2} + \frac{(-2000)(-6.67 \cdot 10^6) \cdot 2000}{2} \right)$$

$$= \frac{1000 \cdot 10^6 \cdot 1000}{0.2 \cdot 10^6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^6} \left( \frac{(-2)(-5.58) \cdot 1}{2} + \frac{(-2)(-6.67) \cdot 2}{2} \right) = 141.9 \text{ mm}$$

d.) Wenn der Schließmechanismus sich öffnet, verliert er den Kontakt zur Dichtung. Dies bedeutet, dass die Kraft  $F_{\text{Dichtung}} = 0$  sein muss. Mit dem Momentengleichgewicht um A kann  $F$  ermittelt werden.

$$\sum M|_A = 0 : 1200G - 2000F + 600F_{\text{Ersatz1}} - 1000F_{\text{Ersatz2}} = 0$$

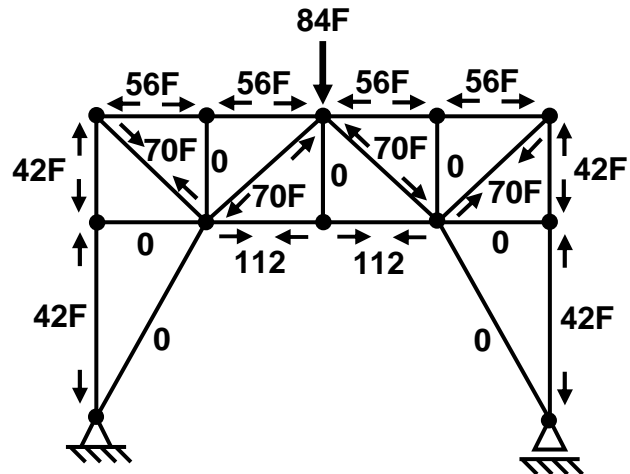
$$\Rightarrow F = \frac{1200G + 600F_{\text{Ersatz1}} - 1000F_{\text{Ersatz2}}}{2000}$$

$$F = \frac{1200 \cdot 5000 + 600 \cdot 24000 - 1000 \cdot 20000}{2000} = 200 \text{ N}$$

**Lösungen Aufgabe 32:**

Geometrie 1:

Setzt man  $84F = 84\text{kN}$  bzw.  $F = 1000\text{N}$ , so erhält man die dargestellten Stabkräfte. Die Stabkräfte infolge Einheitskraft, die am Kraftangriffspunkt senkrecht nach unten zeigt, erhält man indem man die Stabkräfte infolge der äußeren Belastung durch  $84F$  teilt.

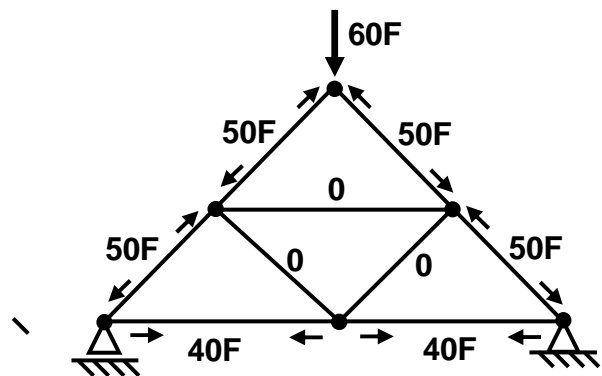


Da beim Fachwerk nur Zug- und Druckkräfte auftreten, resultiert auch nur eine Verschiebung  $u_N$  infolge dieser Normalkräfte.

$$\begin{aligned}
 u_N &= \sum_{i=1}^{20} \int_L \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} dx = \sum_{i=1}^{20} \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} \int_L dx = \sum_{i=1}^{20} \frac{L_i N_{Bi} N_{Ei}}{EA} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{20} L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 2 \cdot 3750 \frac{-42F}{84F} (-42F) + 2 \cdot 1500 \frac{-42F}{84F} (-42F) + 4 \cdot 2000 \frac{-56F}{84F} (-56F) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot 2500 \frac{70F}{84F} 70F + 2500 \frac{-70F}{84F} (-70F) + 2 \cdot 2000 \frac{112F}{84F} 112F \right) \\
 &= \frac{F}{EA} (157500 + 63000 + 298666.\bar{6} + 291666.\bar{6} + 291666.\bar{6} + 597333.\bar{3}) \\
 &\quad + \frac{1000}{200000 \cdot 800} 1699833.\bar{3} = 10.62\text{mm}
 \end{aligned}$$

Geometrie 2:

Setzt man  $60F = 60\text{kN}$  bzw.  $F = 1000\text{N}$ , so erhält man die dargestellten Stabkräfte.



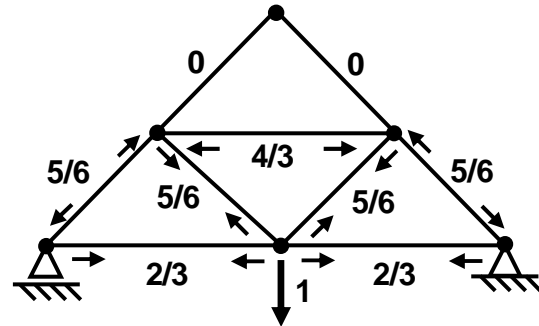
Absenkung  $u_N$  des Kraftangriffspunktes:

Die Stabkräfte infolge Einheitskraft, die am Kraftangriffspunkt senkrecht nach unten zeigt, erhält man indem man die Stabkräfte infolge der äußeren Belastung durch  $60F$  teilt.

$$\begin{aligned}
 u_N &= \sum_{i=1}^9 \int_L \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} dx = \sum_{i=1}^9 \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} \int_L dx = \sum_{i=1}^9 \frac{L_i N_{Bi} N_{Ei}}{EA} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 2 \cdot 4000 \frac{40F}{60F} 40F + 4 \cdot 2500 \frac{-50F}{60F} (-50F) \right) \\
 &= \frac{F}{EA} (213333.3 + 416666.6) = \frac{1000}{200000 \cdot 800} 630000 = 3.94 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Verschiebung  $u_1$ :

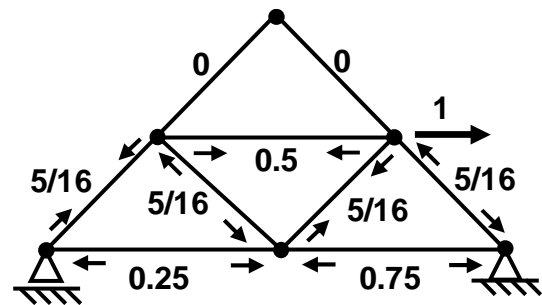
Infolge der Einheitskraft in Richtung der Verschiebung  $u_1$  ergeben sich die dargestellten Stabkräfte.



$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{i=1}^9 \int_L \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} dx = \sum_{i=1}^9 \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} \int_L dx = \sum_{i=1}^9 \frac{L_i N_{Bi} N_{Ei}}{EA} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 2 \cdot 4000 \frac{2}{3} 40F + 2 \cdot 2500 \frac{-5}{6} (-50F) \right) \\
 &= \frac{F}{EA} (213333.3 + 208333.3) = \frac{1000}{200000 \cdot 800} 421666.6 = 2.64 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Verschiebung  $u_2$ :

Infolge der Einheitskraft in Richtung der Verschiebung  $u_2$  ergeben sich die dargestellten Stabkräfte.

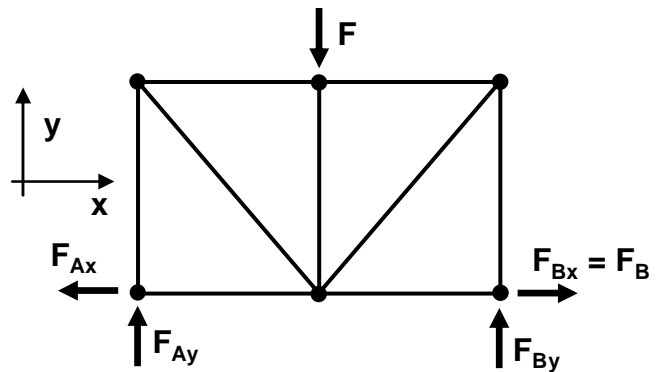


$$\begin{aligned}
 u_2 &= \sum_{i=1}^9 \int_L \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} dx = \sum_{i=1}^9 \frac{N_{Bi} N_{Ei}}{EA} \int_L dx = \sum_{i=1}^9 \frac{L_i N_{Bi} N_{Ei}}{EA} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 4000(-0.25)40F + 4000(-0.75)40F + 2500 \frac{5}{16} (-50F) + 2500 \frac{-5}{16} (-50F) \right) \\
 &= \frac{F}{EA} (-40000 - 120000 - 39062.5 + 39062.5) = \frac{1000}{200000 \cdot 800} (-160000) = -1.0 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

**Lösungen Aufgabe 33:**

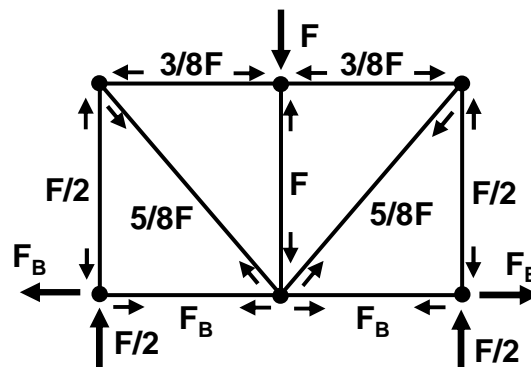
Geometrie 1:

Das Fachwerk ist statisch überbestimmt. Es sind 4 Lagerkräfte und 9 Stabkräfte zu bestimmen. Allerdings stehen nur 6 Knoten und somit 12 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Daher muss zusätzlich die Einheitskraftmethode verwendet werden, um die fehlende Gleichung zu generieren. Dazu wird die Lagerkraft  $F_{Bx}$  durch die Kraft  $F_B$  ersetzt, die als bekannt vorausgesetzt wird. Alle Größen werden in Anhängigkeit von  $F$  und  $F_B$  bestimmt.



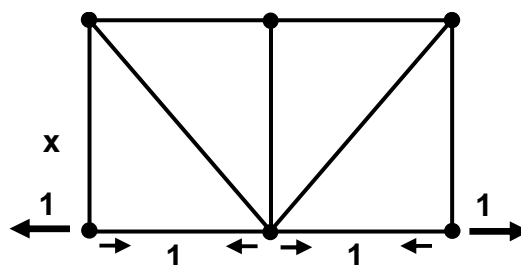
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad & -F_{Ax} + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = F_B \\ \sum M|_A = 0: \quad & -3LF + 6LF_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = \frac{F}{2} \\ \sum F_y = 0: \quad & F_{Ay} + F_{By} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = \frac{F}{2} \end{aligned}$$

Stabkräfte:



Für die Bestimmung der Kraft  $F_B$  wird mit Hilfe der Energiemethode die Bestimmungsformel zur Berechnung der Verschiebung  $u_B$  in Richtung der Kraft  $F_B$  ermittelt. Da infolge der Lagerwirkung bekannt ist, dass  $u_B = 0$  gilt, resultiert eine Bestimmungsformel für  $F_B$ .

Stabkräfte infolge Einheitskraft in Richtung der Verschiebung  $u_B$ :



Bestimmungsformel für  $u_B$ :

$$0 = u_B = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} = \frac{1}{EA} (2 \cdot 3LF_B \cdot 1) = \frac{6LF_B}{EA} \quad \Rightarrow \quad F_B = 0$$

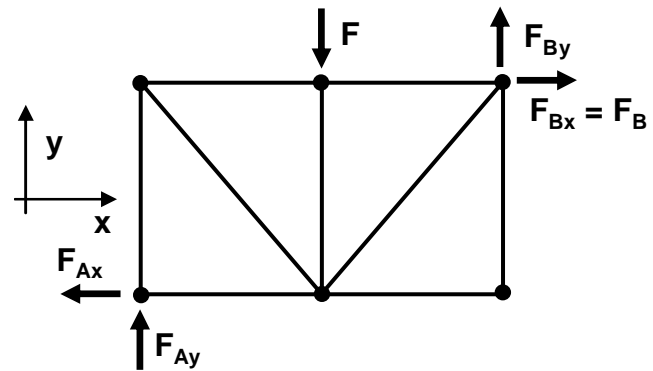
Daraus folgt, dass die beiden waagrechten Lagerkräfte gleich null sind.

Für die Berechnung der senkrechten Verschiebung muss am Angriffspunkt der Kraft eine senkrechte Kraft vom Betrag eins angebracht werden. Die resultierenden Stabkräfte erhält man aus den Stabkräften infolge  $F$ , wenn man  $F$  gleich eins setzt. Die resultierende Verschiebung  $u_N$  des Kraftangriffspunktes lautet mit  $F_B = 0$ :

$$\begin{aligned}
 u_N &= \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 2 \cdot 4L \left( \frac{-F}{2} \right) \left( \frac{-1}{2} \right) + 2 \cdot 3L \left( \frac{-3F}{8} \right) \left( \frac{-3}{8} \right) + 2 \cdot 5L \frac{5F}{8} \frac{5}{8} + 4L(-F)(-1) \right) \\
 &= \frac{FL}{EA} \left( 2 + \frac{54}{64} + \frac{250}{64} + 4 \right) = 10.75 \frac{FL}{EA}
 \end{aligned}$$

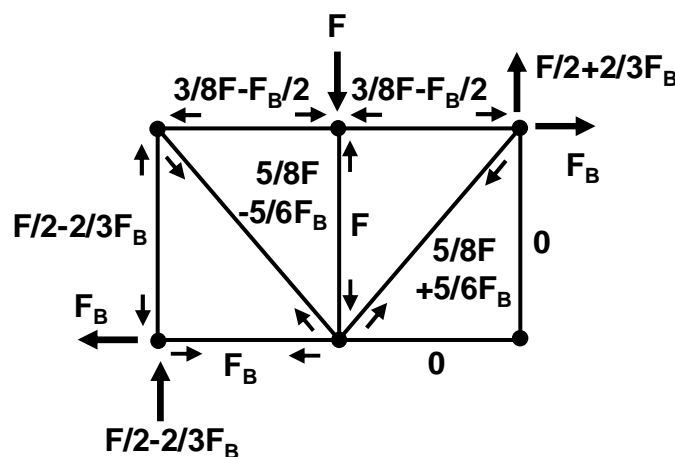
Geometrie 2:

Das Fachwerk ist statisch überbestimmt. Es sind 4 Lagerkräfte und 9 Stabkräfte zu bestimmen. Allerdings stehen nur 6 Knoten und somit 12 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Daher muss zusätzlich die Energiemethode verwendet werden, um die fehlende Gleichung zu generieren. Dazu wird die Lagerkraft  $F_{Bx}$  durch die Kraft  $F_B$  ersetzt, die als bekannt vorausgesetzt wird. Alle Größen werden in Anhängigkeit von  $F$  und  $F_B$  bestimmt.



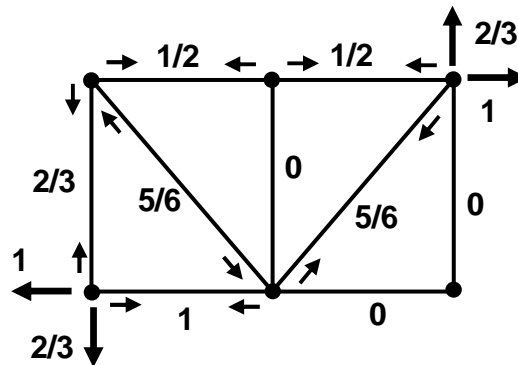
$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F_B = 0 & \Rightarrow F_{Ax} = F_B \\
 \sum M|_A = 0: \quad -3LF + 6LF_{By} - 4LF_B = 0 & \Rightarrow F_{By} = \frac{1}{2}F + \frac{2}{3}F_B \\
 \sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F + F_{By} = 0 & \Rightarrow F_{Ay} = \frac{1}{2}F - \frac{2}{3}F_B
 \end{aligned}$$

Stabkräfte:



Für die Bestimmung der Kraft  $F_B$  wird mit Hilfe der Energiemethode die Bestimmungsformel zur Berechnung der Verschiebung  $u_B$  in Richtung der Kraft  $F_B$  ermittelt. Da infolge der Lagerwirkung bekannt ist, dass  $u_B = 0$  gilt, resultiert eine Bestimmungsformel für  $F_B$ .

Stabkräfte infolge Einheitskraft in Richtung der Verschiebung  $u_B$ :



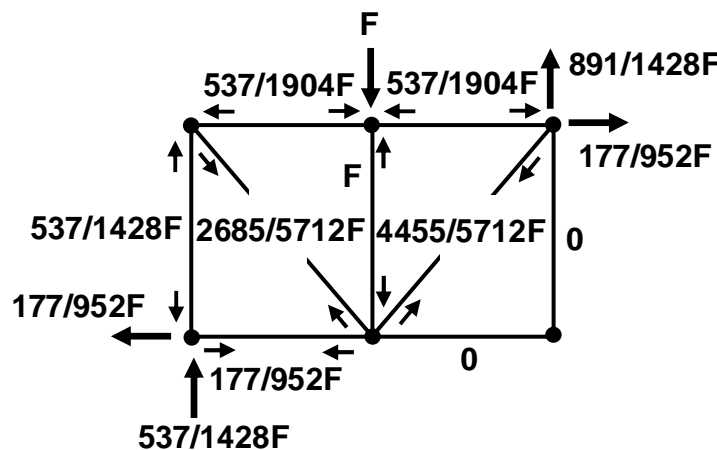
Bestimmungsformel für  $u_B$ :

$$\begin{aligned}
 0 = u_B &= \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 3LF_B \cdot 1 + 4L \left( - \left( \frac{F}{2} - \frac{2}{3} F_B \right) \right) \frac{2}{3} + 5L \left( \frac{5}{8} F - \frac{5}{6} F_B \right) \frac{-5}{6} + 5L \left( \frac{5}{8} F + \frac{5}{6} F_B \right) \frac{5}{6} + 2 \cdot 3L \left( - \left( \frac{3}{8} F - \frac{F_B}{2} \right) \right) \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{L}{EA} \left( 3F_B - \frac{4}{3} F + \frac{16}{9} F_B - \frac{125}{48} F + \frac{125}{36} F_B + \frac{125}{48} F + \frac{125}{36} F_B - \frac{9}{8} F + \frac{3}{2} F_B \right) \\
 &= \frac{L}{EA} \left( \frac{108 + 64 + 125 + 125 + 54}{36} F_B - \frac{64 - 125 + 125 + 54}{48} F \right) = \frac{L}{EA} \left( \frac{476}{36} F_B - \frac{118}{48} F \right) \\
 \Rightarrow \quad \frac{476}{36} F_B &= \frac{118}{48} F \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{118 \cdot 36}{48 \cdot 476} F = \frac{177}{952} F
 \end{aligned}$$

Mit der bekannten Lagerkraft  $F_{Bx} = F_B$  können die restlichen Lagerkräfte ermittelt werden.

$$F_{Ax} = F_B = \frac{177}{952} F, \quad F_{By} = \frac{1}{2} F + \frac{2}{3} F_B = \frac{891}{1428} F \quad \text{und} \quad F_{Ay} = \frac{1}{2} F - \frac{2}{3} F = \frac{537}{2856} F$$

Es resultieren die skizzierten Stabkräfte:



Die Stabkräfte infolge der Einheitskraft in Richtung der äußeren Kraft erhält man, indem man  $F = 1$  setzt. Es resultiert die senkrechte Verschiebung  $u_N$  des Kraftangriffspunktes.

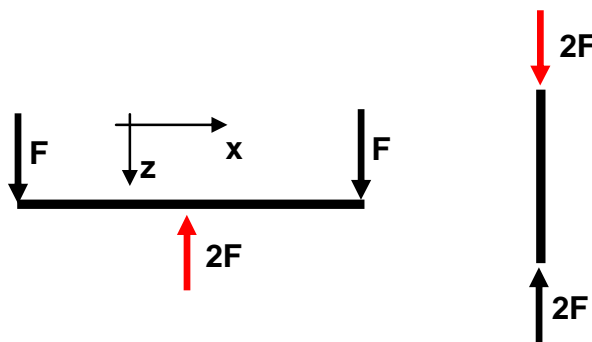
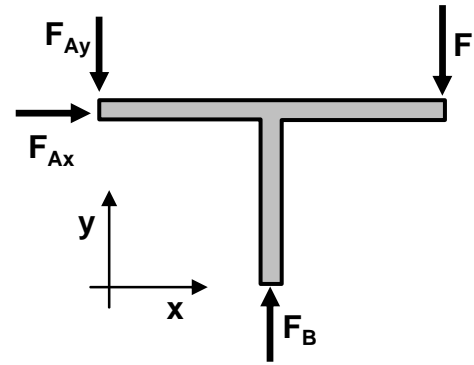
$$\begin{aligned}
 u_N &= \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i N_{Bi} N_{Ei} \\
 &= \frac{1}{EA} \left( 3L \frac{177F}{952} \frac{177}{952} + 4L \frac{-537F}{1428} \frac{-537}{1428} + 5L \frac{2685F}{5712} \frac{2685}{5712} + 4LF \cdot 1 + 5L \frac{4455F}{5712} \frac{4455}{5712} + 2 \cdot 3L \frac{537F}{1904} \frac{537}{1904} \right) \\
 &= \frac{LF}{EA} (0.1037 + 0.5657 + 1.1048 + 4 + 3.0415 + 0.4773) = 9.293 \frac{LF}{EA}
 \end{aligned}$$

**Lösungen Aufgabe 34:**

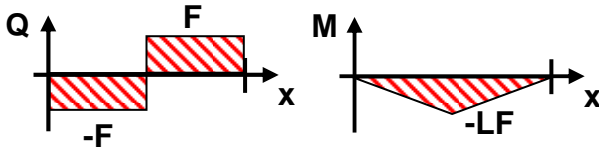
Geometrie 1:

Die Lagerkräfte erhält man mit den Kräfte- und Momentengleichgewichten.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0 \\
 \sum M|_A = 0: & \quad -2LF + LF_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 2F \\
 \sum F_y = 0: & \quad -F_{Ay} + F_B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = F
 \end{aligned}$$



Zerlegt man das Bauteil in zwei gerade Balken erhält man die skizzierten Schnittkräfte und die dargestellten inneren Querkräfte und Momente. Da im senkrechten Balken nur Normalkräfte existieren, diese aber nicht berücksichtigt werden sollen, wird kein Schaubild aufgezeichnet.



Für die Berechnung der inneren Kräfte und Momente infolge Einheitskraft, die am Kraftangriffspunkt in senkrechter Richtung wirken muss, ist es ausreichend, in den Schaubildern F durch 1 zu

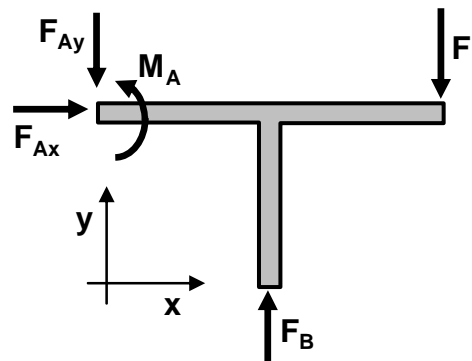
ersetzen. Man erhält die folgende Absenkung u infolge des Biegemoments:

$$u = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{(-LF)(-L)2L}{3} \right) = \frac{2 FL^3}{3 EI_y}$$

Geometrie 2:

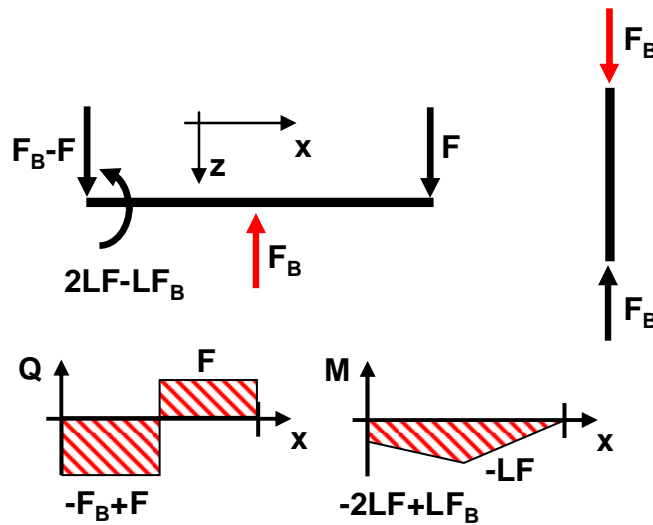
Die Lagerkräfte erhält man mit den Kräfte- und Momentengleichgewichten. Da das Bauteil überbestimmt gelagert ist, berechnet man die Lagergrößen  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$  und  $M_A$  in Abhängigkeit von F und  $F_B$ .

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0 \\
 \sum M|_A = 0: & \quad -2LF + LF_B + M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 2LF - LF_B \\
 \sum F_y = 0: & \quad -F_{Ay} + F_{By} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = F_B - F
 \end{aligned}$$

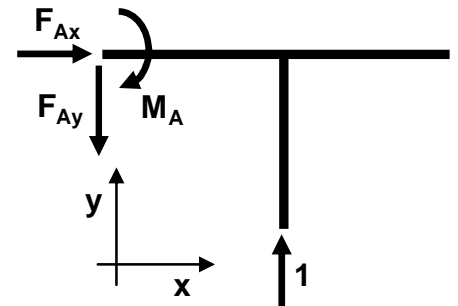




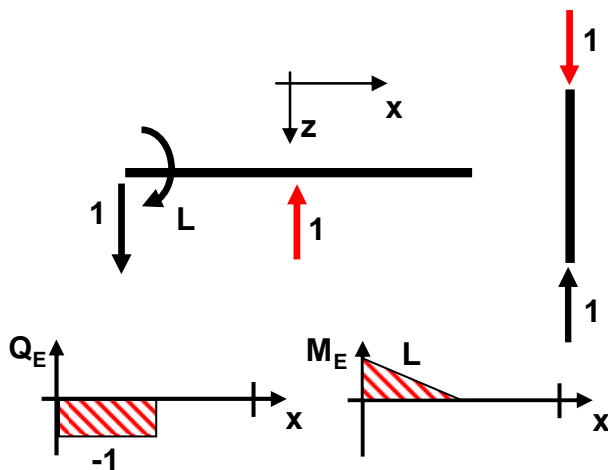
Zerlegt man das Bauteil, ergeben sich die skizzierten Schnittkräfte und im wagrechten Balken die dargestellten inneren Querkräfte und Biegemomente.



Für die Bestimmung der Kraft  $F_B$  wird mit Hilfe der Energiemethode die Bestimmungsformel zur Berechnung der Verschiebung  $u_B$  in Richtung der Kraft  $F_B$  ermittelt. Da infolge der Lagerwirkung bekannt ist, dass  $u_B = 0$  gilt, resultiert eine Bestimmungsformel für  $F_B$ . Die Kraft  $F_B$  wird gleich eins gesetzt und die Lagergrößen am Lager A bestimmt.



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0 \\ \sum M|_A = 0: & \quad L \cdot 1 - M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = L \\ \sum F_y = 0: & \quad -F_{Ay} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 1 \end{aligned}$$

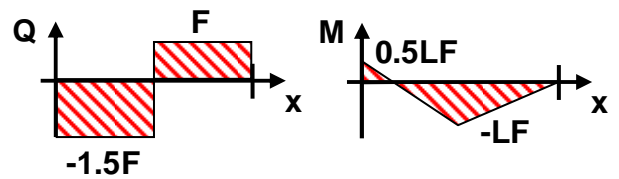


Infolge Einheitskraft erhält man die dargestellten Schnittkräfte und die Querkräfte und Biegemomente im wagrechten Balken.

Bestimmungsformel für  $u_B$ :

$$\begin{aligned} 0 = u_B &= \int_{2L} \frac{1}{EI_y} M_B M_E dx = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{L \cdot L (2(-2LF + F_B) - LF)}{6} \right) = \frac{L^3}{EI_y} \frac{2F_B - 5F}{6} \\ \Rightarrow \quad 2F_B - 5F &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{5}{2} F \end{aligned}$$

Mit der Kraft  $F_B = 2.5F$  ergeben sich die dargestellten Verläufe von Querkraft und Biegemoment im waagrechten Balken. Die Verläufe infolge Einheitskraft am Kraftangriffspunkt von  $F$  erhält man, wenn man in den Schaubildern  $F$  durch 1 ersetzt.



Die Absenkung  $u$  des Kraftangriffspunktes lautet:

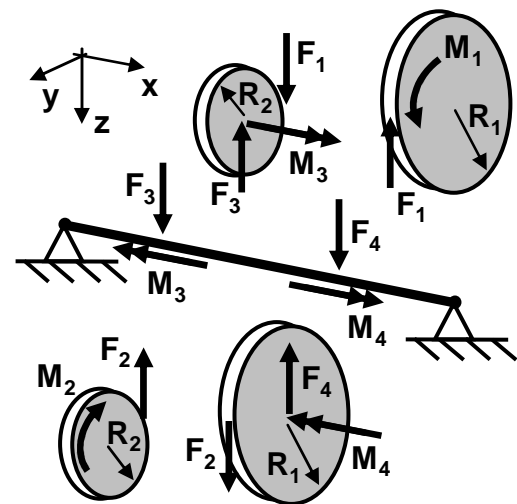
$$u = \int_{2L} \frac{1}{EI_y} M_B M_E dx = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{L \left( \frac{LF}{2} (2 \cdot 0.5 - LF) - LF (0.5LF + 2(-LF)) \right)}{6} + \frac{(-LF)(-L)L}{3} \right)$$

$$= \frac{FL^3}{EI_y} \left( \frac{1.5}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{FL^3}{EI_y} \frac{3+4}{12} = \frac{7 FL^3}{12 EI_y}$$

**Lösungen Aufgabe 35:**

a.) Die Räder und die mittlere Welle müssen frei geschnitten werden. Zuerst wird das große Zahnrad der hinteren Welle betrachtet.

$$\sum M_x|_1 = 0: \quad M_1 - R_1 F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{M_1}{R_1}$$



Bilanzen am kleinen Zahnrad der mittleren Welle:

$$\sum F_z = 0: \quad F_1 - F_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_3 = F_1 = \frac{M_1}{R_1} = \frac{50000}{50} = 10000N$$

$$\sum M_x|_3 = 0: \quad M_3 - R_2 F_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_3 = R_2 F_1 = \frac{R_2}{R_1} M_1 = \frac{25}{50} 50000 = 25000Nmm$$

Bilanz der Momente an der mittleren Welle:

$$\sum M_x|_3 = 0: \quad -M_3 + M_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_4 = M_3 = \frac{R_2}{R_1} M_1 = 25000Nmm$$

Bilanzen am großen Zahnrad der mittleren Welle:

$$\sum M_x|_4 = 0: \quad -M_4 + R_1 F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{M_4}{R_1} = \frac{R_2}{R_1^2} M_1$$

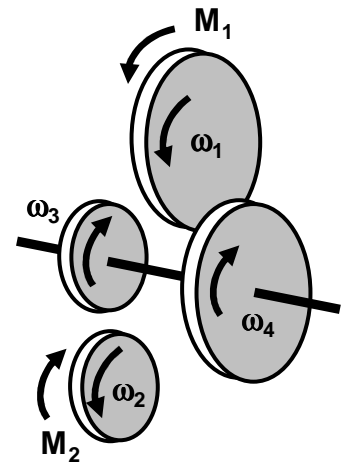
$$\sum F_z = 0: \quad F_2 - F_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_4 = F_2 = \frac{R_2}{R_1^2} M_1 = \frac{25}{50^2} 1000 = 500N$$

Zuletzt wird das kleine Zahnrad der vorderen Welle betrachtet.

$$\sum M_x|_2 = 0: \quad -M_2 + R_2 F_2 = 0$$

$$\Rightarrow M_2 = R_2 F_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} M_1 = \frac{R_2^2}{(2R_2)^2} M_1 = \frac{1}{4} M_1 = \frac{50000}{4} = 12500 \text{ Nmm}$$

b.) Die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  und  $\omega_4$  geben die Winkel- bzw. Drehgeschwindigkeit der einzelnen Zahnräder an, wobei  $\omega_3 = \omega_4$  gilt. Sind  $n_i$  mit  $i = 1, \dots, 4$  die entsprechenden Umdrehungszahlen der einzelnen Zahnräder. Als Kontaktbedingung zwischen den einzelnen Zahnrädern gilt, dass sie in Umfangsrichtung die gleichlangen Strecken zurücklegen müssen. Aus dem Kontakt zwischen dem Zahnrad 1 an der hinteren Welle und dem kleinen Zahnrad 3 an der mittleren Welle folgt somit:



$$n_1 2\pi R_1 = n_3 2\pi R_2 \quad \Rightarrow \quad n_3 = \frac{R_1}{R_2} n_1 = 2n_1 \quad \Rightarrow \quad n_4 = 2n_1$$

Analog gilt an der Kontaktfläche des großen Zahnrads 4 der mittleren Welle und dem Zahnrad 2 der vorderen Welle

$$n_2 2\pi R_2 = n_4 2\pi R_1 \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{R_1}{R_2} n_4 = 2 \cdot 2n_1 = 4n_1$$

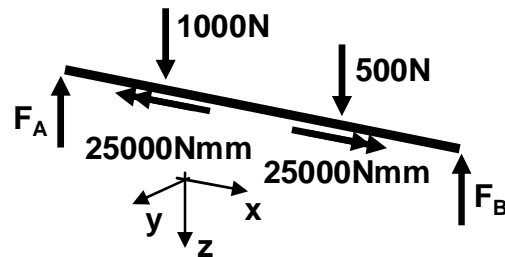
c.) Für die Spannungsberechnung muss nur noch die mittlere Welle betrachtet werden. Aus den Berechnungen von a.) folgt  $M_3 = M_4 = 25000 \text{ Nmm}$ ,  $F_3 = 1000 \text{ N}$  und  $F_4 = 500 \text{ N}$ .

$$\sum M_y|_A = 0: -1000L - 500 \cdot 3L + 4LF_B = 0$$

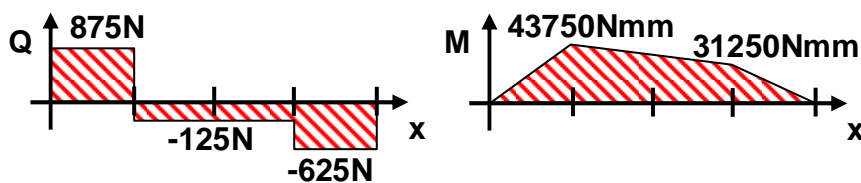
$$\Rightarrow F_B = 625 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0: -F_A + 1000 + 500 - F_B = 0$$

$$\Rightarrow F_A = 875 \text{ N}$$



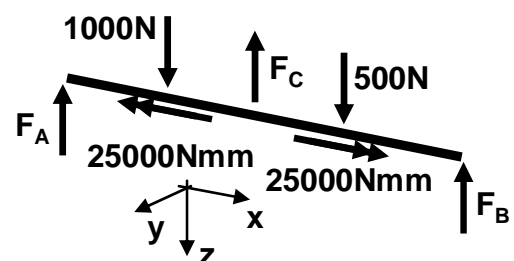
Innere Querkraft und Biegemoment:



Mit dem maximalen Moment  $M_{\max} = 43750 \text{ Nmm}$  ermittelt man die maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} z_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi D^4}{64}} \frac{D}{2} = \frac{32 M_{\max}}{\pi D^3} = \frac{32 \cdot 43750}{\pi 20^3} = 55.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

d.) Wird in der Mitte zwischen den beiden Zahnrädern ein zusätzliches Lager angebracht, muss dies durch eine weitere Lagerkraft  $F_C$  berücksichtigt werden. Diese Kraft  $F_C$  wird als bekannt vorausgesetzt und alles in Abhängigkeit von ihr berechnet.



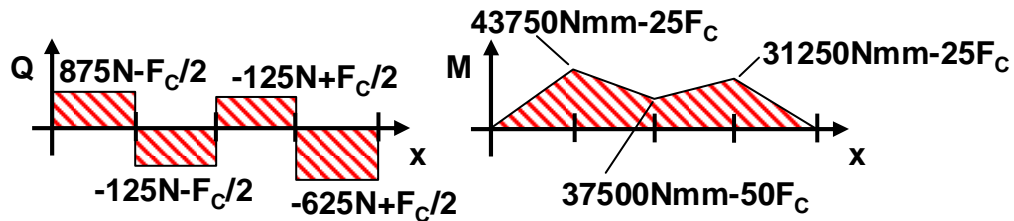
$$\sum M_y|_A = 0: -1000L + 2LF_C - 500 \cdot 3L + 4LF_B = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 625N - \frac{F_C}{2}$$

$$\sum F_z = 0: -F_A + 1000 - F_C + 500 - F_B = 0$$

$$\Rightarrow F_A = 875N - \frac{F_C}{2}$$

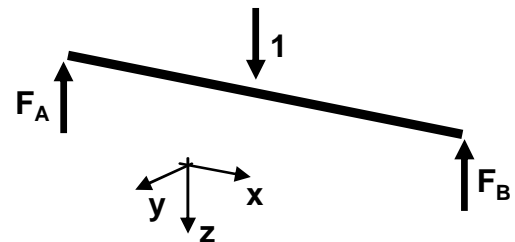
Innere Querkraft und Biegemoment:



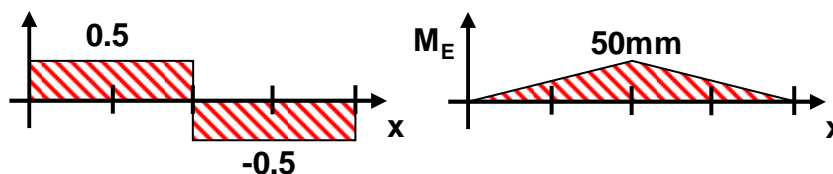
Für die Berechnung der Kraft  $F_C$  mit der Energiemethode werden die Kräfte  $F_3$  und  $F_4$  von der Welle entfernt und die Kraft  $F_C$  durch die Einheitskraft ersetzt. Die innere Querkraft und das innere Biegemoment in Abhängigkeit von der Einheitskraft werden berechnet.

$$\sum M_y|_A = 0: -2L \cdot 1 + 4LF_B = 0 \Rightarrow F_B = 0.5$$

$$\sum F_z = 0: -F_A + 1 - F_B = 0 \Rightarrow F_A = 0.5$$



Innere Querkraft und Biegemoment infolge der Einheitskraft:



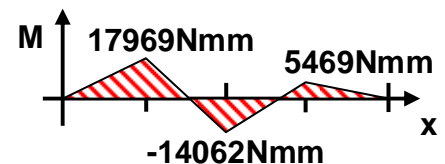
Unter der Voraussetzung  $u_C = 0$  kann über die Bestimmungsformel von  $u_C$  die Kraft  $F_C$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 0 = u_C &= \int_{4L} \frac{1}{EI_y} M_B M_E dx \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{50 \cdot (43750 - 25F_C) 25}{3} + \frac{50((43750 - 25F_C)(2 \cdot 25 + 50) + (37500 - 50F_C)(25 + 2 \cdot 50))}{6} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{50((37500 - 50F_C)(2 \cdot 50 + 25) + (31250 - 25F_C)(50 + 2 \cdot 25))}{6} + \frac{50 \cdot (31250 - 25F_C) 25}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{6EI_y} (109375000 - 62500F_C + 453125000 - 437500F_C + 390625000 - 437500F_C + 78125000 - 62500F_C) \\
 &= \frac{1}{6EI_y} (1031250000 - 1000000F_C)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1031250000 - 1000000F_C = 0 \quad \Rightarrow F_C = \frac{1031250000}{1000000} = 1031.25 \text{ N}$$

Setzt man die gefundene Kraft  $F_C$  ein, so erhält man den skizzierten Verlauf des inneren Biegemoments. Das maximale Moment beträgt  $M_{\max,C} = 17969 \text{ Nmm}$ . Da die Spannungen proportional zum Biegemoment sind, kann die Spannungsreduktion über die Verhältnisse der Momente mit und ohne Lagerkraft  $F_C$  berechnet werden.

$$\sigma_{\max,C} = \frac{M_{\max,C}}{M_{\max}} \sigma_{\max} = \frac{17969}{43750} 55.7 = 22.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



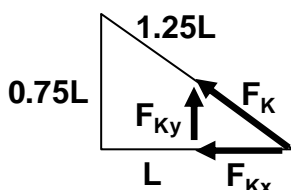
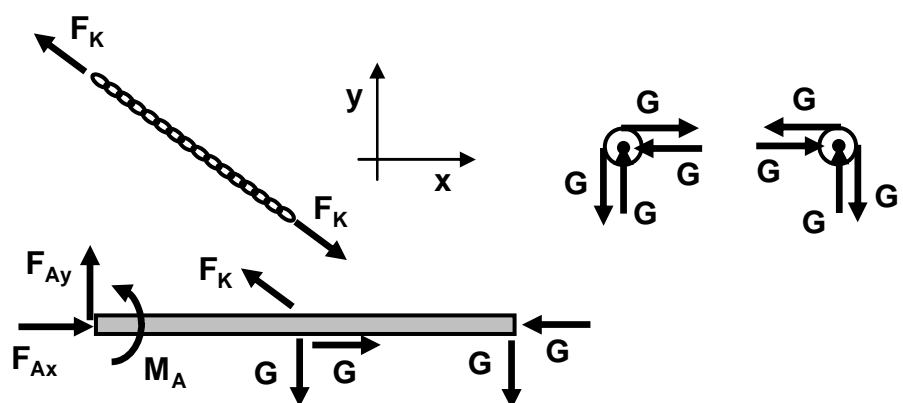
Dies ergibt eine prozentuelle Spannungsreduktion  $\Delta\sigma$ :

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\max,C} = \frac{55.7 - 22.9}{55.7} 100\% = \frac{32.8}{55.7} 100\% = 58.9\%$$

Bei den Verschiebungen macht sich das Hinzufügen des zusätzlichen Lagers noch stärker bemerkbar!

### Lösungen Aufgabe 36:

a.) Der Balken, die Kette und die beiden Rollen müssen frei geschnitten werden. Die Bilanzen an den beiden Rollen ergeben, dass an beiden Rollen nur Kräfte vom Betrag  $G$  wirksam sind.



Die diagonale Kettenkraft  $F_K$  muss in ihre Komponenten zerlegt werden.

$$F_{Kx} = \frac{L}{1.25L} F_K = 0.8F_K \quad \text{und} \quad F_{Ky} = \frac{0.75L}{1.25L} F_K = 0.6F_K$$

Das Bauteil ist überbestimmt gelagert. Das bedeutet, die Kraft  $F_K$  wird bei der Lagerberechnung und bei der Ermittlung der inneren Kräfte und Momente als bekannt

vorausgesetzt und anschließend mit der Energiemethode und der Bedingung, dass die Verschiebung  $u_K$  am Kettenanbindungspunkt gleich null sein muss, berechnet.

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Kx} + G - G = F_{Ax} - 0.8F_K = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = 0.8F_K$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{Ky} - 2G = F_{Ay} + 0.6F_K - 2G = 0$$

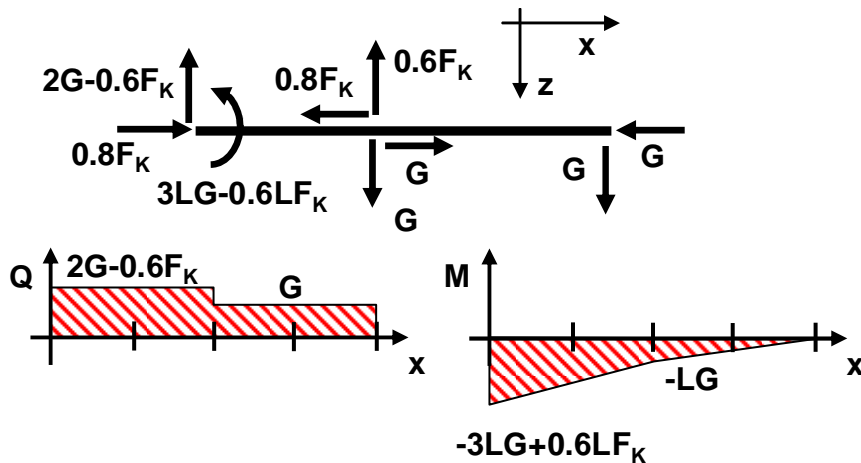
$$\Rightarrow F_{Ay} = 2G - 0.6F_K$$

$$\sum M|_A = 0: \quad M_A + LF_{Ky} - LG - 2LG = M_A + 0.6LF_K - 3LG = 0$$

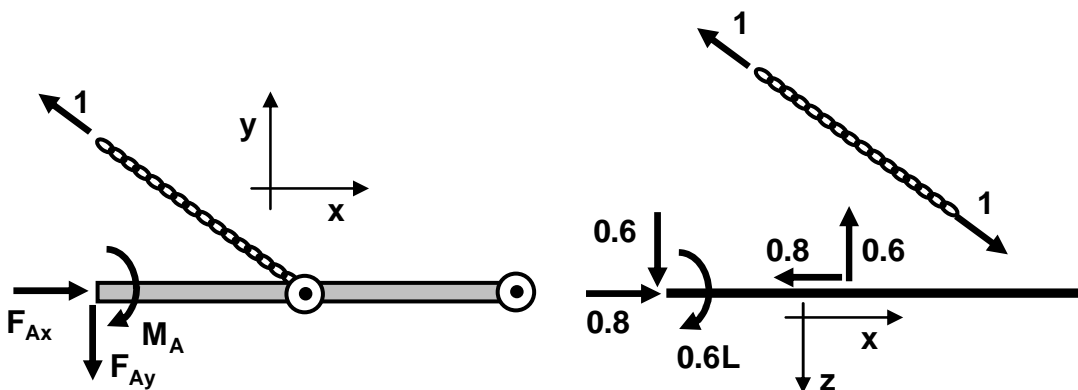
$$\Rightarrow M_A = 3LG - 0.6LF_K$$

In der Kette wirkt die positive Normalkraft  $N = F_K$ .

Die innere Querkraft und das Biegemoment sind dargestellt, die Normalkraft im Balken muss nicht berücksichtigt werden:



Für die Berechnung der Kraft  $F_K$  muss am Kettenanbindungspunkt eine Einheitskraft in Kettenrichtung angebracht werden.



$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - 0.8 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = 0.8$$

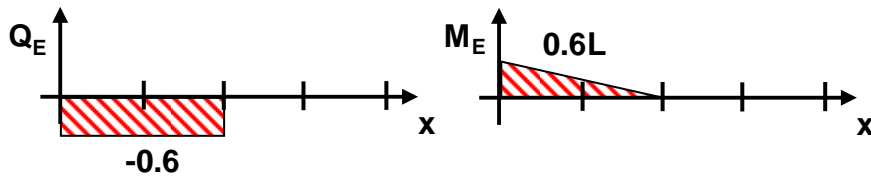
$$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + 0.6 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = 0.6$$

$$\sum M|_A = 0: \quad -M_A + L \cdot 0.6 \cdot 1 = -M_A + 0.75L \cdot 0.8 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 0.6L$$

In der Kette wirkt die positive Kettenkraft eins, die innere Querkraft und das Biegemoment infolge Einheitskraft im Balken lauten:

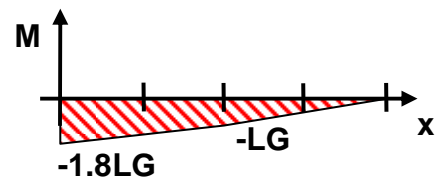


Für die Berechnung mittels Energiemethode und dem Ansatz  $u_K = 0$  muss die Biegesteifigkeit des Balkens und die Zugsteifigkeit der Kette berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned}
 0 = u_K &= \int_{2L} \frac{1}{EI_y} M_B M_E dx + \int_{1.25L} \frac{1}{EA} N_B N_E dx \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{0.6L \cdot L(2(-3LG + 0.6LF_K) - LG)}{6} \right) + \frac{1}{EA} (F_K \cdot 1 \cdot 1.25L) \\
 &= \frac{1}{EI_y} (-0.7L^3G + 0.12L^3F_K) + \frac{1}{EA} 1.25LF_K = \frac{1}{EI_y} (-0.7L^3G + 0.12L^3F_K) + \frac{1}{E} \frac{125I_y}{23L^2} 1.25LF_K \\
 &= \frac{1}{EI_y} (-0.7L^3G + 0.12L^3F_K) + \frac{1}{EI_y} 0.23L^3F_K = \frac{L^3}{EI_y} (-0.7G + 0.35F_K) \\
 \Rightarrow -0.7G + 0.35F_K &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_K = \frac{0.7}{0.35}G = 2G
 \end{aligned}$$

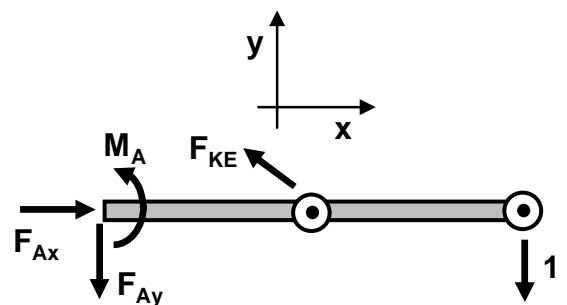
Entsprechend nehmen die Lagergrößen und das innere Biegemoment die notierten Werte an.

$$\begin{aligned}
 F_{Ax} &= 0.8F_K = 1.6G \quad \text{und} \quad F_{Ay} = 2G - 0.6F_K = 0.8G \\
 M_A &= 3LG - 0.6LF_K = 1.8LG
 \end{aligned}$$

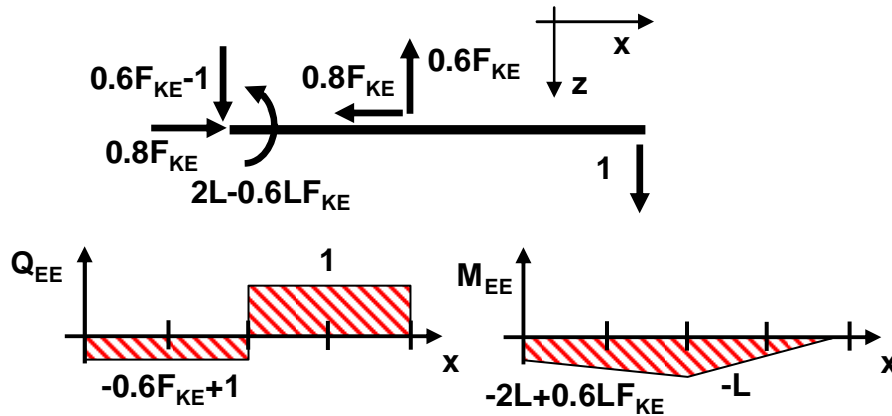


b.) Für die Berechnung der Absenkung des rechten Endes des Balkens muss dort eine Einheitskraft angebracht werden und das resultierende Biegemoment im Balken und die resultierende Normalkraft in der Kette bestimmt werden. Das Bauteil ist wieder überbestimmt gelagert, daher muss vorab  $F_{KE}$  ermittelt werden

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{KEx} &= F_{Ax} - 0.8F_{KE} = 0 \\
 \Rightarrow F_{Ax} &= 0.8F_{KE} \\
 \sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + F_{KEy} - 1 &= -F_{Ay} + 0.6F_{KE} - 1 = 0 \\
 \Rightarrow F_{Ay} &= 0.6F_{KE} - 1 \\
 \sum M|_A = 0: \quad M_A + LF_{KEy} - 2L \cdot 1 &= M_A + 0.6LF_{KE} - 2L = 0 \\
 \Rightarrow M_A &= 2L - 0.6LF_{KE}
 \end{aligned}$$



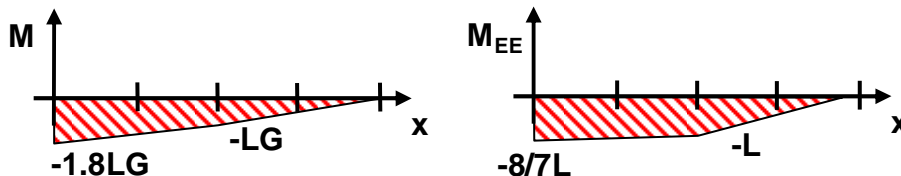
Die innere Querkraft und das innere Biegemoment infolge der Einheitskraft am rechten Ende des Balkens und der noch unbekanntes Kettenkraft  $F_{KE}$  sind im Folgenden dargestellt. In der Kette wirkt die Normalkraft  $F_{KE}$ .



Für die Berechnung der Kettenkraft  $F_{KE}$  infolge der Einheitskraft muss das Schaubild  $M_{EE}$  und das Schaubild  $M_E$  aus Teilaufgabe a.) verwendet werden. Ebenso die entsprechenden Normalkräfte in der Kette. Es wird die Energiemethode zusammen mit der Bedingung, dass am Kettenanbindungspunkt die Verschiebung  $u_{KE}$  gleich null sein muss, angewendet.

$$\begin{aligned}
 0 = u_{KE} &= \int_{2L} \frac{1}{EI_y} M_{EE} M_E dx + \int_{1.25L} \frac{1}{EA} N_{EE} N_E dx \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{0.6L \cdot L(2(-2L + 0.6LF_{KE}) - L)}{6} \right) + \frac{1}{EA} (F_{KE} \cdot 1 \cdot 1.25L) \\
 &= \frac{1}{EI_y} (-0.5L^3 + 0.12L^3 F_{KE}) + \frac{1}{EA} 1.25LF_{KE} = \frac{1}{EI_y} (-0.5L^3 + 0.12L^3 F_{KE}) + \frac{1}{E} \frac{125I_y}{23L^2} 1.25LF_{KE} \\
 &= \frac{1}{EI_y} (-0.5L^3 + 0.12L^3 F_{KE}) + \frac{1}{EI_y} 0.23L^3 F_{KE} = \frac{L^3}{EI_y} (-0.5 + 0.35F_{KE}) \\
 \Rightarrow -0.5 + 0.35F_{KE} &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KE} = \frac{0.5}{0.35} = \frac{10}{7}
 \end{aligned}$$

Die Kettenkraft infolge der Einheitskraft am rechten Ende beträgt  $F_{KE} = 10/7$ . Für die senkrechte Absenkung  $u$  des rechten Endes des Balkens müssen die Normalkraft  $N = 2G$  infolge der Belastung durch das Gewicht  $G$  und die Normalkraft  $N_{EE} = 10/7$  infolge der Einheitskraft am rechten Ende des Balkens und die dargestellten Schaubilder für die Biegemomente im Balken ausgewertet werden. Das Schaubild  $M$  resultiert aus der Belastung mit dem Gewicht  $G$ , das Schaubild  $M_{EE}$  erhält man durch die Einheitskraft am rechten Ende des Balkens.





$$\begin{aligned}
 u &= \int_{2L}^{1.25L} \frac{1}{EI_y} M_B M_{EE} dx + \int_{1.25L}^{2L} \frac{1}{EA} N_B N_{EE} dx \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left( \frac{L \left( -1.8LG \left( 2 \frac{-8}{7} L - L \right) - LG \left( \frac{-8}{7} L - 2L \right) \right)}{6} + \frac{(-LG)(-L)L}{3} \right) + \frac{1}{EA} \left( 2G \frac{10}{7} 1.25L \right) \\
 &= \frac{GL^3}{EI_y} \left( \frac{63.4}{42} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{EA} 1.25LG \frac{20}{7} = \frac{GL^3}{EI_y} \frac{77.4}{42} + \frac{1}{E \frac{125I_y}{23L^2}} 1.25LG \frac{20}{7} \\
 &= \frac{GL^3}{EI_y} \frac{77.4}{42} + \frac{1}{EI_y} 0.23L^3 G \frac{20}{7} = \frac{GL^3}{EI_y} \left( \frac{77.4}{42} + \frac{23}{35} \right) = \frac{GL^3}{EI_y} \left( \frac{77.4 \cdot 5}{42 \cdot 5} + \frac{23 \cdot 6}{35 \cdot 6} \right) = \frac{GL^3}{EI_y} \frac{525}{210} = 2.5 \frac{GL^3}{EI_y}
 \end{aligned}$$

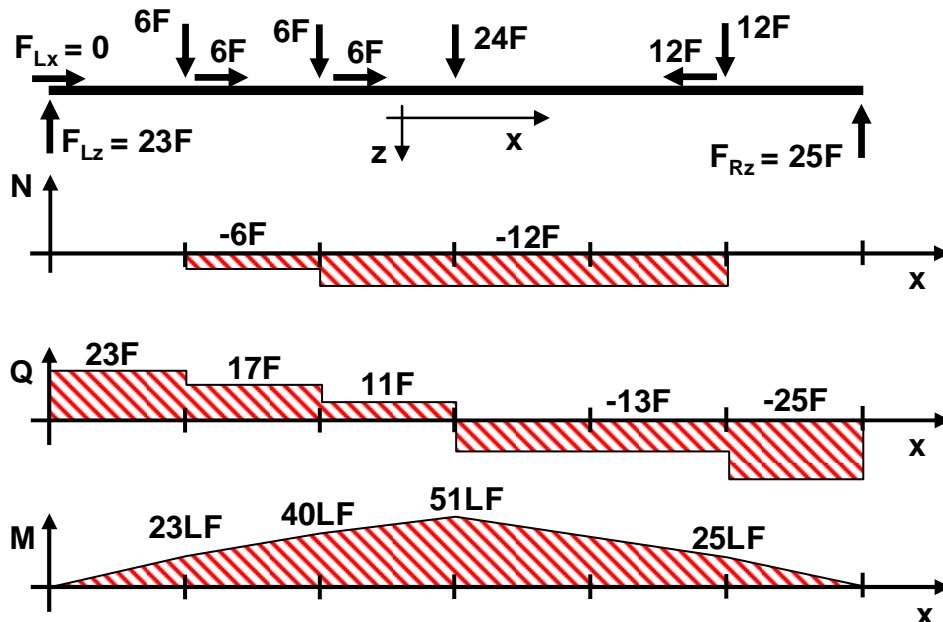
Könnte das Lager A kein Moment aufbringen, wäre die Absenkung  $u = 4.5GL^3/EI_y$ .

**Lösungen Aufgabe 37 (Kurzfassung):**

a.) Das notwendige Motormoment  $M_{Motor}$  beträgt:

$$M_{Motor} = 160 Nm$$

b.) Mit  $F = 0.25M_1/R = 200N$  ergeben sich die folgenden inneren Kräfte und Momente im grauen Balken:



c.) Der Flächeninhalt  $A$  und das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  betragen:

$$A = \frac{7}{2} Hs \quad \text{und} \quad I_y = \frac{77}{147} H^3 s$$

In der Balkenmitte findet man die größte Normalkraft und auch das größte Biegemoment. Daher sind dort die maximalen Normalspannungen.

Normalspannungen infolge Normalkraft bei  $x = 3L$ :

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N}{A} = \frac{-12F}{\frac{7}{2}H_s} = -\frac{24}{7} \frac{F}{H_s} = -\frac{24}{7} \frac{200}{100 \cdot 5} = -0.7 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Normalspannungen infolge Biegemoment bei  $x = 3L$ :

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{51LF}{\frac{77}{149}H^3_s} z = \frac{7599}{77} \frac{LF}{H^3_s} z$$

Maximale Zugspannungen infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\text{Zug}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = \frac{4}{7}H \right) = \frac{7599}{77} \frac{LF}{H^3_s} \frac{4}{7}H = \frac{30396}{539} \frac{LF}{H^2_s} = \frac{30396}{539} \frac{1000 \cdot 200}{100^2 \cdot 5} = 225.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

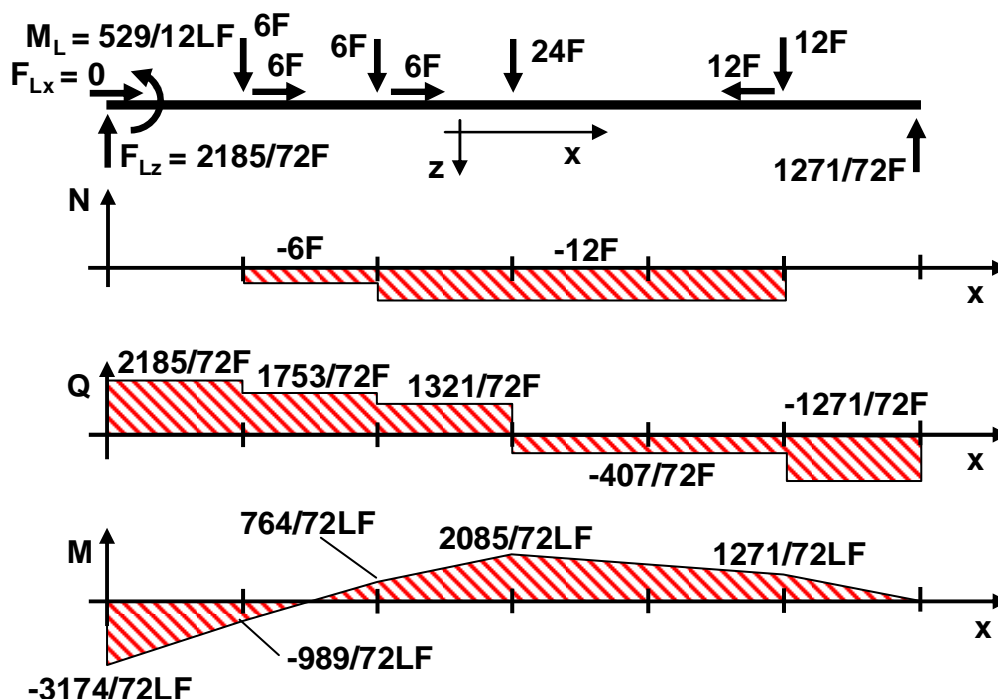
Maximale Druckspannungen infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\text{Zug}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = -\frac{3}{7}H \right) = \frac{7599}{77} \frac{LF}{H^3_s} \left( -\frac{3}{7}H \right) = -\frac{22797}{539} \frac{LF}{H^2_s} = -\frac{22797}{539} \frac{1000 \cdot 200}{100^2 \cdot 5} = -169.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Maximale Normalspannung:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{Zug}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = 225.6 - 0.7 = 224.9 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

d.) Innere Kräfte und Momente bei statisch überbestimmter Lagerung:



Das maximale Moment findet man am linken Lager. Normalspannungen infolge Biegemoment bei  $x = 0$ :

$$\sigma_{\text{Biegemoment}}(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{-\frac{3174}{72} LF}{\frac{77}{149} H^3 s} z = -\frac{472926}{5544} \frac{LF}{H^3 s} z = -\frac{236463}{2772} \frac{LF}{H^3 s} z$$

Maximale Zugspannungen infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\text{Zug}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = -\frac{3}{7} H \right) = -\frac{236463}{2772} \frac{LF}{H^3 s} \left( -\frac{3}{7} H \right) = \frac{709389}{19404} \frac{1000 \cdot 200}{100^2 \cdot 5} = 146.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Maximale Druckspannungen infolge des Biegemoments:

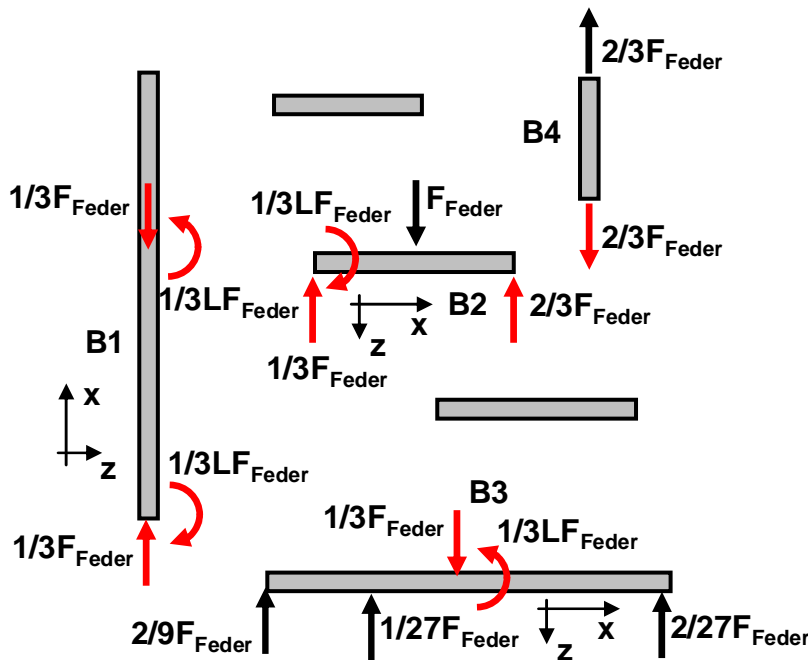
$$\sigma_{\text{Druck}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} \left( z = \frac{4}{7} H \right) = -\frac{236463}{2772} \frac{LF}{H^3 s} \frac{4}{7} H = -\frac{945852}{19404} \frac{1000 \cdot 200}{100^2 \cdot 5} = -195.0 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

**Lösungen Aufgabe 38 (Kurzfassung):**

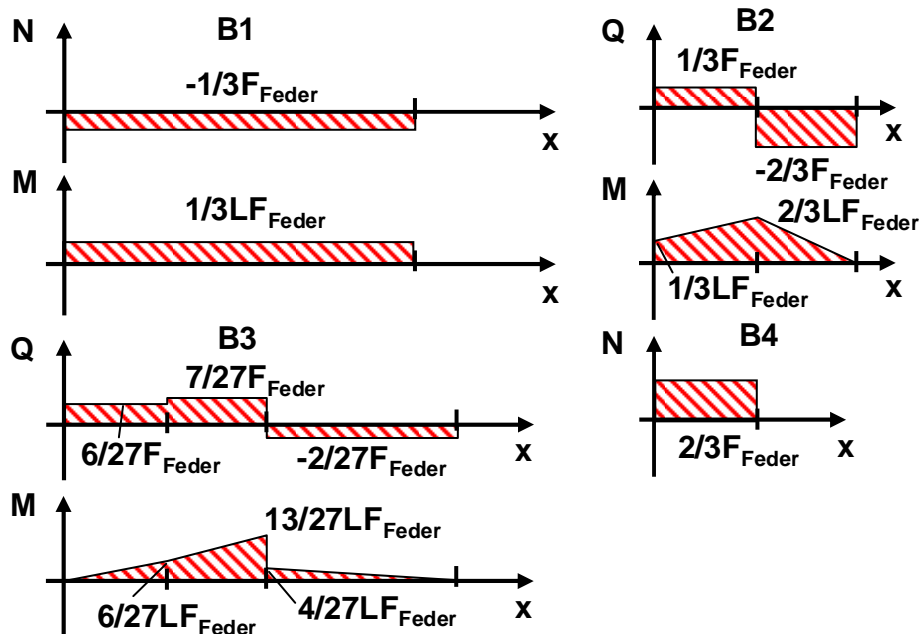
a.) Die Federkraft  $F_{\text{Feder}}$  und die Fußkraft  $F_{\text{Fuß}}$  betragen:

$$F_{\text{Feder}} = Cx = 90 \cdot 10 = 900N \quad \text{und} \quad F_{\text{Fuß}} = \frac{F_{\text{Feder}}}{9} = \frac{900}{9} = 100N$$

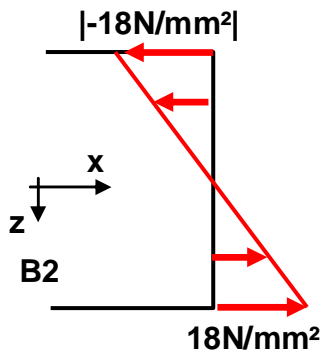
Schnittbild des grauen Rahmens:



Innere Kräfte und Momente in den Teilbalken des grauen Rahmens:



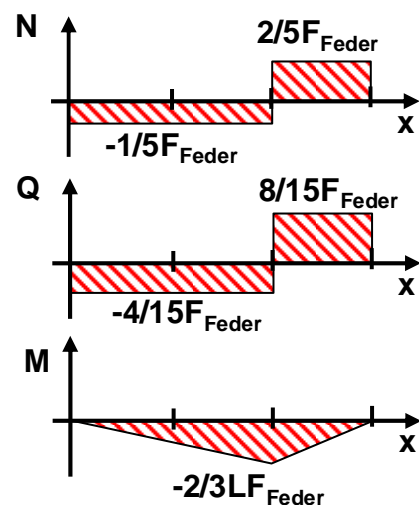
b.) Im Balken B1 existieren Normalspannungen infolge Normalkraft und Biegemoment. Da aber ihre Einzelbeträge immer halb so groß sind wie die Maximalbeträge im Balken B4 und B2, erreicht die Summe auch kein absolutes Maximum. Im Balken ist das maximale Biegemoment kleiner wie im Balken B2. Daher trifft man in der Mitte des Balkens B2 die maximalen Normalspannungen an.



c.) Der Punkt A geht um  $u_A = 0.4\text{mm}$  nach oben.

d.) Innere Kräfte und Momente im oberen, schrägen Hebel:

Es ist zu berücksichtigen, dass der linke Teil die Länge  $2.5L$  und der rechte Teil die Länge  $1.25L$  besitzt.

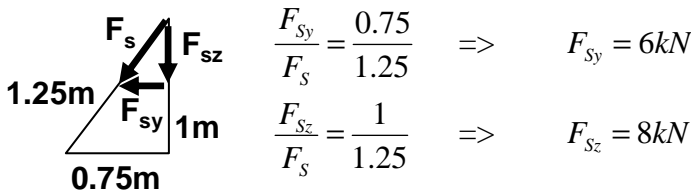
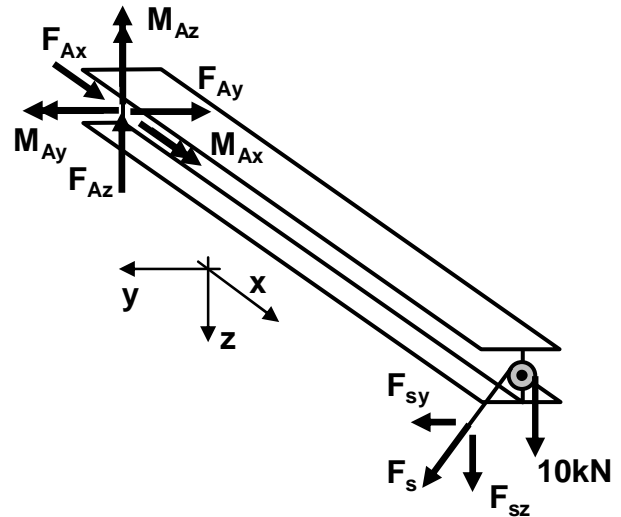


**Lösungen Aufgabe 39:**

a.) Die feste Einspannung wird durch die Lagerkräfte und Lagermomente  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$ ,  $M_{Ax}$ ,  $M_{Ay}$  und  $M_{Az}$  ersetzt. Die Seilkraft  $F_S$  muss bestimmt werden und in Komponenten zerlegt werden. Das Momentengleichgewicht um die x-Achse an der Rolle mit dem Radius R ergibt:

$$\sum M_x|_A = 0: -R10 + RF_S = 0$$

$$\Rightarrow F_S = 10kN$$



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Lagerkräfte und Lagermomente.

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{Ay} + F_{Sy} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = F_{Sy} = 6kN$$

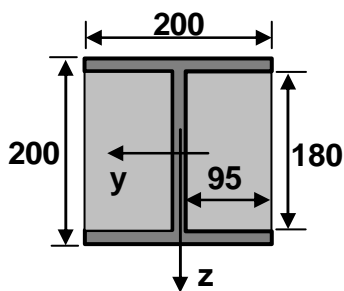
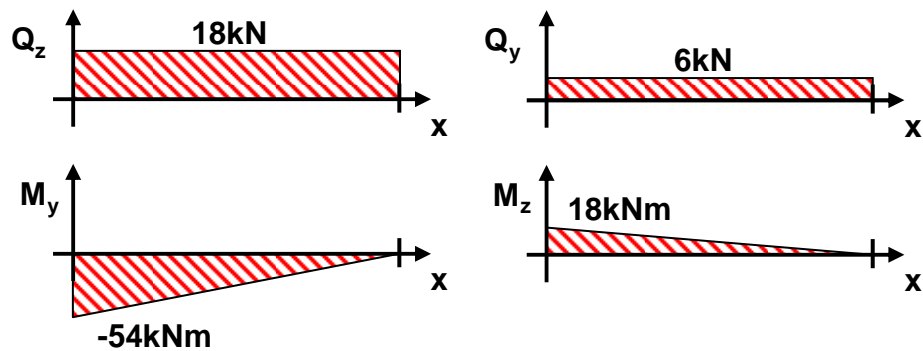
$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + F_{Sz} + 10 = 0 \Rightarrow F_{Az} = F_{Sz} + 10 = 18kN$$

$$\sum M_x|_A = 0: M_{Ax} = 0$$

$$\sum M_y|_A = 0: M_{Ay} - 3F_{Sz} - 3 \cdot 10 = 0 \Rightarrow M_{Ay} = 3F_{Sz} + 3 \cdot 10 = 54kNm$$

$$\sum M_z|_A = 0: -M_{Az} + 3F_{Sy} = 0 \Rightarrow M_{Az} = 3F_{Sy} = 18kNm$$

Innere Kräfte und Momente:



Für die Berechnung der Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  wird die Querschnittsfläche durch ein Quadrat weniger zwei identische Rechtecke ersetzt. Das Deviationsmoment  $I_{yz}$  ist gleich null.

$$I_y = \frac{200 \cdot 200^3}{12} - 2 \frac{95 \cdot 180^3}{12} = 40.99 \cdot 10^6 mm^4$$

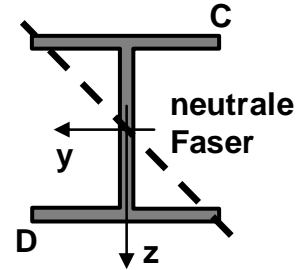
$$I_z = \frac{200 \cdot 200^3}{12} - 2 \frac{180 \cdot 95^3}{12} - 2 \cdot 52.5^2 \cdot 180 \cdot 95 = 13.35 \cdot 10^6 mm^4$$

Die aus den mittigen, maximalen Momenten und den Flächenträgheitsmomenten resultierenden Normalspannungen infolge der Biegemomente lauten:

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{18 \cdot 10^6}{13.35 \cdot 10^6} y - \frac{54 \cdot 10^6}{40.99 \cdot 10^6} z = -1.348y - 1.317z$$

Für die Bestimmung der Lage der neutralen Faser wird die Normalspannungsfunktion  $\sigma(y, z)$  gleich null gesetzt.

$$\sigma(y, z) = -1.348y - 1.317z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-1.348}{1.317} y = -1.024y$$

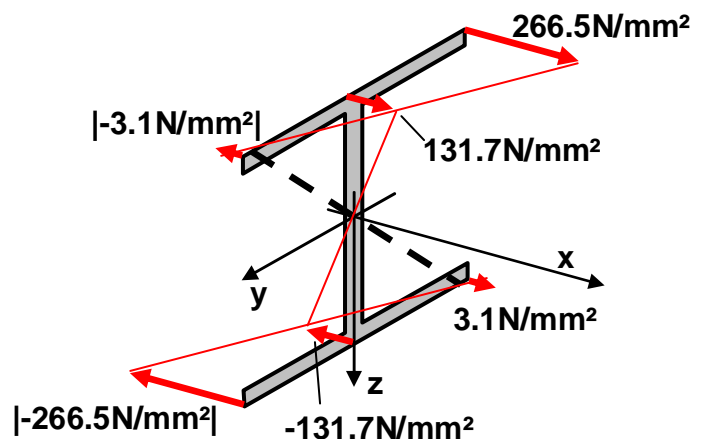


Man erkennt, dass die beiden Eckpunkte C und D den maximalen Abstand von der neutralen Faser besitzen. Dadurch existieren in diesen Punkten auch die maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments. Am Punkt C sind die maximalen Zugspannungen, bei D die maximalen Druckspannungen.

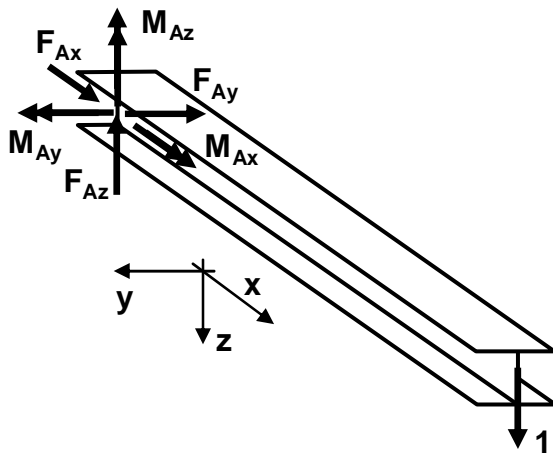
$$\sigma_C = \sigma(y = -100, z = -100) = -1.348 \cdot (-100) - 1.317 \cdot (-100) = 266.5 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = \sigma(y = 100, z = 100) = -1.348 \cdot 100 - 1.317 \cdot 100 = -266.5 \frac{N}{mm^2}$$

Der Normalspannungsverlauf am Lager ( $x = 0$ ) lässt sich wie skizziert darstellen, durch den Flächenmittelpunkt verläuft die gestrichelte neutrale Faser:

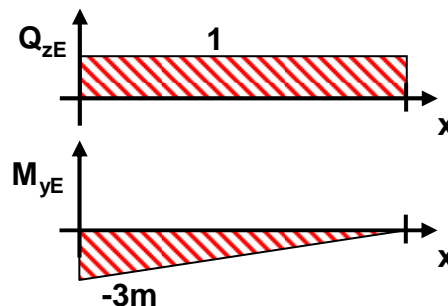


b.) Für die Berechnung der Verschiebung  $w$  des rechten Endes des Balkens in  $z$ -Richtung, wird die Rolle und die an ihr angreifenden Kräfte durch eine Einheitskraft in  $z$ -Richtung ersetzt.



Die sechs Gleichgewichte ergeben  $F_{Ax} = F_{Ay} = 0$ ,  $M_{Ax} = M_{Az} = 0$ ,  $F_{Az} = 1$  und  $M_{Ay} = 3m$ .

Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft:



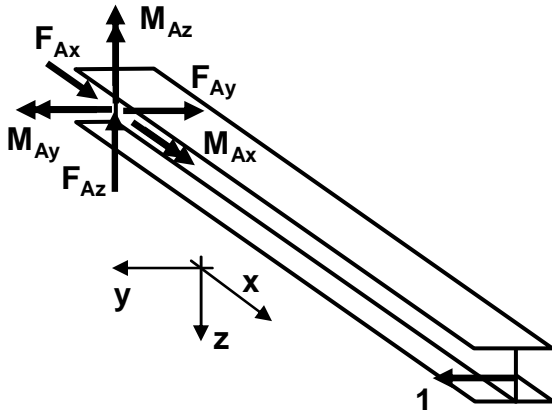
Die Verschiebung  $w$  wird mit der

Energiemethode bestimmt.

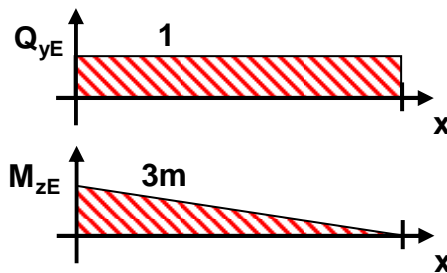
$$w = \int_L \frac{M_y M_{yE}}{EI_y} dx = \frac{1}{200000 \cdot 40.99 \cdot 10^6} \left( \frac{(-54 \cdot 10^6)(-3000) \cdot 3000}{3} \right) = 19.76 \text{ mm}$$

Für die Berechnung der Verschiebung  $v$  des rechten Endes des Balkens in  $y$ -Richtung, wird die Rolle und die an ihr angreifenden Kräfte durch eine Einheitskraft in  $y$ -Richtung ersetzt.

Die sechs Gleichgewichte ergeben  $F_{Ax} = F_{Az} = 0$ ,  $M_{Ax} = M_{Ay} = 0$ ,  $F_{Ay} = 1$  und  $M_{Az} = 3\text{m}$ .



Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft:



Die Verschiebung  $v$  wird mit der Energiemethode bestimmt.

$$v = \int_L \frac{M_z M_{zE}}{EI_z} dx = \frac{1}{200000 \cdot 13.35 \cdot 10^6} \left( \frac{18 \cdot 10^6 \cdot 3000 \cdot 3000}{3} \right) = 20.22 \text{ mm}$$

Mit den Verschiebungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung erhält man die Gesamtverschiebung  $f$ .

$$f = \sqrt{w^2 + v^2} = 28.27 \text{ mm}$$

### Lösungen Aufgabe 40:

Die Lager werden durch die Lagerkräfte ersetzt.

$$\sum M_y|_A = 0: 4F_{Bz} - 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow F_{Bz} = 1.5 \text{ kN}$$

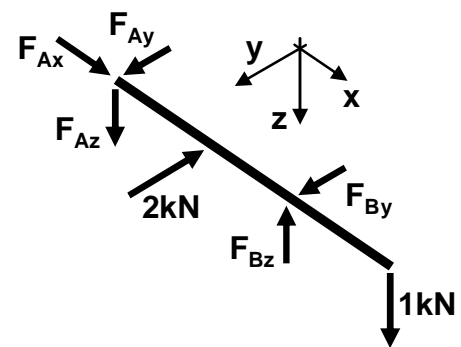
$$\sum F_z = 0: F_{Az} - F_{Bz} + 1 = 0 \Rightarrow F_{Az} = 0.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_z|_A = 0: -1 \cdot 2 + 4F_{By} = 0 \Rightarrow F_{By} = 1 \text{ kN}$$

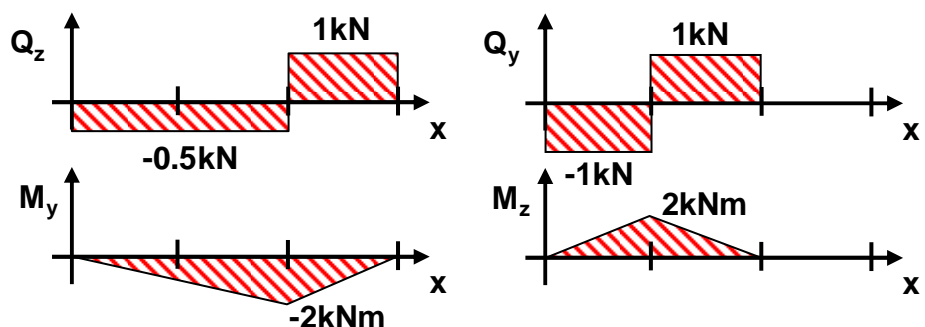
$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - 2 + F_{By} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_x|_A = 0: \text{keine Kräfte erzeugen ein Moment um die } x\text{-Achse}$$



Innere Kräfte und Momente:



Die Schaubilder zeigen, dass die inneren Biegemomente an unterschiedlichen x-Positionen ihre Maxima besitzen. Daher müssen beide Positionen  $x = 2\text{m}$  und  $x = 4\text{m}$  untersucht werden.

$x = 2\text{m}$ :

An der Position  $x = 2\text{m}$  beträgt  $M_y = -1\text{kNm}$  und  $M_z = 2\text{kNm}$ . Die beiden Flächenträgheitsmomente lassen sich in Abhängigkeit vom zu bestimmenden Radius  $R$  angeben.

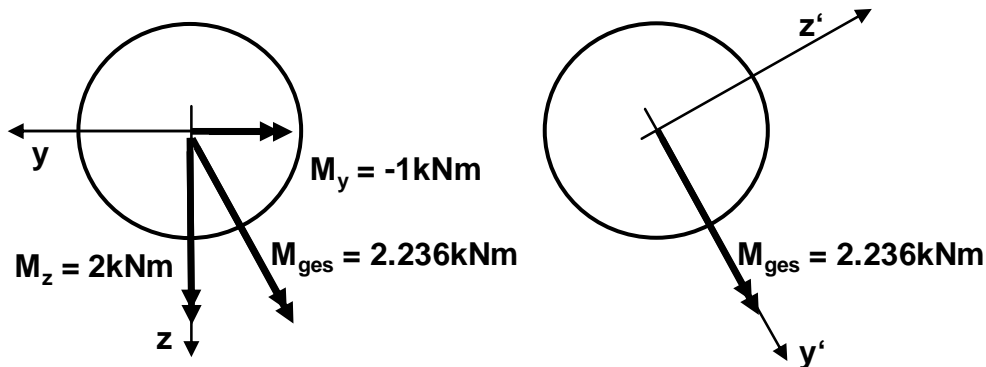
$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4} R^4$$

Verwendet man die Formel

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

zur Berechnung der maximalen Normalspannungen an der Kreisaußenseite, muss man berücksichtigen, dass  $y$  und  $z$  nicht unabhängig voneinander sind, sondern die Bedingung  $y^2 + z^2 = R^2$

erfüllen müssen. Da beim Kreisprofil das Flächenträgheitsmoment unabhängig vom Koordinatensystem ist, ist es beim Kreisprofil sinnvoll, aus den beiden Einzelmomenten ein Gesamtmoment zu berechnen. Anschließend wird ein neues  $y'z'$ -Koordinatensystem gewählt, bezüglich welchem das Gesamtmoment nur eine Komponente um die  $y'$ -Achse besitzt. Dadurch hat man die schiefe Biegung in eine symmetrische Biegung überführt.



Im  $y'z'$ -Koordinatensystem lautet die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Normalspannungen infolge Biegemoment:

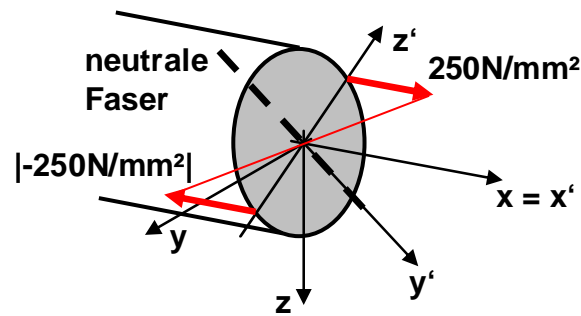
$$\sigma(z') = \frac{M_{y'}}{I_{y'}} z'$$

Dabei gilt  $I_{y'} = I_y$  und  $M_{y'} = M_{ges}$ . Sucht man die maximalen Spannungen, wählt man die Maximalwerte  $z'_{max} = \pm R$ . Da für die Bestimmung des Radius nur der Spannungsbetrag von Bedeutung ist, benötigt man nur  $z'_{max} = R$ .

$$\sigma_{max} = \sigma(z' = R) = \frac{M_{ges}}{I_{y'}} R = \frac{M_{ges}}{\frac{\pi}{4} R^4} R = \frac{M_{ges}}{\frac{\pi}{4} R^3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{M_{ges}}{\frac{\pi}{4} \sigma_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{2.236 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{4} \cdot 250}} = 22.50\text{mm}$$



Der Spannungsverlauf lässt sich wie dargestellt skizzieren.



x = 4m:

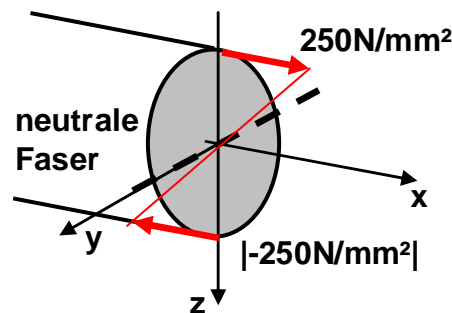
An der Position x = 4m beträgt  $M_y = -2\text{kNm}$  und  $M_z = 0$ . Da nur ein Moment ungleich null ist, reduziert sich die Aufgabe zu einer symmetrischen Biegung.

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{M_y}{I_y} z$$

Für die Dimensionierung des Radius wird nur der positive Betrag des Moment  $M_y$  verwendet.

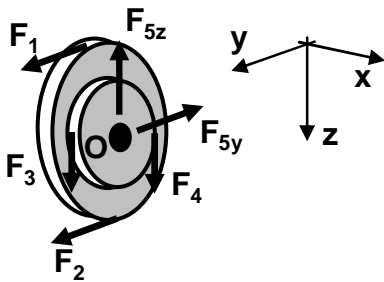
$$\sigma_{\max} = \sigma(z = R) = \frac{|M_y|}{I_y} R = \frac{|M_y|}{\frac{\pi}{4} R^4} R = \frac{|M_y|}{\frac{\pi}{4} R^3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{|M_y|}{\frac{\pi}{4} \sigma_{\max}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{4} 250}} = 21.68\text{mm}$$

Dies ergibt den dargestellten Spannungsverlauf. Dabei ist zu beachten, dass infolge des negativen Momentes  $M_y$  ein negativer z-Wert verwendet werden muss, um positive Normalspannungen zu erhalten. Dadurch sind an der Oberseite die maximalen Zugspannungen und an der Unterseite die maximalen Druckspannungen zu finden.



Der für die Welle entscheidende Radius ist bei x = 2m der größere Radius  $R = 22.50\text{mm}$ . Da sich an den einzelnen Querschnitten nur das Gesamtmoment ändert, sind die maximalen Spannungen am Ort des maximalen Gesamtmoments. Dadurch ist es ausreichend, den Ort des maximalen Gesamtmoments zu bestimmen und aus den dortigen Werten den Wellenradius zu bestimmen.

**Lösungen Aufgabe 41:**



a.) Die Rolle muss wie dargestellt frei geschnitten werden. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  kann durch die beiden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  an der große Rolle mit der Riemenreibung bestimmt werden.

$$F_1 = F_2 e^{\mu_0 \pi} \Rightarrow e^{\mu_0 \pi} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{3F}{F} = 3 \Rightarrow \mu_0 = \frac{\ln 3}{\pi}$$

b.)  $F_1$  und  $F_3$  erzeugen um die Parallele zur x-Achse durch den Rollenmittelpunkt O ein positives,  $F_2$  und  $F_4$  ein negatives Moment.

Dass das Momentengleichgewicht um die x-Achse erfüllt werden kann, muss  $F_4 > F_3$  sein. An der kleinen Rolle liefert somit die Riemenreibung:

$$F_4 = F_3 e^{\mu_0 \pi}$$

Der Ausdruck wird in das Momentengleichgewicht um eine Parallele zur x-Achse durch den Rollenmittelpunkt O eingesetzt.

$$\sum M_x|_O = 0: R_1 F_1 - R_1 F_2 + R_2 F_3 - R_2 F_4 = R_1 (F_1 - F_2) + R_2 F_3 (1 - e^{\mu_0 \pi}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{F_3}{F_1 - F_2} (e^{\mu_0 \pi} - 1) = \frac{2F}{3F - F} \left( e^{\frac{\ln 3}{\pi} \pi} - 1 \right) = 1(3 - 1) = 2$$

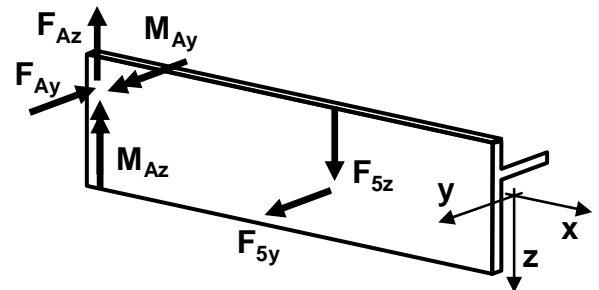
c.) Die Kräfte  $F_{5x}$  und  $F_{5y}$  folgen aus den Kräftegleichgewichten an der Rolle.

$$\sum F_y = 0: F_1 + F_2 - F_{5y} = 3F + F - F_{5y} = 0 \Rightarrow F_{5y} = 3F$$

$$\sum F_z = 0: F_3 + F_4 - F_{5z} = F_3 + F_3 e^{\mu_0 \pi} - F_{5z} = F_3 (1 + 3) - F_{5z} = 2F \cdot 4 - F_{5z} = 0$$

$$\Rightarrow F_{5z} = 3F$$

Die Kräfte  $F_{5x}$  und  $F_{5y}$  wirken entgegengesetzt auf den Balken. Der Abstand zwischen Rollenmittelpunkt O und dem Flächenmittelpunkt des Balkens kann vernachlässigt werden, da der Abstand Torsionsmomente im Balken verursacht, die nicht betrachtet werden sollen. Daher wird auch das Lagermoment  $M_{Ax}$  nicht berücksichtigt.



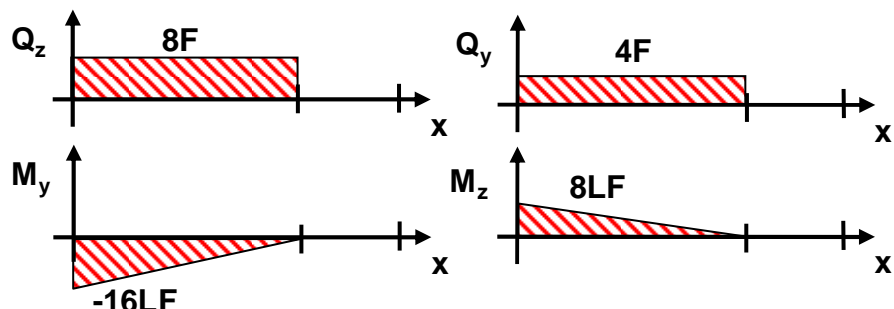
$$\sum F_y = 0: -F_{Ay} + F_{5y} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = F_{5y} = 4F$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + F_{5z} = 0 \Rightarrow F_{Az} = F_{5z} = 8F$$

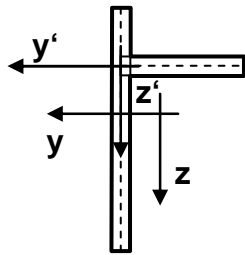
$$\sum M_y|_A = 0: M_{Ay} - 2LF_{5z} = 0 \Rightarrow M_{Ay} = 2LF_{5z} = 16LF$$

$$\sum M_z|_A = 0: -M_{Az} + 2LF_{5y} = 0 \Rightarrow M_{Az} = 2LF_{5y} = 8LF$$

Innere Kräfte und Biegemomente:



d.) Das Bauteil wird mit zwei Momenten belastet. Daher müssen beide Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  berechnet werden. Da das Profil weder symmetrisch zur  $y$ -Achse noch zur  $z$ -Achse ist, muss zusätzlich das Deviationsmoment  $I_{yz}$  berechnet werden.



Vorab wird zuerst die Lage des Flächenmittelpunktes bestimmt. Dazu wird im Kreuzungspunkt der beiden dünnwandigen Teilflächen ein Bezugskoordinatensystem  $y'z'$  gewählt.

$$y'_s = \frac{-H \cdot 2H}{2Hs + 4Hs} = -\frac{H}{3}$$

$$z'_s = \frac{H \cdot 4H}{2Hs + 4Hs} = \frac{2}{3}H$$

Mit dem bekannten Flächenmittelpunkt können die Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  und das Deviationsmoment  $I_{yz}$ . Die Koordinaten bei den Steinerschen Anteilen sind immer im  $y'z'$ -Koordinatensystem angegeben.

$$I_y = \frac{s(4H)^3}{12} + \left(H - \frac{2}{3}H\right)^2 4Hs + \frac{2Hs^3}{12} + \left(0 - \frac{2}{3}H\right)^2 2Hs = \frac{20}{3}sH^3 + \underbrace{\frac{Hs^3}{6}}_{=0} = \frac{20}{3}sH^3$$

$$I_z = \frac{4Hs^3}{12} + \left(0 - \left(-\frac{H}{3}\right)\right)^2 4Hs + \frac{s(2H)^3}{12} + \left(-H - \left(-\frac{H}{3}\right)\right)^2 2Hs = 2sH^3 + \underbrace{\frac{Hs^3}{3}}_{=0} = 2sH^3$$

$$I_{yz} = \left(H - \frac{2}{3}H\right)\left(0 - \left(-\frac{H}{3}\right)\right)4Hs + \left(0 - \frac{2}{3}H\right)\left(-H - \left(-\frac{H}{3}\right)\right)^2 2Hs = \frac{4}{3}sH^3$$

Für die Berechnung der Ersatzmomente muss der  $k$ -Wert bekannt sein.

$$k = 1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{\left(\frac{4}{3}sH^3\right)^2}{\frac{20}{3}sH^2 \cdot 2sH^3} = 1 - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{20}{2}} = 1 - \frac{4^2 \cdot 3}{3^2 \cdot 20 \cdot 2} = 1 - \frac{16}{120} = \frac{13}{15}$$

Für die Dimensionierung des Balkens müssen die maximalen Normalspannungen ausgewertet werden. Da beide Biegemomente an der Einspannung maximal sind, befinden sich dort auch die maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments. Das bedeutet die Ersatzmomente werden mit den Beträgen der Momente an der Einspannung ermittelt.

$$\overline{M}_y = \frac{M_y + M_z \frac{I_{yz}}{I_z}}{k} = \frac{-16LF + 8LF \frac{4/3sH^3}{2sH^3}}{\frac{13}{15}} = \frac{-16LF + \frac{16}{3}LF}{\frac{13}{15}} = -\frac{160}{13}LF$$

$$\overline{M}_z = \frac{M_z + M_y \frac{I_{yz}}{I_y}}{k} = \frac{8LF - 16LF \frac{4/3sH^3}{20/3sH^3}}{\frac{13}{15}} = \frac{8LF - \frac{16}{5}LF}{\frac{13}{15}} = \frac{72}{13}LF$$

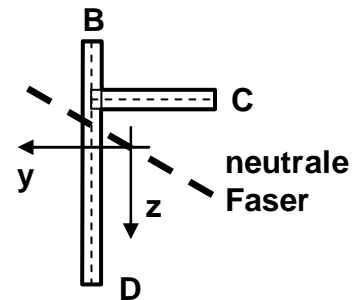
Die resultierende Spannungsverteilung lautet:

$$\sigma(y, z) = -\frac{\overline{M}_z}{I_z} y + \frac{\overline{M}_y}{I_y} z = -\frac{72}{13} \frac{LF}{2sH^3} z + \frac{-160}{13} \frac{LF}{20sH^3} y = -\frac{36}{13} \frac{LF}{sH^3} z - \frac{24}{13} \frac{LF}{sH^3} y = -\frac{12LF}{13sH^3} (3z + 2y)$$

Für die Bestimmung der neutralen Faser muss die Spannungsfunktion  $\sigma(y, z)$  gleich null gesetzt werden.

$$\sigma(y, z) = -\frac{12LF}{13sH^3} (3z + 2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3z + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{2}{3} y$$



e.) Die betragsmäßig größten Spannungen sind an dem Punkt des Profils, welcher den größten Abstand von der neutralen Faser besitzt. Dies ist einer der drei Punkte B, C oder D. Es wird nicht deren Abstand von der neutralen Faser, sondern der Spannungswert an diesen Punkten bestimmt.

$$\sigma_B = \sigma\left(y = \frac{H}{3}, z = -\frac{5}{3} H\right) = -\frac{12LF}{13sH^3} \left(3\left(-\frac{5}{3} H\right) + 2\left(\frac{H}{3}\right)\right) = 4 \frac{LF}{sH^2}$$

$$\sigma_C = \sigma\left(y = -\frac{5}{3} H, z = -\frac{2}{3} H\right) = -\frac{12LF}{13sH^3} \left(3\left(-\frac{2}{3} H\right) + 2\left(-\frac{5}{3} H\right)\right) = \frac{64}{13} \frac{LF}{sH^2}$$

$$\sigma_D = \sigma\left(y = \frac{H}{3}, z = \frac{7}{3} H\right) = -\frac{12LF}{13sH^3} \left(3\left(\frac{7}{3} H\right) + 2\left(\frac{H}{3}\right)\right) = -\frac{92}{13} \frac{LF}{sH^2}$$

Am Punkt D sind die betragsmäßig größten Normalspannungen. Sie werden zur Dimensionierung der Wandstärke verwendet.

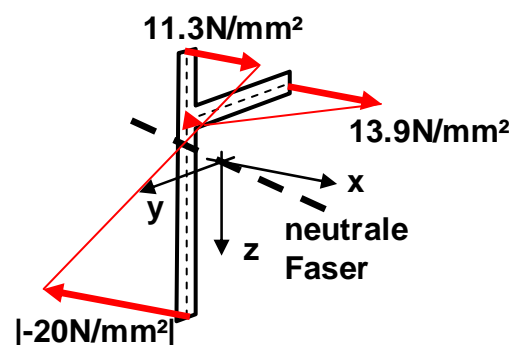
$$\sigma_{\max} = \sigma_D = \left| -\frac{92}{13} \frac{LF}{sH^2} \right| = \frac{92}{13} \frac{LF}{sH^2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{92}{13\sigma_{\max}} \frac{LF}{H^2} = \frac{92}{13 \cdot 20} \frac{130}{23} = 2 \text{ mm}$$

Mit der bekannten Wandstärke können die Spannungen an den Punkten B, C und D ermittelt werden.

$$\sigma_B = 4 \frac{LF}{sH^2} = 4 \frac{130}{2 \cdot 23} = \frac{260}{23} = 11.3 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

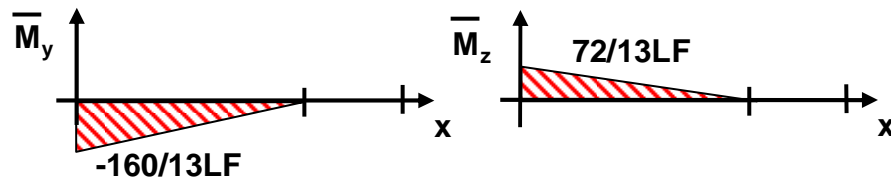
$$\sigma_C = \frac{64}{13} \frac{LF}{sH^2} = \frac{64}{13} \frac{130}{2 \cdot 23} = \frac{320}{23} = 13.9 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_D = -\frac{92}{13} \frac{LF}{sH^2} = -\frac{92}{13} \frac{130}{2 \cdot 23} = -20 \frac{N}{\text{mm}^2}$$



f.) Für die Berechnung der Verschiebungen  $v$  in  $y$ -Richtung und  $w$  in  $z$ -Richtung des rechten Endes des Balkens mit der Energiemethode

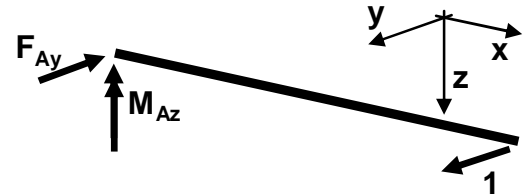
benötigt man den Verlauf der Ersatzmomente über der Balkenlänge. Da die beiden Ausgangsmomente  $M_y$  und  $M_z$  Dreiecksverläufe besitzen, die an der gleichen Position ihr Maximum einnehmen, die Berechnung der Ersatzmomente eine Linearkombination von beiden ist, haben die Ersatzmomente auch einen Dreiecksverlauf mit den bei d.) berechneten Maximums.



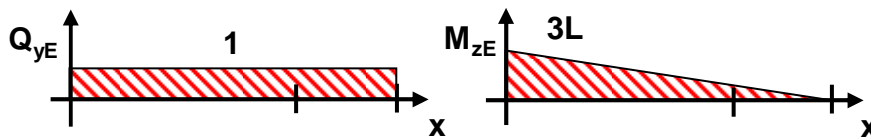
Für die Berechnung der Verschiebung  $v$  in  $y$ -Richtung muss am Ende des Balkens eine Einheitskraft in  $y$ -Richtung angebracht werden und das resultierende innere Biegemoment infolge der Einheitskraft bestimmt werden.

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{Ay} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 1$$

$$\sum M_z|_A = 0: \quad -M_{Az} + 3L \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Az} = 3L$$



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft in  $y$ -Richtung:



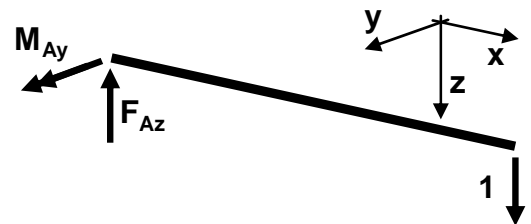
Die Verschiebung  $v$  resultiert aus der Energiemethode. Der Verlauf des Ersatzmomentes um die  $z$ -Achse und der Verlauf des Moments  $M_{zE}$  muss zusammen mit dem Flächenträgheitsmoment  $I_z$  in die Energiemethode eingesetzt werden.

$$v = \int_{3L}^0 \frac{\bar{M}_z M_{zE}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \frac{72}{13} LF \cdot 2L(2 \cdot 3L + L) = \frac{FL^3}{E2sH^3} \frac{168}{13} = \frac{84}{13} \frac{FL^3}{EsH^3} = \frac{84}{13} 13 = 84 \text{ mm}$$

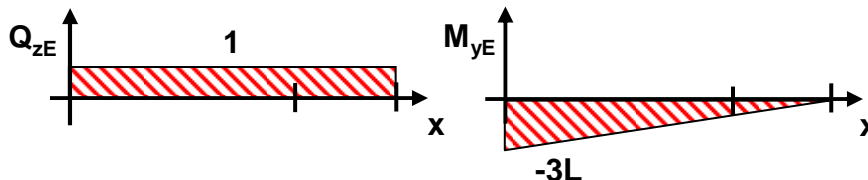
Für die Berechnung der Verschiebung  $w$  in  $z$ -Richtung muss am Ende des Balkens eine Einheitskraft in  $z$ -Richtung angebracht werden und das resultierende innere Biegemoment infolge der Einheitskraft bestimmt werden.

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = 1$$

$$\sum M_y|_A = 0: \quad M_{Ay} - 3L \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ay} = 3L$$



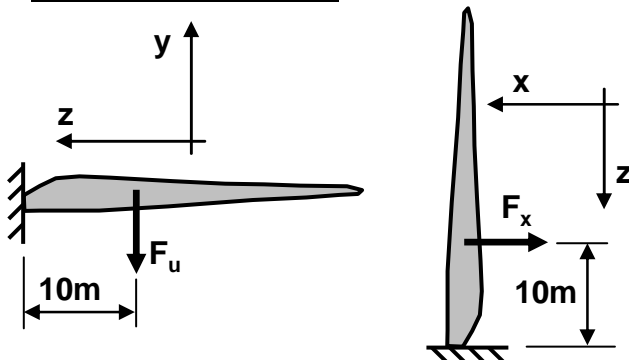
Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft in  $z$ -Richtung:



Der Verlauf des Ersatzmomentes um die  $y$ -Achse und der Verlauf des Moments  $M_{yE}$  muss zusammen mit dem Flächenträgheitsmoment  $I_y$  in die Energiemethode eingesetzt werden.

$$w = \int_{3L}^{\infty} \frac{\overline{M}_y M_{yE}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \frac{-\frac{160}{13} LF \cdot 2L(2 \cdot (-3L) - L)}{6} = \frac{FL^3}{E \frac{20}{3} sH^3} \frac{1120}{13} = \frac{56}{13} \frac{FL^3}{EsH^3} = \frac{56}{13} 13 = 56 \text{ mm}$$

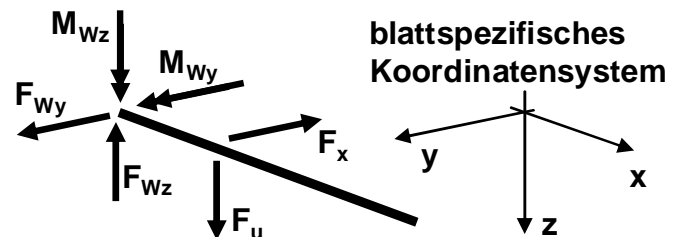
**Lösungen Aufgabe 42:**



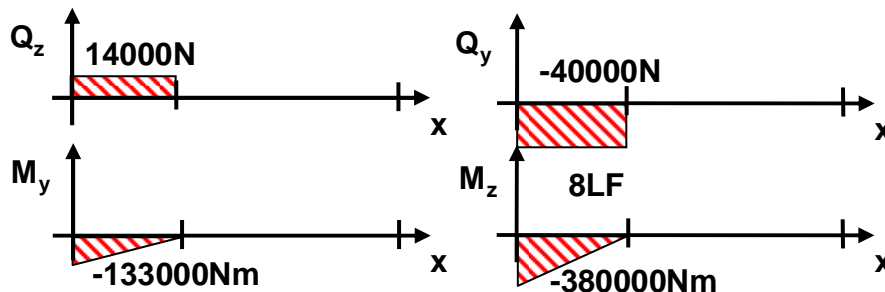
a.) Alle drei Flügel sind gleich belastet, daher wird nur der senkrecht stehende betrachtet. Dreht man diesen in die globale yz-Ebene bzw. xz-Ebene erkennt man dass die Kräfte  $F_u$  in die globale y-Richtung und  $F_x$  entgegen der globalen x-Richtung wirken. Die Befestigung des Blattes an der Wurzel stellt eine feste Einspannung dar. Wählt man ein blattspezifisches

Koordinatensystem können die Lagerkräfte an der Blattwurzel berechnet werden.

$$\begin{aligned} \sum M_y|_W = 0: & M_{Wy} - 9.5F_u = 0 \\ \Rightarrow & M_{Wy} = 10F_u = 9.5 \cdot 14000 = 133000 \text{ Nm} \\ \sum M_z|_W = 0: & M_{Wz} - 9.5F_x = 0 \\ \Rightarrow & M_{Wz} = 10F_x = 9.5 \cdot 40000 = 380000 \text{ Nm} \end{aligned}$$



Resultierende Innere Kräfte und Momente im Blatt:



Der Wurzelquerschnitt ist quadratisch. Für die Flächenträgheitsmomente gilt  $I_y = I_z = H^4/12$ . Das Deviationsmoment ist gleich null. Die Formel für die Spannungsberechnung mit den Momenten Maximalwerten  $M_{y\max} = -380000 \text{ Nm}$  und  $M_{z\max} = -133000 \text{ Nm}$  lautet:

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_{z\max}}{I_z} y + \frac{M_{y\max}}{I_y} z = -\frac{M_{z\max}}{\frac{H^4}{12}} y + \frac{M_{y\max}}{\frac{H^4}{12}} z = \frac{12}{H^4} (-M_{z\max} y + M_{y\max} z)$$

Den maximalen positiven Spannungsbetrag  $\sigma_{\max}$  erhält man für  $y = H/2$  und  $z = -H/2$ .

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(y = \frac{H}{2}, z = -\frac{H}{2}\right) = \frac{12}{H^4} \left( |M_{z\max}| \frac{H}{2} - |M_{y\max}| \left(-\frac{H}{2}\right) \right) = \frac{6}{H^3} (|M_{z\max}| + |M_{y\max}|)$$

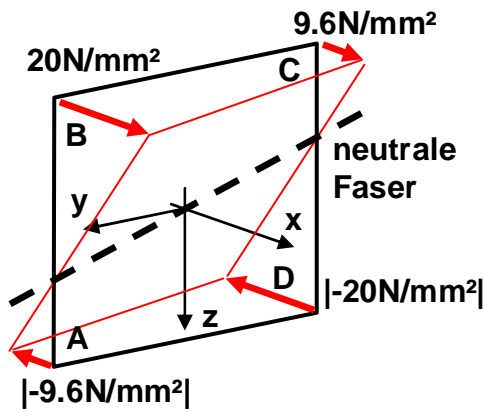
$$\Rightarrow H = \sqrt[3]{\frac{6}{\sigma_{\max}} (|M_{z\max}| + |M_{y\max}|)} = \sqrt[3]{\frac{6}{20} (380000 \cdot 10^3 + 133000 \cdot 10^3)} = 536 \text{ mm}$$

b.) Mit der Höhe H sind alle Größen der Formel zur Spannungsberechnung bekannt.

$$\sigma(y, z) = \frac{12}{H^4} (-M_{z \max} y + M_{y \max} z) = \frac{12}{536^4} (-(-133000 \cdot 10^3) y + (-380000 \cdot 10^3) z)$$

$$= 0.0193 y - 0.0552 z$$

Die Koordinaten der 4 Eckpunkte A, B, C und D werden in die Funktion zur Spannungsberechnung eingesetzt.



$$\sigma_A = \sigma\left(y = \frac{H}{2}, z = \frac{H}{2}\right) = 0.0193 \frac{536}{2} - 0.0552 \frac{536}{2}$$

$$= -9.6 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = \sigma\left(y = \frac{H}{2}, z = -\frac{H}{2}\right) = 0.0193 \frac{536}{2} - 0.0552 \left(-\frac{536}{2}\right)$$

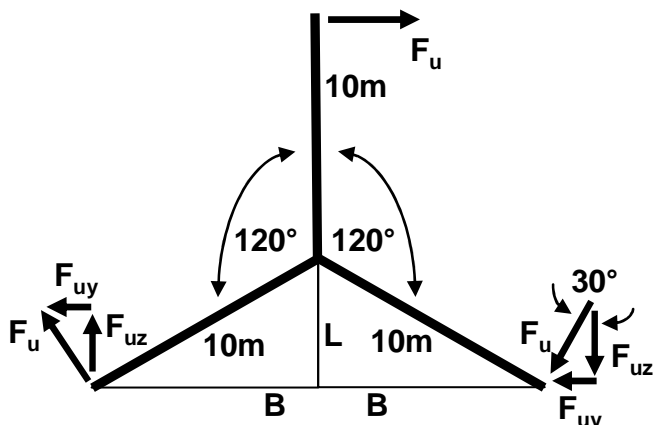
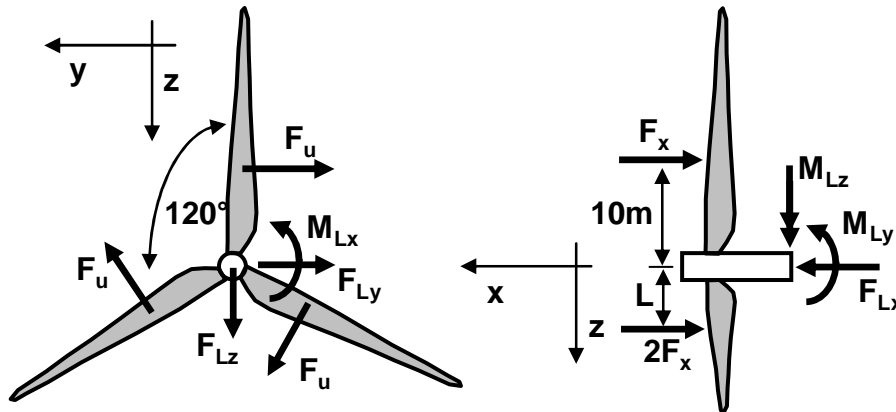
$$= 20 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = \sigma\left(y = -\frac{H}{2}, z = -\frac{H}{2}\right) = 0.0193 \left(-\frac{536}{2}\right) - 0.0552 \left(-\frac{536}{2}\right)$$

$$= 9.6 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = \sigma\left(y = -\frac{H}{2}, z = \frac{H}{2}\right) = 0.0193 \left(-\frac{536}{2}\right) - 0.0552 \frac{536}{2} = -20 \frac{N}{mm^2}$$

c.) Für die Bestimmung der Kräfte von den Blättern auf den Turm werden Rotor und Turm frei geschnitten. An den Rotorblättern sind die dargestellten Kräfte einzuzeichnen. Um die Übersicht zu Erhöhen wird der Rotor in die yz-Ebene und in die xz-Ebene projiziert.



Für die Bilanz der Kräfte und Momente muss die Kraft  $F_u$  an den unteren beiden Blättern in Komponenten zerlegt werden. Da die unteren beiden Blätter symmetrisch zur z-Achse stehen, gilt die Zerlegung für beide Blätter. Zusätzlich muss der Hebelarm L ermittelt werden.

$$\frac{F_{uz}}{F_u} = \cos 30^\circ \Rightarrow F_{uz} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_u$$

$$\frac{F_{uy}}{F_u} = \sin 30^\circ \Rightarrow F_{uy} = \frac{1}{2} F_u \quad \text{und} \quad \frac{L}{10} = \cos 60^\circ \Rightarrow L = \frac{1}{2} 10 = 5m$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_x - 2F_x + F_{Lx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Lx} = 3F_x = 120000N$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{uy} - F_{uy} + F_u + F_{Ly} = -\frac{F_u}{2} - \frac{F_u}{2} + F_u + F_{Ly} = F_{Ly} = 0$$

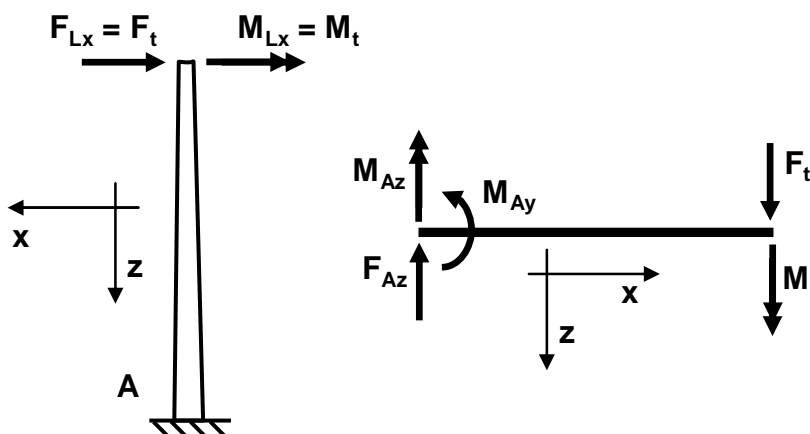
$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Uz} + F_{Uz} + F_{Lz} = F_{Lz} = 0$$

$$\sum M_x|_L = 0: \quad M_{Lx} - 3 \cdot 10F_u = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Lx} = 30F_u = 420000Nm$$

$$\sum M_y|_L = 0: \quad M_{Ly} - 10F_x - L \cdot 2F_x = M_{Ly} - 10F_x - 5 \cdot 2F_x = M_{Ly} = 0$$

$$\sum M_z|_L = 0: \quad M_{Lz} + BF_x - BF_x = M_{Lz} = 0$$

Die am Rotor berechneten Größen ungleich null werden auf den Turm übertragen. Der Turm wird in einem turmspezifischen Koordinatensystem dargestellt. Die globale x-Richtung entspricht der negativen lokalen z-Richtung, die globale y-Richtung zeigt in die negative lokale y-Richtung und die globale z-Richtung geht in die lokale negative x-Achse über. Um eine Verwechslung zu vermeiden, wird die Kraft  $F_{Lx}$  zu  $F_t=120000N$  und das Moment  $M_{Lx}$  zu  $M_t = 420000Nm$  umbenannt.

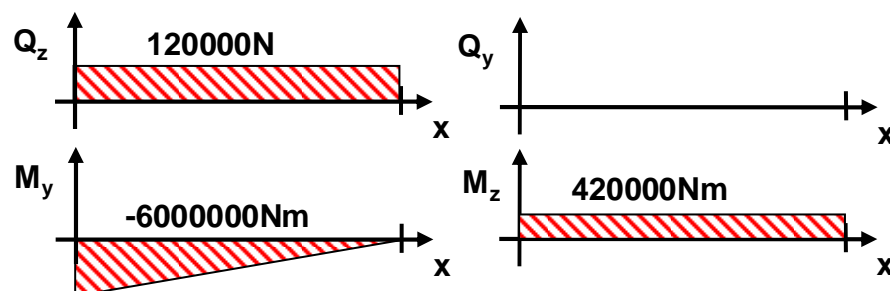


$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_t = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = F_t = 120000N$$

$$\sum M_y|_A = 0: \quad M_{Ay} - 50F_t = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ay} = 50F_t = 50 \cdot 120000 = 6000000Nm$$

$$\sum M_z|_A = 0: \quad -M_{Az} + M_t = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Az} = M_t = 420000Nm$$

Innere Kräfte und Momente im Turm:



Beim kreisrunden können die beiden Momente vektoriell addiert werden. Das maximale Gesamtmoment erhält man am Fußpunkt des Turms.



$$M_{ges} = \sqrt{M_{y_{max}}^2 + M_{z_{max}}^2} = \sqrt{(-6000000)^2 + 420000^2} = 6014682 Nm = 6.01 \cdot 10^9 Nmm$$

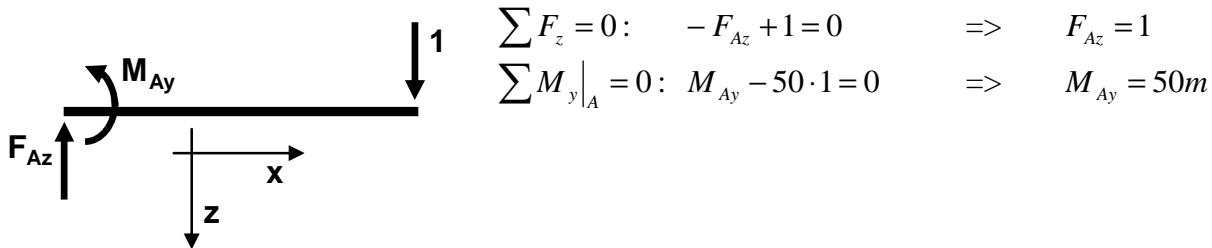
Die identischen Flächenträgheitsmomente  $I_y = I_z$  werden bestimmt.

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4}(1500^4 - 1450^4) = 5.04 \cdot 10^{11} mm^4$$

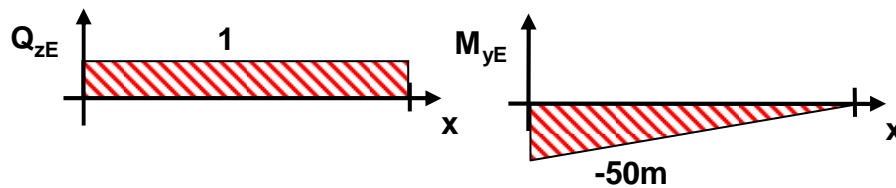
An der Außenseite ( $R_a = 1500mm$ ) des Turmfußes erhält man die maximalen Normalspannungen.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{ges}}{I_y} R_a = \frac{6.01 \cdot 10^9}{5.04 \cdot 10^{11}} 1500 = 17.89 \frac{N}{mm^2}$$

d.) Um die Verschiebung  $u$  in negativer, globaler  $x$ -Richtung zu bestimmen, wird an der Turmspitze in lokaler  $z$ -Richtung eine Einheitskraft aufgebracht.



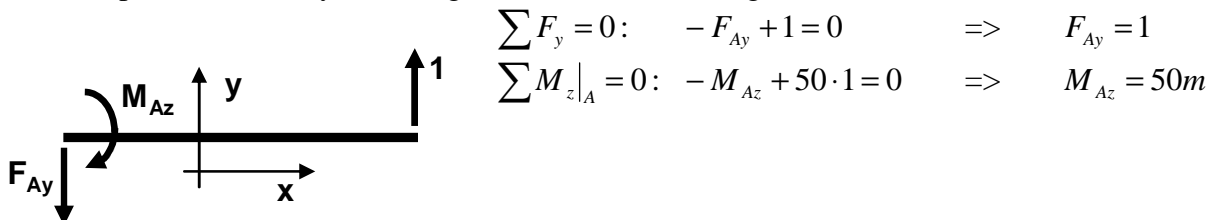
Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft in lokaler  $z$ -Richtung:



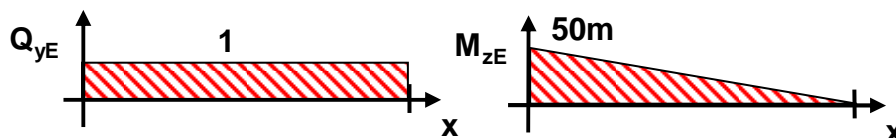
Für die Verschiebung  $u$  müssen das Flächenträgheitsmoment  $I_y$ , die Momente  $M_y$  und  $M_{yE}$  in die Energiemethode eingesetzt werden.

$$u = \frac{1}{EI_y} \int_0^{50000} M_y M_{yE} dx = \frac{1}{200000 \cdot 5.04 \cdot 10^{11}} \frac{(-6 \cdot 10^9)(-50 \cdot 10^3) 50000}{3} = 49.60 mm$$

Um die Verschiebung  $v$  in negativer, globaler  $y$ -Richtung zu bestimmen, wird an der Turmspitze in lokaler  $y$ -Richtung eine Einheitskraft aufgebracht.



Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft in lokaler  $y$ -Richtung:



Für die Verschiebung  $v$  müssen das Flächenträgheitsmoment  $I_z$ , die Momente  $M_z$  und  $M_{zE}$  in die Energiemethode eingesetzt werden.

$$v = \frac{1}{EI_z} \int_0^{50000} M_z M_{zE} dx = \frac{1}{200000 \cdot 5.04 \cdot 10^{11}} \frac{420000 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 50000}{2} = 5.21 \text{ mm}$$

Der Turm neigt sich um 49.60mm in negativer, globaler x-Richtung (Windrichtung) und um 5.21mm in negativer, globaler y-Richtung.

e.) Für die Bestimmung von Ort und Betrag der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments um die lokale y-Achse des Turmes wird das Moment  $M_y$  und der Radius  $R_m$  in Abhängigkeit von der lokalen x-Koordinate dargestellt.

$$M_y(x) = 6 \cdot 10^9 \left( 1 - \frac{x}{50000} \right)$$

$$R_m(x) = R_{mu} \left( 1 - \frac{x}{50000} \right) + R_{mo} \frac{x}{50000} = 1500 \left( 1 - \frac{x}{50000} \right) + 500 \frac{x}{50000} = 1500 - \frac{x}{50}$$

Die Ansätze werden in die Berechnungsformel für die Normalspannung eingesetzt. In Abhängigkeit von x soll die jeweilige maximale Normalspannung  $\sigma_{\max}$  ermittelt werden.

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} R_m(x) = \frac{M_y(x)}{\pi R_m^3(x)} R_m(x) = \frac{M_y(x)}{\pi R_m^2(x)} = \frac{6 \cdot 10^9 \left( 1 - \frac{x}{50000} \right)}{\pi \left( 1500 - \frac{x}{50} \right)^2}$$

An der x-Position mit der maximalen Normalspannung ist die Ableitung der selbigen gleich null.

$$\frac{d\sigma_{\max}(x)}{dx} = \frac{\frac{-6 \cdot 10^9}{50000} \pi \left( 1500 - \frac{x}{50} \right)^2 - 6 \cdot 10^9 \left( 1 - \frac{x}{50000} \right) 2 \cdot \pi \left( 1500 - \frac{x}{50} \right) \left( -\frac{1}{50} \right)}{\left[ \pi \left( 1500 - \frac{x}{50} \right)^2 \right]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{50000} \left( 1500 - \frac{x}{50} \right) + \left( 1 - \frac{x}{50000} \right) 2 \left( -\frac{1}{50} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 1500 - \frac{x}{50} - 2000 \left( 1 - \frac{x}{50000} \right) = 1500 - \frac{x}{50} - 2000 + \frac{2x}{50} = -500 + \frac{x}{50} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{50} = 500 \quad \Rightarrow \quad x = 25000$$

In der Balkenmitte sind die maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments  $M_y$ .

$$\sigma_{\max}(x = 25000) = \frac{6 \cdot 10^9 \left( 1 - \frac{25000}{50000} \right)}{\pi 50 \left( 1500 - \frac{25000}{50} \right)^2} = 19.10 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Zum Vergleich die Spannungen am Turmfuß und an der Turmspitze.

$$\sigma_{\max}(x=0) = \frac{6 \cdot 10^9 \left(1 - \frac{0}{50000}\right)}{\pi 50 \left(1500 - \frac{0}{50}\right)^2} = 16.97 \frac{N}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{\max}(x=50000) = \frac{6 \cdot 10^9 \left(1 - \frac{50000}{50000}\right)}{\pi 50 \left(1500 - \frac{50000}{50}\right)^2} = 0$$

f.) Als Moment muss das jeweilige Gesamtmoment  $M_{\text{ges}}$  verwendet werden.

$$M_{\text{ges}}(x=0) = \sqrt{\left(6 \cdot 10^9 \left(1 - \frac{0}{50000}\right)\right)^2 + (420000 \cdot 10^3)^2} = 6.0147 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{\max}(x=0) = \frac{6.0147 \cdot 10^9}{\pi 50 \left(1500 - \frac{0}{50}\right)^2} = 17.02 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

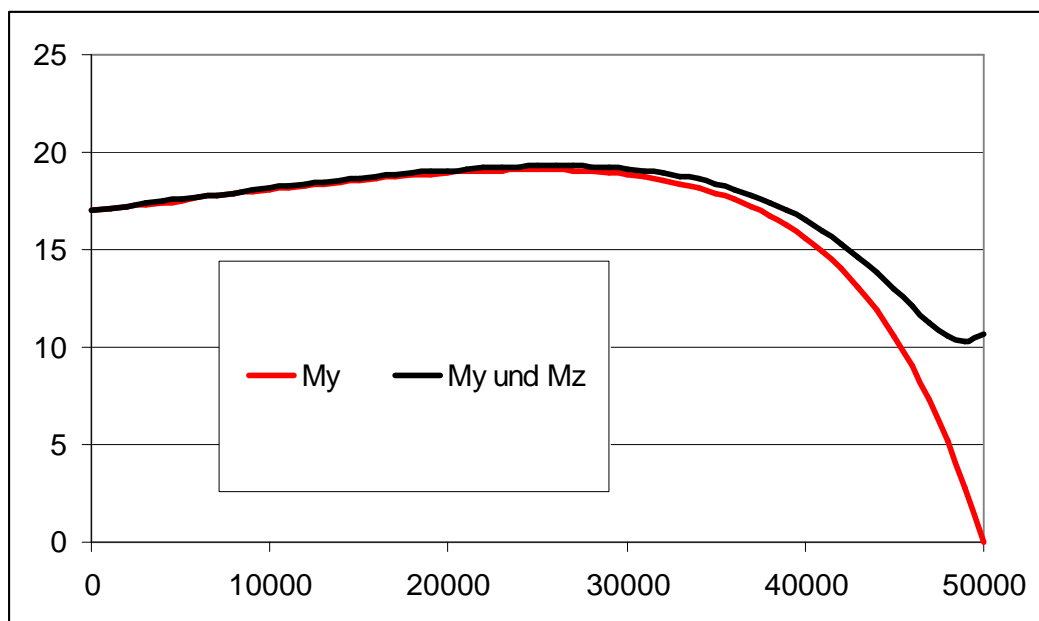
$$M_{\text{ges}}(x=25000) = \sqrt{\left(6 \cdot 10^9 \left(1 - \frac{25000}{50000}\right)\right)^2 + (420000 \cdot 10^3)^2} = 3.0293 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{\max}(x=25000) = \frac{3.0293 \cdot 10^9}{\pi 50 \left(1500 - \frac{25000}{50}\right)^2} = 19.29 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$M_{\text{ges}}(x=50000) = \sqrt{\left(6 \cdot 10^9 \left(1 - \frac{50000}{50000}\right)\right)^2 + (420000 \cdot 10^3)^2} = 4.2 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

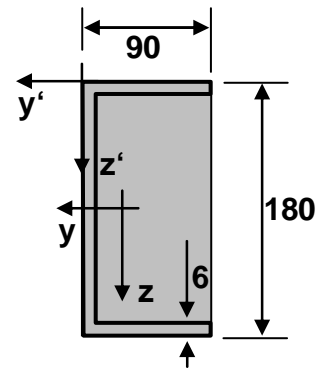
$$\sigma_{\max}(x=50000) = \frac{4.2 \cdot 10^8}{\pi 50 \left(1500 - \frac{50000}{50}\right)^2} = 10.70 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Im nachfolgenden Diagramm sind die Normalspannungen ohne und mit Berücksichtigung des Biegemomentes  $M_z$  über der Turmhöhe dargestellt. Mit dem Biegemoment  $M_z$  verschiebt sich das Maximum auf die ungefähre Position  $x = 26022\text{mm}$ .



**Lösungen Aufgabe 43:**

Auf das Bauteil wirken Kräfte in y- und z-Richtung. Daher resultieren innere Biegemomente um die y- und z-Achse. Dies bedeutet, dass zur Normalspannungsberechnung beide Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  bekannt sein müssen. Das Profil ist symmetrisch zur y-Achse, daher ist das Deviationsmoment  $I_{yz} = 0$ . Das Gesamtprofil wird in zwei Rechtecke eingeteilt, wobei das zweite vom ersten Abzuziehen ist. Für die Berechnung des benötigten Gesamtflächenmittelpunkts wird das  $y'z'$ -Koordinatensystem eingeführt.



$$y'_s = \frac{\sum_{i=1}^2 y'_{si} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{(-45) \cdot 90 \cdot 180 - (-48) \cdot 84 \cdot 168}{90 \cdot 180 - 84 \cdot 168} = -24.72$$

$$z'_s = \frac{\sum_{i=1}^2 z'_{si} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{90 \cdot 90 \cdot 180 - 90 \cdot 84 \cdot 168}{90 \cdot 180 - 84 \cdot 168} = 90$$

Mit dem bekannten Flächenmittelpunkt können die Flächenträgheitsmomente bestimmt werden.

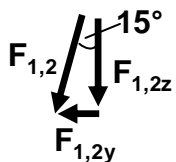
$$I_y = \frac{90 \cdot 180^3}{12} - \frac{84 \cdot 168^3}{12} = 10548576 = 10.549 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{180 \cdot 90^3}{12} + ((-45) - (-24.72))^2 \cdot 90 \cdot 180 - \frac{168 \cdot 84^3}{12} - ((-48) - (-24.72))^2 \cdot 84 \cdot 168$$

$$= 1651737 = 1.6517 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Der Balken wird frei geschnitten und die dargestellten Schnittkräfte eingezeichnet. Die Kräfte  $F_1 = 20\text{kN}$  und  $F_2 = 15\text{kN}$  zeigen weder in y- noch in z-Richtung und müssen daher in ihre Komponenten zerlegt werden.

Das für beide Kräfte identische Kräfte Dreieck ergibt:

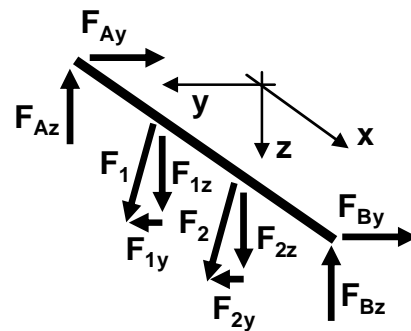


$$F_{1y} = F_1 \sin 15^\circ = 20 \sin 15^\circ = 5.18 \text{ kN}$$

$$F_{1z} = F_1 \cos 15^\circ = 20 \cos 15^\circ = 19.32 \text{ kN}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 15^\circ = 15 \sin 15^\circ = 3.88 \text{ kN}$$

$$F_{2z} = F_2 \cos 15^\circ = 15 \cos 15^\circ = 14.49 \text{ kN}$$



Mit den Gleichgewichtsbedingungen erhält man die Lagerkräfte, wobei berücksichtigt wird, dass in x-Richtung keine Kräfte und um die x-Achse keine Momente wirksam sind.

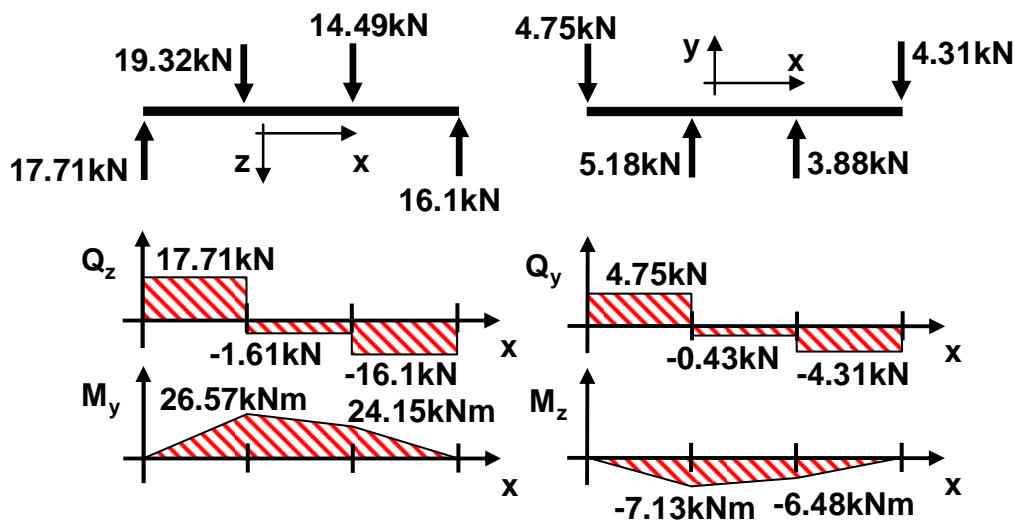
$$\sum M_y|_A = 0: -1.5F_{1z} - 3F_{2z} + 4.5F_{Bz} = 0 \Rightarrow F_{Bz} = 16.10 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + F_{1z} + F_{2z} - F_{Bz} = 0 \Rightarrow F_{Az} = 17.71 \text{ kN}$$

$$\sum M_z|_A = 0: 1.5F_{1y} + 3F_{2y} - 4.5F_{By} = 0 \Rightarrow F_{By} = 4.31 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: -F_{Ay} + F_{1y} + F_{2y} - F_{By} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 4.75 \text{ kN}$$

Innere Kräfte und Momente:



Mit den beiden Flächenträgheitsmomenten  $I_y$  und  $I_z$  und den inneren Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  kann die Formel zur Bestimmung der Normalspannungen gebildet werden. Da die Maximalspannungen gesucht werden, werden die maximalen Biegemomente  $M_{y\max}$  und  $M_{z\max}$  beim Angriffspunkt der Kraft  $F_1$  verwendet.

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_{z\max}}{I_z} y + \frac{M_{y\max}}{I_y} z = -\frac{7.13 \cdot 10^6}{1.6517 \cdot 10^6} y + \frac{26.57 \cdot 10^6}{10.549 \cdot 10^6} z = 4.32y + 2.52z$$

Die Funktion der neutralen Faser erhält man, wenn man die Spannungsfunktion gleich null setzt.

$$4.32y + 2.52z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1.71y$$

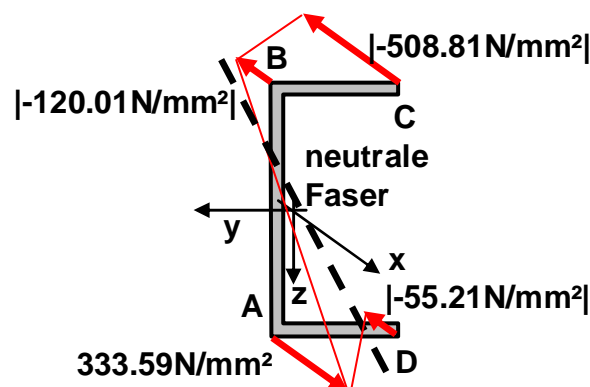
Die Spannungsfunktion wird an den vier äußeren Eckpunkten A, B, C und D ausgewertet, um den maximalen Spannungsbetrag und den Verlauf der Spannungen im Querschnitt zu erhalten.

$$\sigma_A = \sigma(y = 24.72, z = 90) = 4.32 \cdot 24.72 + 2.52 \cdot 90 = 333.59 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = \sigma(y = 24.72, z = -90) = 4.32 \cdot 24.72 + 2.52 \cdot (-90) = -120.01 \frac{N}{mm^2}$$

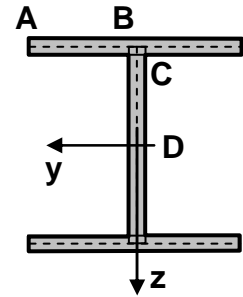
$$\sigma_C = \sigma(y = -65.28, z = -90) = 4.32 \cdot (-65.28) + 2.52 \cdot (-90) = -508.81 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = \sigma(y = -65.28, z = 90) = 4.32 \cdot (-65.28) + 2.52 \cdot 90 = -55.21 \frac{N}{mm^2}$$



**Lösungen Aufgabe 44:**

Der I-Träger ist symmetrisch zu seiner waagrechten Mittellinie. Dadurch ist die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes bekannt, der auf dieser Mittellinie liegt. Für die Berechnung von Querschnittsfläche  $A$  und Flächenträgheitsmoment  $I_y$  wird der Träger in drei Teilflächen zerlegt. Dabei wird berücksichtigt, dass er für die Betrachtung der Schubspannung infolge Querkraft als dünnwandig betrachtet werden muss.



$$A = 2 \cdot 60 \cdot 6 + 4 \cdot 60 = 960 \text{ mm}^2$$

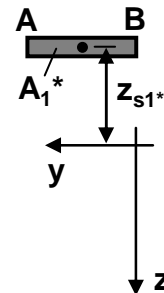
$$I_y = 2 \cdot 30^2 \cdot 60 \cdot 6 + \frac{4 \cdot 60^3}{12} = 720000 \text{ mm}^4$$

Vergleicht man diese Werte mit den exakten Werten für die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment  $A_{\text{exakt}} = 936 \text{ mm}^2$  und  $I_{y\text{exakt}} = 702648 \text{ mm}^4$  erkennt man Unterschiede. Allerdings gilt die Berechnungsmethode für die Schubspannung infolge Querkraft nur für dünnwandige Profile. Dadurch ist die Differenz zu akzeptieren.

An den Punkten A, B, C und D wird das statische Moment bestimmt.

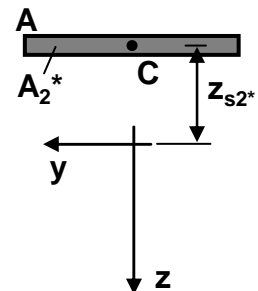
A: Am Punkt A befindet sich eine Quelle des Schubflusses bzw. ein Profilanfang. Somit ist dort das statische  $S_{yA} = 0$ .

B: Für das statische Moment am Punkt B muss die Fläche betrachtet werden, die vom Schubfluss der am Punkt B vorbeikommt durchströmt wird. Das ist der Schubfluss, der von der Quelle A bis zum Punkt B strömt. Somit muss die Fläche  $A_1^*$  betrachtet werden, deren Schwerpunkt den Abstand  $z_{s1}^* = 30$  in z-Richtung vom Gesamtflächenmittelpunkt besitzt.



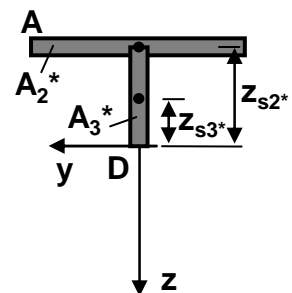
$$S_{yB} = A_1^* z_{s1}^* = 30 \cdot 6 \cdot 30 = 5400 \text{ mm}^3$$

C: Für das statische Moment am Punkt C muss die Fläche betrachtet werden, die vom Schubfluss der am Punkt C vorbeikommt durchströmt wird. Das ist der Schubfluss, der von den Quellen A und der am rechten Profilenende bis zum Punkt C strömt. Am Punkt C vereinigen sich beide Schubflüsse. Daher muss die Fläche  $A_2^*$  betrachtet werden, deren Schwerpunkt den Abstand  $z_{s2}^* = 30$  in z-Richtung vom Gesamtflächenmittelpunkt besitzt.



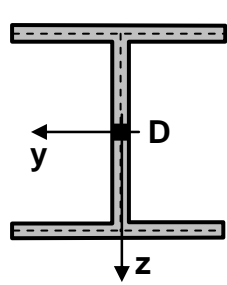
$$S_{yC} = A_2^* z_{s2}^* = 60 \cdot 6 \cdot 30 = 10800 \text{ mm}^3$$

D: Für das statische Moment am Punkt D muss die Fläche betrachtet werden, die vom Schubfluss der am Punkt D vorbeikommt durchströmt wird. Das ist der Schubfluss, der von den Quellen A und der am rechten Profilenende bis zum Punkt D strömt. Am Punkt C vereinigen sich beide Schubflüsse und strömen gemeinsam zum Punkt D. Somit müssen die Fläche  $A_2^*$  und  $A_3^*$  betrachtet werden, deren Schwerpunkt den Abstand  $z_{s2}^* = 30$  bzw.  $z_{s3}^* = 15$  in z-Richtung vom Gesamtflächenmittelpunkt besitzt.



$$S_{yD} = A_2^* z_{s2}^* + A_3^* z_{s3}^* = 10800 + 4 \cdot 30 \cdot 15 = 12600 \text{ mm}^3$$

Für die Bestimmung der Schweißnahtdicke am Punkt D muss das statische Moment an diesem Punkt berücksichtigt werden. Für den Schubfluss am Punkt D gilt:

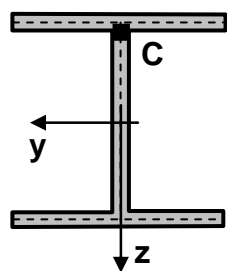


$$q_D = \frac{Q}{I_y} S_{yD} = \frac{10000}{720000} 12600 = 175 \frac{N}{mm}$$

Ebenso gilt für den Schubfluss  $q_D$  mit der Schweißnahtdicke  $s_D$  in der Schweißnaht:

$$q_D = \tau_{\max} s_D \Rightarrow s_D = \frac{q_D}{\tau_{\max}} = \frac{175}{100} = 1.75 mm$$

Die Schweißnahtdicke am Punkt C erhält man mit dem statischen Moment  $S_{yC}$ .

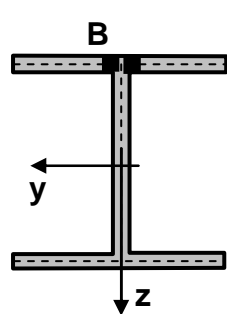


$$q_C = \frac{Q}{I_y} S_{yC} = \frac{10000}{720000} 10800 = 150 \frac{N}{mm}$$

Damit errechnet man die Schweißnahtdicke  $s_C$  am Punkt C:

$$q_C = \tau_{\max} s_C \Rightarrow s_C = \frac{q_C}{\tau_{\max}} = \frac{150}{100} = 1.5 mm$$

Die verbleibende Schweißnahtdicke der beiden Nähte der dritten Geometrie ist wegen der Symmetrie identisch. Sie erhält man mit dem statischen Moment  $S_{yB}$ .



$$q_B = \frac{Q}{I_y} S_{yB} = \frac{10000}{720000} 5400 = 75 \frac{N}{mm}$$

Damit errechnet man die Schweißnahtdicke  $s_B$  am Punkt B bzw. an beiden Nahtstellen:

$$q_B = \tau_{\max} s_B \Rightarrow s_B = \frac{q_B}{\tau_{\max}} = \frac{75}{100} = 0.75 mm$$

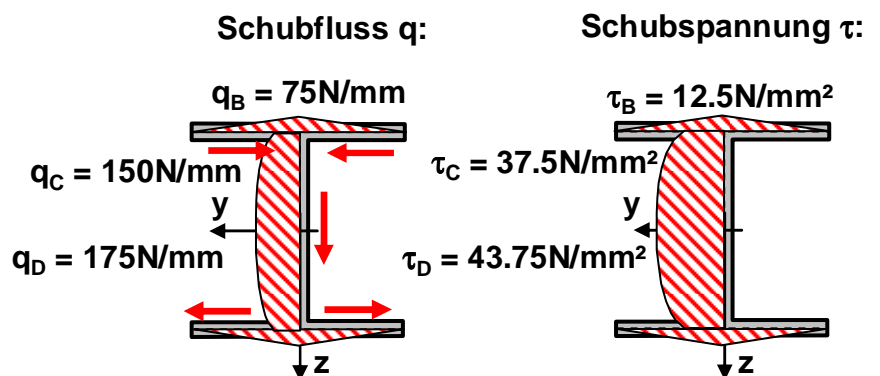
Für den Verlauf der Schubspannungen und des Schubflusses im I-Träger müssen wieder die Schubspannungen an den Punkten B, C und D bestimmt werden. Sie werden mit den lokalen Wandstärken  $s_B = 6$ ,  $s_C = 4$  und  $s_D = 4$  des I-Trägers aus den lokalen Schubflüssen berechnet. In den waagrechten Flanschen ändert sich der Schubfluss linear, im senkrechten Steg quadratisch.

$$\tau_B = \frac{q_B}{s_B} = \frac{75}{6} = 12.5 \frac{N}{mm^2}$$

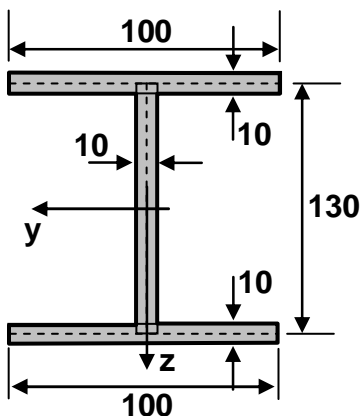
$$\tau_C = \frac{q_C}{s_C} = \frac{150}{4} = 37.5 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_D = \frac{q_D}{s_D} = \frac{175}{4} = 43.75 \frac{N}{mm^2}$$

Die roten Pfeile in der Skizze markieren die Fließrichtung des Schubflusses von seinen Quellen zu seinen Senken.



**Lösungen Aufgabe 45:**



a.) Das Gesamtprofil muss als dünnwandig betrachtet werden. Es wird in die dargestellten Teilflächen und die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  berechnet.

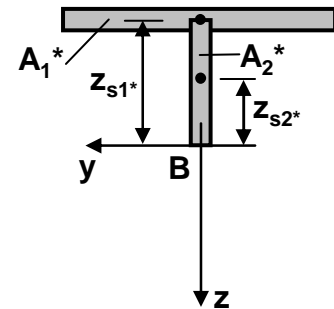
$$A = 2 \cdot 100 \cdot 10 + 10 \cdot 130 = 3300 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 2 \cdot 65^2 \cdot 100 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 130^3}{12} = 10280833.3 = 1.03 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Die maximale Schubspannung infolge Querkraft wird auf der Höhe des Flächenmittelpunktes auftreten. Zur Berechnung der maximal

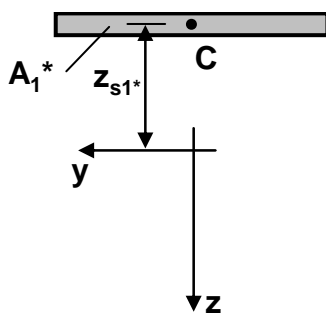
zulässigen Querkraft wird an diesem Punkt B das statische Moment  $S_{yB}$  berechnet.

$$S_{yB} = A_1^* z_{s1}^* + A_2^* z_{s2}^* = 100 \cdot 10 \cdot 65 + 10 \cdot 65 \cdot 32.5 = 86125 \text{ mm}^3$$



Aus der Bestimmungsformel für die Schubspannung kann die maximal zulässige Querkraft ermittelt werden.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{I_y S} S_{yB} \quad \Rightarrow \quad Q_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{S_{yB}} I_y S = \frac{4}{86125} 1.03 \cdot 10^7 \cdot 10 = 4783 \text{ N}$$



Das Profil ist symmetrisch zur y-Achse. Daher sind die Stifte an Ober- und Unterseite gleich stark belastet. Es muss nur die Oberseite betrachtet werden. Für die Bestimmung des Abstandes der Verbindungsstifte wird am Punkt C das statische Moment  $S_{yC}$  und der Schubfluss  $q_C$  bestimmt. Durch die Verbindungsstifte muss der gesamte Schubfluss des waagrechten Flansches abgeleitet werden. Daher muss für die Berechnung des statischen Moments  $S_{yC}$  die gesamte Fläche des oberen waagrechten Flansches berücksichtigt werden.

$$S_{yC} = A_1^* z_{s1}^* = 100 \cdot 10 \cdot 65 = 65000 \text{ mm}^3$$

$$q_C = \frac{Q_{\max}}{I_y} S_{yC} = \frac{4783}{1.03 \cdot 10^7} 65000 = 30.18 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Der berechnete Schubfluss  $q_C = 30.18 \text{ N/mm}$  gibt an, dass pro mm Balkenlänge eine Kraft von  $30.18 \text{ N}$  in den Verbindungsstiften übertragen werden muss. Für die Ermittlung der Anzahl der Stifte pro mm wird die Kraft  $F_V$  berechnet, die ein Verbindungsstift mit der Querschnittsfläche  $A_V$  übertragen kann.

$$F_V = \tau_{\max} A_V = \tau_{\max} \pi R^2 = 100 \cdot \pi \cdot 3^2 = 2827.43 \text{ N}$$

Ist  $x_C$  die Anzahl der Niete pro mm, so kann dieses aus dem Schubfluss  $q_C$  und der Kraft  $F_V$  berechnet werden.

$$x_C = \frac{q_C}{F_V} = \frac{30.18}{2827.43} = 10.67 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}}$$



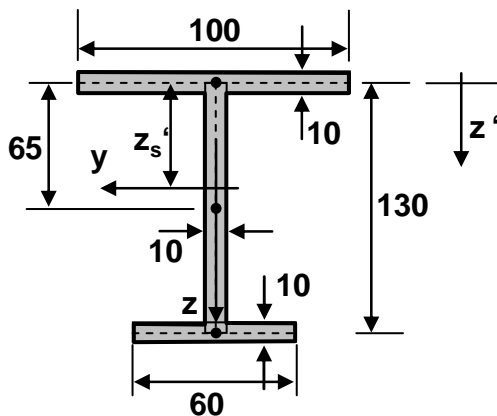
Der minimale Abstand  $L_C$  der Stifte ist der Kehrwert von  $x_C$ .

$$L_C = \frac{1}{x_C} = \frac{1}{10.67 \cdot 10^{-3}} = 93.72 \text{ mm}$$

Man benötigt pro Millimeter  $10.67 \cdot 10^{-3}$  Stifte, somit die tausendfache Anzahl  $n = 10.67$  pro Meter. Teilt man die Länge eines Meters durch die Anzahl der benötigten Stifte erhält man ebenso den minimalen Stiftabstand  $L_C$ .

$$L_C = \frac{1000}{n} = \frac{1000}{10.67} = 93.72 \text{ mm}$$

b.) Reduziert man die untere Flanschbreite  $B_2$  von 100mm auf 60mm, dann wird der Gesamtflächenmittelpunkt nach oben verschoben. Die maximale Schubspannung infolge



Querkraft ist immer auf der Höhe des Gesamtflächenmittelpunktes. Das Spannungsmaximum verschiebt sich daher auch nach oben. Dies bedeutet, dass die Lage des Gesamtflächenmittelpunktes, die Querschnittsfläche  $A$  und das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  neu berechnet werden muss. Für die Bestimmung des Gesamtflächenmittelpunktes wird ein Bezugskoordinatensystem  $z'$  eingeführt. Bezüglich dieses Koordinatensystems werden die Flächenmittelpunkte der Teilflächen angegeben.

$$A_1 = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ mm}^2, \quad z'_{s1} = 0,$$

$$A_2 = 10 \cdot 130 = 1300 \text{ mm}^2, \quad z'_{s2} = 65 \text{ mm}$$

$$A_3 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ mm}^2, \quad z'_{s3} = 130 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad A = A_1 + A_2 + A_3 = 2900 \text{ mm}^2$$

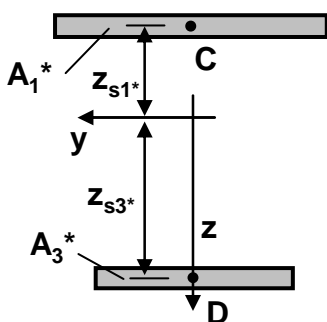
$$z'_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^3 z'_{si} A_i = \frac{0 \cdot 1000 + 65 \cdot 1300 + 130 \cdot 600}{2900} = 56 \text{ mm}$$

$$I_y = (0 - 56)^2 \cdot 1000 + \frac{10 \cdot 130^3}{12} + (65 - 56)^2 \cdot 1300 + (130 - 56)^2 \cdot 600 = 8.36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Analog zur Aufgabe a.) wird das statische Moment  $S_{yB}$  am Gesamtflächenmittelpunkt  $B$  berechnet, wobei sich die Teilfläche  $A_2^*$  und die beiden Abstände  $z_{s1}^*$  und  $z_{s2}^*$  reduzieren.

$$S_{yB} = A_1^* z_{s1}^* + A_2^* z_{s2}^* = 100 \cdot 10 \cdot 56 + 10 \cdot 56 \cdot 28 = 71680 \text{ mm}^3$$

Aus der Bestimmungsformel für die Schubspannung kann die maximal zulässige Querkraft ermittelt werden.



$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{I_y} S_{yB} \quad \Rightarrow \quad Q_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{S_{yB}} I_y s = \frac{4}{71680} 8.36 \cdot 10^6 \cdot 10 = 4665 \text{ N}$$

Da das Profil nicht mehr symmetrisch zur  $y$ -Achse ist, resultiert an den Punkten  $C$  und  $D$  ein unterschiedlicher Schubfluss und nach unterschiedliche Verbindungsstiftabstände.

$$S_{yC} = A_1^* z_{s1}^* = 100 \cdot 10 \cdot 56 = 56000 \text{ mm}^3$$

$$q_C = \frac{Q_{\max}}{I_y} S_{yC} = \frac{4665}{8.36 \cdot 10^6} 56000 = 31.25 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$S_{yD} = A_3^* z_{s3}^* = 60 \cdot 10 \cdot (130 - 56) = 44400 \text{ mm}^3$$

$$q_D = \frac{Q_{\max}}{I_y} S_{yD} = \frac{4665}{8.36 \cdot 10^6} 44400 = 24.78 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Sind  $x_C$  und  $x_D$  die Anzahl der Niete pro mm, so können diese aus den Schubflüssen  $q_C$ ,  $q_D$  und der Kraft  $F_V$  berechnet werden.

$$x_C = \frac{q_C}{F_V} = \frac{31.25}{2827.43} = 11.05 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} \quad \text{und} \quad x_D = \frac{q_D}{F_V} = \frac{24.78}{2827.43} = 8.76 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}}$$

Der minimale Abstand  $L$  der Stifte ist der Kehrwert von  $x$ .

$$L_C = \frac{1}{x_C} = \frac{1}{11.05 \cdot 10^{-3}} = 90.50 \text{ mm} \quad \text{und} \quad L_D = \frac{1}{x_D} = \frac{1}{8.76 \cdot 10^{-3}} = 114.10 \text{ mm}$$

Für den Verlauf des Schubflusses muss der Schubfluss  $q_E$ , bevor er sich am Punkt C vereint, angegeben werden. Da die durchströmte Fläche des von links kommenden und des von rechts kommenden Schubfluss gleich groß sind, müssen auch die Schubflüsse gleich sein. Gleiches gilt für den Schubfluss  $q_F$  nach der Verzweigungsstelle D.

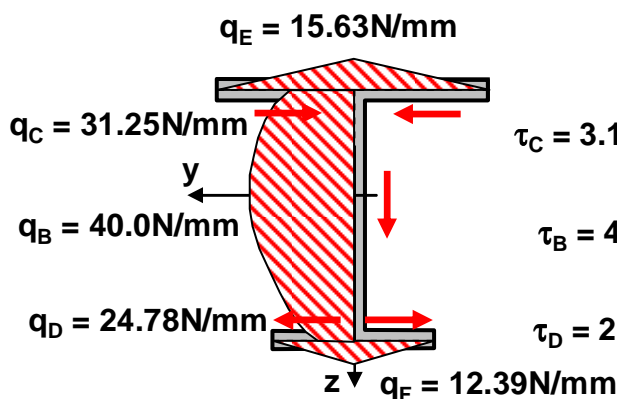
$$q_E = \frac{q_C}{2} = \frac{31.25}{2} = 15.63 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{und} \quad q_F = \frac{q_D}{2} = \frac{24.78}{2} = 12.39 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Für den Schubfluss am Gesamtflächenmittelpunkt gilt:

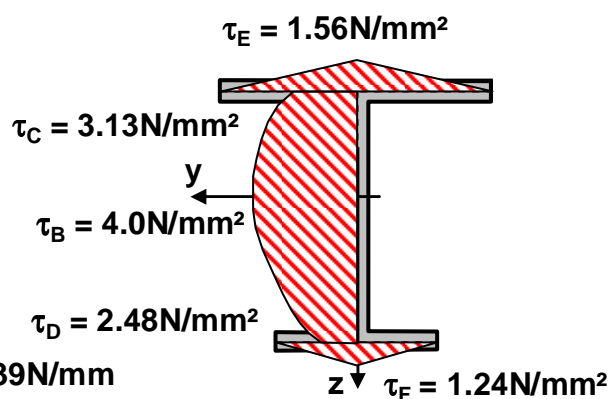
$$q_B = \frac{Q_{\max}}{I_y} S_{yB} = \frac{4665}{8.36 \cdot 10^6} 71680 = 40.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Da die Wandstärke  $s = 10 \text{ mm}$  im gesamten Profil konstant ist, erhält man die Schubspannungen infolge Querkraft, indem man den Schubfluss durch die Wandstärke teilt.

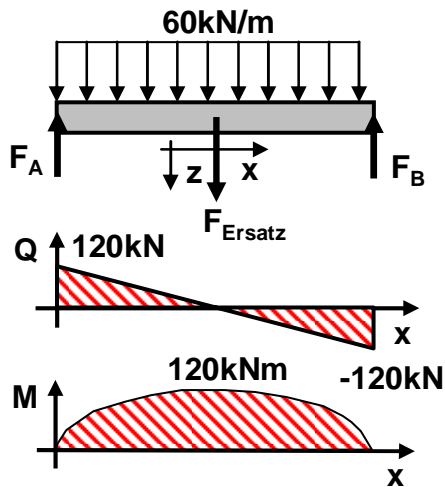
### Schubfluss $q$ :



### Schubspannung $\tau$ :



**Lösungen Aufgabe 46:**



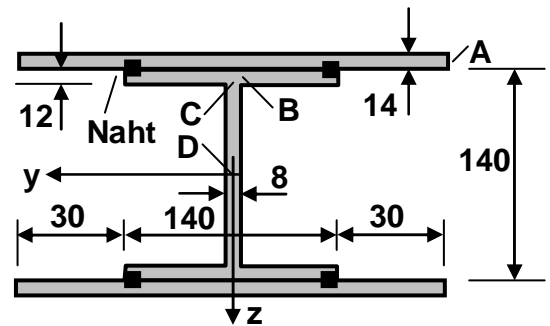
Die Ersatzkraft für die Streckenbelastung  $F_{Ersatz}$  greift in der Bauteilmitte an.

$$F_{Ersatz} = 60 \cdot 4 = 240 \text{ kN}$$

Die resultierenden Lagerkräfte, innere Kräfte und Momente sind nebenstehend angegeben.

$$\sum M_y|_A = 0: -2F_{Ersatz} + 4F_B = 0 \Rightarrow F_B = 120 \text{ kN}$$

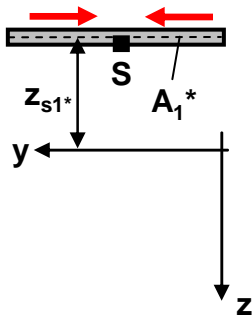
$$\sum F_z = 0: -F_A + F_{Ersatz} - F_B = 0 \Rightarrow F_A = 120 \text{ kN}$$



Das Profil muss als dünnwandig betrachtet werden. Man erhält die Querschnittsfläche  $A$  und das Flächenträgheitsmoment  $I_y$ .

$$A = 2 \cdot 200 \cdot 14 + 2 \cdot 140 \cdot 12 + 8 \cdot 128 = 9984 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{154}{2}\right)^2 \cdot 200 \cdot 14 + 2 \cdot \left(\frac{128}{2}\right)^2 \cdot 140 \cdot 12 + \frac{8 \cdot 128^3}{12} = 4.84 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$



- An allen vier Schweißstellen existiert der gleiche Schubfluss. Daher sind alle gleich belastet und benötigen die gleiche Schweißnahtdicke. Für deren Bestimmung wird für die obere linke Naht der lokale Schubfluss  $q_s$  berechnet. Die Schweißnaht soll über der gesamten Balkenlänge konstant sein. Für die Dimensionierung muss daher die betragsmäßig größte Querkraft  $Q_{max} = 120 \text{ kN}$  verwendet werden. Bei der Berechnung des statischen Moments  $S_{yS}$  müssen alle Flächen berücksichtigt werden, die vom Schubfluss  $q_s$ , der die Naht quert, durchströmt werden. Mit den roten Pfeilen ist die Fließrichtung des

Schubflusses gekennzeichnet.

$$S_{yS} = A_1^* z_{s1}^* = 100 \cdot 14 \cdot \frac{154}{2} = 107800 \text{ mm}^3$$

$$q_s = \frac{Q_{max}}{I_y} S_{yS} = \frac{120000}{4.84 \cdot 10^7} 107800 = 267.27 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Für die Schweißnahtdicke  $s_S$  gilt:

$$\tau_{max} = \frac{q_s}{s_S} \Rightarrow s_S = \frac{q_s}{\tau_{max}} = \frac{267.27}{150} = 1.78 \text{ mm}$$

Am Querschnitt I beträgt die Querkraft null. Somit ist die Schubspannung infolge Querkraft am gesamten Querschnitt auch gleich null und muss nicht betrachtet werden. Für die Normalspannungen infolge des Biegemoments wird die Normalspannungsfunktion aufgestellt.

$$\sigma_I(z) = \frac{M_I}{I_y} z = \frac{120 \cdot 10^6}{4.84 \cdot 10^7} z = 2.48z$$

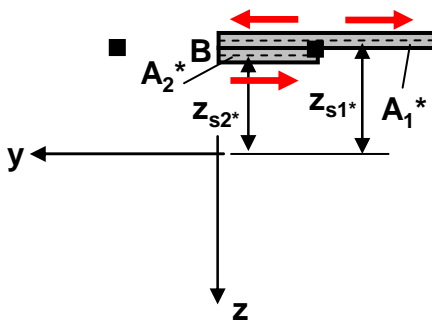
Setzt man die z-Koordinaten der Punkte A, B, C und D ein, so erhält man die jeweiligen Normalspannungen infolge Biegemoments.

$$\sigma_A = \sigma_I \left( z = -\frac{154}{4} \right) = 2.48(-77) = -191 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = \sigma_C = \sigma_I \left( z = -\frac{128}{4} \right) = 2.48(-64) = -159 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = \sigma_I(z=0) = 2.48 \cdot 0 = 0$$

Am Querschnitt II beträgt die Querkraft -120kN. Für die Bestimmung der Schubspannung infolge Querkraft an den Punkten A, B, C und D wird an diesen Punkten das statische Moment bestimmt. Da der Punkt A eine Quelle des Schubflusses darstellt, erkennt man sofort, dass dort das statische Moment  $S_{yA} = 0$  und somit auch  $\tau_A = 0$  sein muss. Für das statische Moment  $S_{yB}$  muss die Fläche berücksichtigt werden, die vom Schubfluss durchströmt wird, der den Punkt B quert. Der Schubfluss strömt von unten nach oben, da die Querkraft negativ ist. Dies macht sich in der resultierenden negativen Schubspannung bemerkbar.



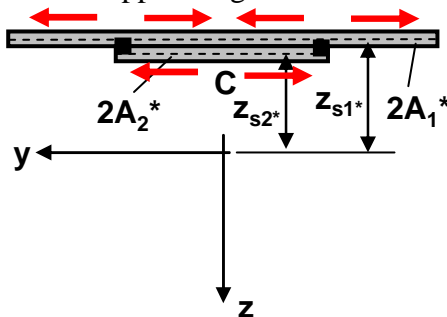
$$S_{yB} = A_1^* z_{s1}^* + A_2^* z_{s2}^* = 107800 + 70 \cdot 12 \frac{128}{2} = 161560 mm^3$$

$$q_{II,B} = \frac{Q_{II}}{I_y} S_{yB} = \frac{-120000}{4.84 \cdot 10^7} 161560 = -400.56 \frac{N}{mm}$$

Am Punkt B hat das Profil die Wandstärke  $s_B = 12mm$ .

$$\tau_{II,B} = \frac{q_{II,B}}{s_B} = \frac{-400.56}{12} = -33.38 \frac{N}{mm^2}$$

Für das statische Moment  $S_{yC}$  muss die Fläche berücksichtigt werden, die vom Schubfluss durchströmt wird, der den Punkt C quert. Aus der Symmetrie erkennt man, dass diese Fläche doppelt so groß wie die bei der Berechnung von  $S_{yB}$  ist.

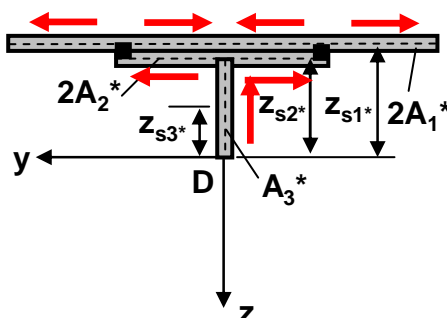


$$S_{yC} = 2A_1^* z_{s1}^* + 2A_2^* z_{s2}^* = 2 \cdot 161560 = 323120 mm^3$$

$$q_{II,C} = \frac{Q_{II}}{I_y} S_{yC} = \frac{-120000}{4.84 \cdot 10^7} 323120 = -801.12 \frac{N}{mm}$$

Der Punkt C befindet sich am oberen Ende des senkrechten Stegs. Das Profil hat die Wandstärke  $s_C = 8mm$ .

$$\tau_{II,C} = \frac{q_{II,C}}{s_C} = \frac{-801.12}{8} = -100.14 \frac{N}{mm^2}$$



Für das statische Moment am Punkt D muss die obere Hälfte berücksichtigt werden. Der Schubfluss strömt von unten nach oben. Wieder erkennt man dies an der negativen resultierenden Schubspannung.

$$S_{yD} = 2A_1^* z_{s1}^* + 2A_2^* z_{s2}^* + A_3^* z_{s3}^* = 323120 + 8 \frac{128}{2} \frac{128}{4} = 339504 mm^3$$

$$q_{II,D} = \frac{Q_{II}}{I_y} S_{yD} = \frac{-120000}{4.84 \cdot 10^7} 339504 = -841.75 \frac{N}{mm}$$

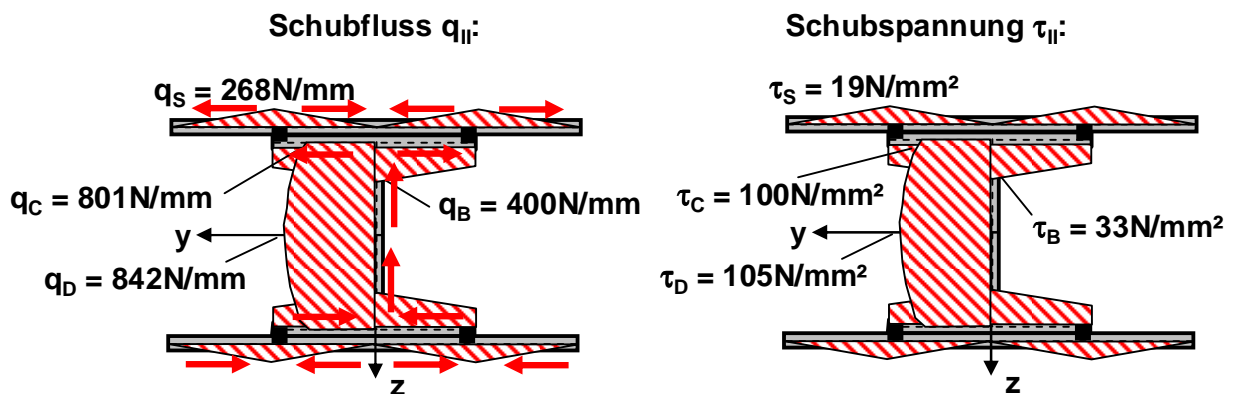
Am Punkt D beträgt die Wandstärke  $s_D = 8mm$ .

$$\tau_{II,D} = \frac{q_{II,D}}{s_D} = \frac{-841.75}{12} = -105.22 \frac{N}{mm^2}$$

Für die Schubspannung auf Höhe der Schweißnaht kann der Schubfluss  $q_S$  durch die lokale Wandstärke  $s_{S^*} = 14mm$  des Profils geteilt werden. Da bei der Dimensionierung der Schweißnaht nur der Betrag der Querkraft berücksichtigt wurde, wird jetzt dem Schubfluss  $q_S$  ein negatives Vorzeichen vorangestellt, um die Orientierung zu berücksichtigen.

$$\tau_{II,S} = \frac{-q_S}{s_{S^*}} = \frac{-267.27}{14} = -19.09 \frac{N}{mm^2}$$

In der folgenden Skizze werden nur die Beträge der Schubflüsse und Schubspannungen eingezeichnet. Die Wirkrichtung folgt dem Schubfluss, der von unten nach oben strömt und dessen Fließrichtung durch die roten Pfeile dargestellt wird. Die Beträge sind symmetrisch zur y- und z-Achse.



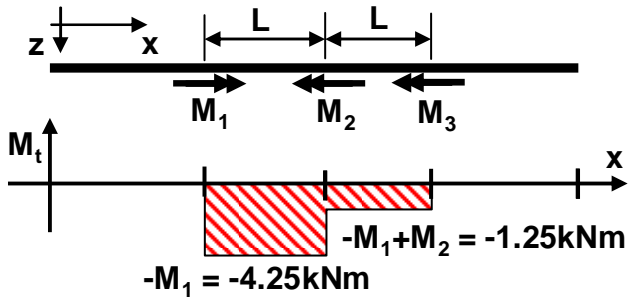
Das innere Biegemoment ist am Querschnitt II gleich null. Somit sind auch die Normalspannungen infolge des Biegemoments gleich null.

**Lösungen Aufgabe 47:**

An der Welle wirken um die Stabachse (x-Achse) nur die drei Momente  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ .

$$\sum M_x = 0: \quad M_1 - M_2 - M_3 = 4.25 \text{ kNm} - 3 \text{ kNm} - 1.25 \text{ kNm} = 0$$

Dies ergibt folgenden Verlauf des Torsionsmoments.



Das Torsionsflächenträgheitsmoment beträgt:

$$I_p = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4 = \frac{\pi}{32} 150^4 = 4.97 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Dies ergibt im Abschnitt zwischen Zahnrad 1 und 2 die folgenden Schubspannungen:

$$\tau_{12} = \frac{M_{t12}}{I_p} r = \frac{-M_1}{I_p} r = \frac{-4.25 \cdot 10^6}{4.97 \cdot 10^7} r = -0.0855 r$$

Die betragsmäßig größten Schubspannung ergeben sich zu:

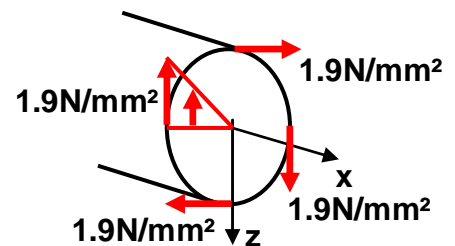
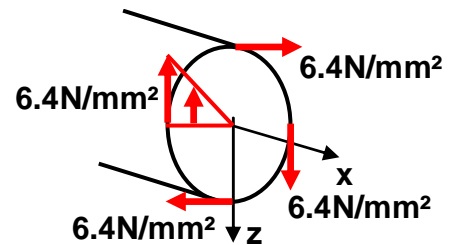
$$\tau_{12, \max} = \tau_{12} \left( r = \frac{D}{2} \right) = -0.0855 \cdot \frac{150}{2} = -6.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Da das Moment negativ ist, sind die Spannungen auch negativ. Im Abschnitt zwischen Zahnrad 2 und 3 lauten die Schubspannungen:

$$\tau_{23} = \frac{M_{t23}}{I_p} r = \frac{-M_1 + M_2}{I_p} r = \frac{-1.25 \cdot 10^6}{4.97 \cdot 10^7} r = -0.025 r$$

Die betragsmäßig maximalen Schubspannungen sind:

$$\tau_{23, \max} = \tau_{23} \left( r = \frac{D}{2} \right) = -0.025 \cdot \frac{150}{2} = -1.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Wieder existieren infolge des negativen inneren Moments negative Schubspannungen.

Zahnrad 2 hat gegenüber Zahnrad 1 die Verdrehung

$$\varphi_{12} = \frac{M_{t12} L}{G I_p} = \frac{-M_1 L}{G I_p} = \frac{-4.25 \cdot 10^6 \cdot 1000}{80000 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = -1.07 \cdot 10^{-3}$$

Zahnrad 3 hat gegenüber Zahnrad 2 die Verdrehung

$$\varphi_{23} = \frac{M_{t23} L}{G I_p} = \frac{(-M_1 + M_2) L}{G I_p} = \frac{-1.25 \cdot 10^6 \cdot 1000}{80000 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = -0.31 \cdot 10^{-3}$$

Die Gesamtverdrehung  $\varphi_{\text{ges}}$  zwischen Zahnrad 1 und 3 erhält man aus

$$\varphi_{\text{ges}} = \varphi_1 + \varphi_2 = -1.07 \cdot 10^{-3} - 0.31 \cdot 10^{-3} = -1.38 \cdot 10^{-3}$$

Dies entspricht einem Winkel von  $0.08^\circ$ .

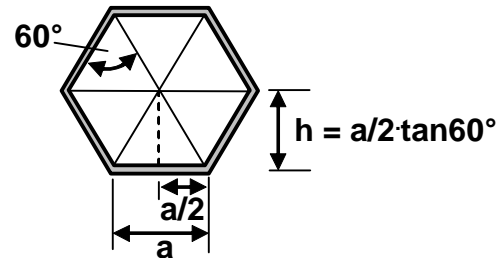
**Lösungen Aufgabe 48:**

Die Für das dünnwandige, geschlossene Profil unter Torsionsbelastung gilt:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m s} \Rightarrow A_m = \frac{M_t}{2\tau}$$

Die Fläche  $A_m$  kann zur Bestimmung von  $a$  in sechs gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden. Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich gemäß:

$$\frac{A_m}{6} = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} a \frac{a}{2} \tan 60^\circ = \frac{1}{2} a \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{A_m}{6}} = \sqrt{\frac{2A_m}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 \frac{M_t}{2\tau}}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{M_t}{3\sqrt{3}\tau}} = \sqrt{\frac{150000}{3\sqrt{3} \cdot 100 \cdot 3}} = 9.8 \text{ mm}$$

Für  $\tau$  ist die zulässige Schubspannung  $\tau_{zul}$  einzusetzen.

**Lösungen Aufgabe 49:**

Geschlossenes Profil:

Das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$  und das Torsionswiderstandsmoment  $W_t$  für das geschlossene Profil mit variabler Wandstärke muss berechnet werden.

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{du}{s(u)}} = \frac{(2A_m)^2}{\sum_{i=1}^4 \frac{U_i}{s_i}} = \frac{4a^2}{\frac{a}{2s} + \frac{a}{s} + \frac{a}{2s} + \frac{a}{s}} = \frac{4a^4}{\frac{a}{s} \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{4a^4}{\frac{a}{s} \cdot 3} = \frac{4}{3} a^3 s$$

$$W_t = 2A_m s_{\min} = 2a^2 s$$

Das zulässige Torsionsmoment  $M_{t,zul}$  und die zulässige Verdrehung  $\phi_{zul}$  resultieren aus:

$$M_{t,zul} = \tau_{zul} W_t = \tau_{zul} \cdot 2a^2 s = 40 \cdot 2 \cdot 200^2 \cdot 2 = 6.4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\phi_{zul} = \frac{M_{t,zul} L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} W_t L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} 2a^2 s L}{G \frac{4}{3} a^3 s} = 1.5 \frac{\tau_{zul} L}{Ga} = 1.5 \frac{40 \cdot 1000}{80000 \cdot 200} = 3.75 \cdot 10^{-3}$$

Der zulässige Winkel beträgt  $0.21^\circ$ .

Offenes Profil:

Das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$  und das Torsionswiderstandsmoment  $W_t$  für das offene Profil mit variabler Wandstärke muss berechnet werden.

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 U_i s_i^3 = \frac{1}{3} (a(2s)^3 + as^3 + a(2s)^3 + as^3) = \frac{as^3}{3} (8 + 1 + 8 + 1) = 6as^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{s_{\max}} = \frac{6as^3}{2s} = 3as^2$$

Das zulässige Torsionsmoment  $M_{t,zul}$  und die zulässige Verdrehung  $\varphi_{zul}$  resultieren aus den gleichen Berechnungsformeln wie beim geschlossenen Profil:

$$M_{t,zul} = \tau_{zul} W_t = \tau_{zul} \cdot 3as^2 = 40 \cdot 3 \cdot 200 \cdot 2^2 = 96000 \text{ Nmm}$$

$$\varphi_{zul} = \frac{M_{t,zul} L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} W_t L}{GI_t} = \frac{\tau_{zul} 3as^2 L}{G6as^3} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{zul} L}{Gs} = \frac{1}{2} \frac{40 \cdot 1000}{80000 \cdot 2} = 0.125$$

Der zulässige Winkel beträgt  $7.16^\circ$ .

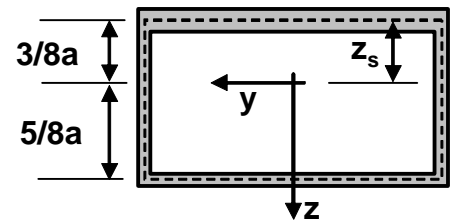
### Lösungen Aufgabe 50:

Durch die exzentrische Belastung des Balkens tritt neben der Biegung auch Torsion auf. Beide können getrennt betrachtet werden und anschließend superpositioniert (addiert) werden.

Flächenträgheitsmoment und Torsionsflächenträgheitsmoment:

Für die Berechnung der Biegespannung (Normalspannungen infolge des Biegemoments) wird vorab das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  berechnet. Das Profil hat unterschiedliche Wandstärken. Daher liegt der Schwerpunkt nicht in der geometrischen Mitte. Der Schwerpunkt berechnet sich von der Oberkante durch

$$z_s = \frac{0 \cdot 4as + \frac{a}{2} as + a2as + \frac{a}{2} as}{sa + 2as + sa + 4as} = \frac{3a^2 s}{8as} = \frac{3}{8} as$$



Bezüglich des Flächenschwerpunkts ergibt sich für das dünnwandige Profil folgendes Flächenträgheitsmoment  $I_y$ :

$$I_y = \underbrace{\frac{2a(2s)^3}{12} + \left(\frac{3a}{8}\right)^2 4as}_{\text{oberer Flansch}} + \underbrace{\frac{2as^3}{12} + \left(\frac{5a}{8}\right)^2 2as}_{\text{unterer Flansch}} + 2 \left[ \underbrace{\frac{sa^3}{12} + \left(\frac{a}{8}\right)^2 as}_{\text{seitliche Stege}} \right]$$

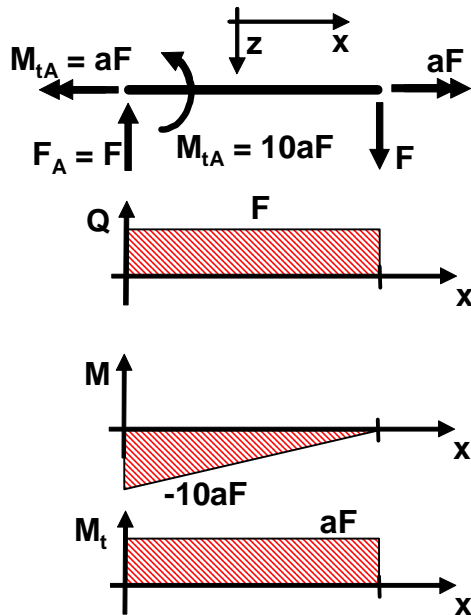
$$I_y = \frac{4as^3}{3} + \frac{36}{64} a^3 s + \frac{as^3}{6} + \frac{50}{64} a^3 s + \frac{as^3}{6} + \frac{a^3 s}{32} = \frac{37}{24} a^3 s + \underbrace{\frac{3}{2} as^3}_{\approx 0} = \frac{37}{24} a^3 s$$

Für die Berechnung der Torsionsspannungen (Schubspannungen infolge Torsionsmoments) benötigt man das Torsionswiderstandsmoment  $W_t$ . Man erhält es beim geschlossenen Profil aus:

$$W_t = 2A_m s_{\min} = 2 \cdot 2aas = 4a^2 s$$



Innere Kräfte und Momente:

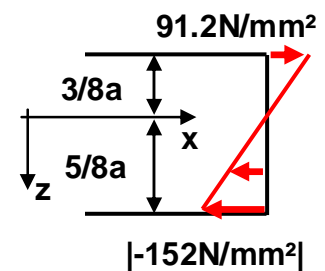


Die Wirkung der Kraft  $F$  auf das Bauteil muss für die Berechnung durch die Kraft  $F$  und durch ein positives Moment  $aF$  dargestellt werden. Dabei ist  $a$  der Hebelarm der Kraft  $F$  in Bezug zum Flächenmittelpunkt. Die Kraft versucht das Bauteil positiv um die  $x$ -Achse zu drehen, daher ist das zu verwendende Moment auch positiv.

Normalspannungen infolge Biegemoment und Schubspannungen infolge Torsionsmoment:

Die betragsmäßig größten Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  infolge des Biegemoments erhält man für den betragsmäßig größten möglichen  $z$ -Abstand,  $z_{\max} = 5/8a$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} z_{\max} = \frac{-10aF}{\frac{37}{24}a^3s} \cdot \frac{5}{8}a = \frac{-150F}{37as} = \frac{-150 \cdot 3000}{37 \cdot 40 \cdot 2} = -152 \frac{N}{\text{mm}^2}$$



Man erhält an der Profilunterseite mit  $z = +5/8a$  die maximalen Druckspannungen.

$$\sigma_{\max, \text{Druck}} = \sigma_{\max, \text{Druck}} = -152 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

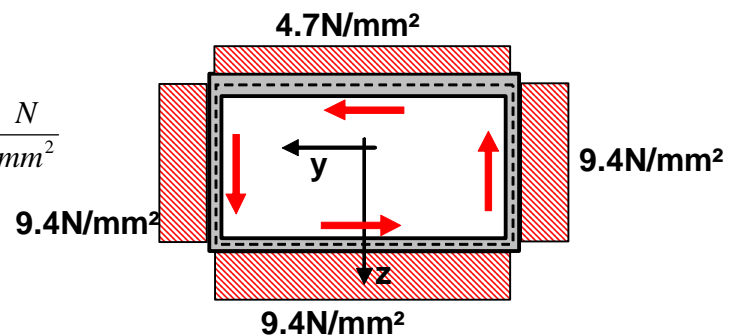
Für die maximalen Zugspannungen an der Oberseite muss man  $z = -3/8a$  verwenden.

$$\sigma_{\max, \text{Zug}} = \frac{M_{\max}}{I_y} \left(-\frac{3}{8}a\right) = \frac{-10aF}{\frac{37}{24}a^3s} \left(-\frac{3}{8}a\right) = \frac{-150F}{37as} = \frac{-90 \cdot 3000}{37 \cdot 40 \cdot 2} = 91.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Die maximale Schubspannung  $\tau_{\text{Torsion}}$  infolge Torsionsmoment erhält man mit:

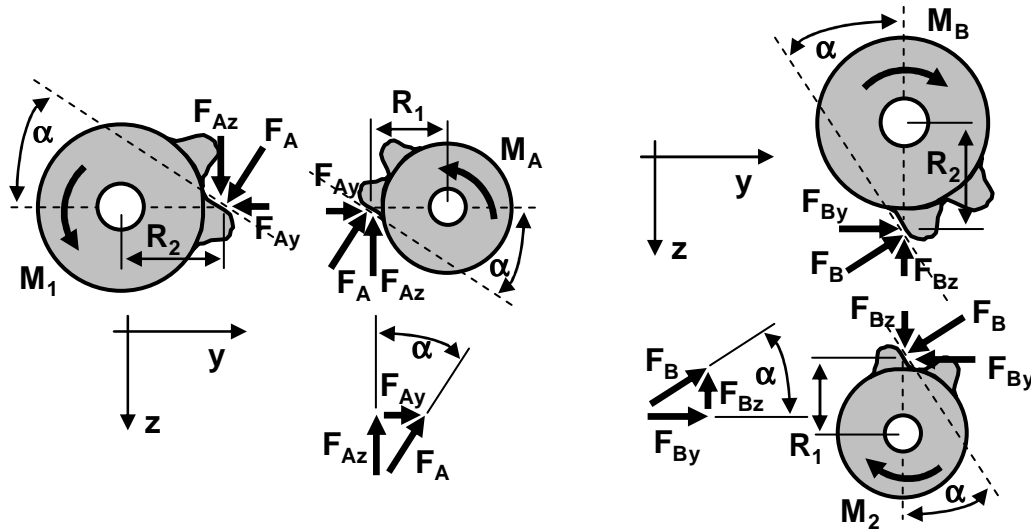
$$\tau_{\text{Torsion}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{aF}{4a^2s} = \frac{F}{4as} = \frac{3000}{4 \cdot 40 \cdot 2} = 9.375 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Die Schubspannung ist bereichsweise konstant. Da an der Oberseite die doppelte Wandstärke vorhanden ist, halbiert sich dort die Schubspannung. Die Pfeile geben die positive Wirkrichtung der Schubspannung an.



**Lösungen Aufgabe 51:**

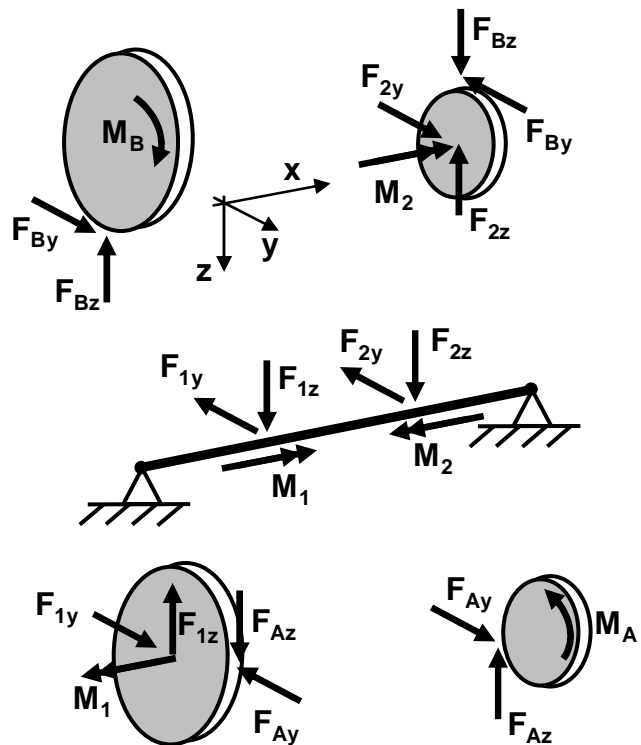
Da die Berührflächen der Zähne geneigt sind, wirken zwischen den Zähnen nicht nur Kräfte in Umfangsrichtung, sondern auch in radialer Richtung. Die Kräfte  $F_A$  und  $F_B$  stehen senkrecht auf den Berührflächen. Daraus ergeben sich die dargestellten Kräfte in Umfangsrichtung und in radialer Richtung, die aus der Zerlegung der Kontaktkräfte  $F_A$  und  $F_B$  resultieren.



$$\frac{F_{Ay}}{F_{Az}} = \tan \alpha \Rightarrow F_{Ay} = F_{Az} \tan \alpha = 0.75 F_{Az}$$

$$\frac{F_{Bz}}{F_{By}} = \tan \alpha \Rightarrow F_{Bz} = F_{By} \tan \alpha = 0.75 F_{By}$$

Für die Berechnung der an der Welle angreifenden Kräfte und Momente wird die Gesamterlegung der Getriebestufe dargestellt.



Betrachtung der unteren rechten kleinen Rolle, A ist deren Mittelpunkt:

$$\sum M_x|_A = 0: -M_A + R_1 F_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = \frac{M_A}{R_1} = \frac{15000}{25} = 600N$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ay} = 0.75 F_{Az} = 450N$$

Analyse der großen Rolle an der mittleren Welle:

$$\sum M_x|_1 = 0: -M_1 + R_2 F_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = R_2 F_{Az} = 50 \cdot 600 = 30000Nmm$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{1y} - F_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1y} = F_{Ay} = 450N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{1z} + F_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1z} = F_{Az} = 600N$$

Betrachtung der Welle:

$$\sum M_x|_1 = 0: \quad M_1 - M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_1 = 30000Nmm$$

Die verbleibenden fehlenden Kräfte der Wellen können noch nicht ermittelt werden.

Analyse der großen Rolle an der mittleren Welle:

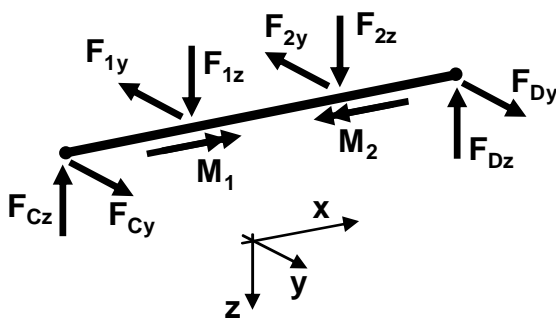
$$\sum M_x|_2 = 0: \quad M_2 - R_1 F_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = \frac{M_2}{R_1} = \frac{30000}{25} = 1200N$$

$$\Rightarrow \quad F_{Bz} = 0.75 F_{By} = 900N$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{2y} - F_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2y} = F_{By} = 1200N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{2z} + F_{Bz} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2z} = F_{Bz} = 900N$$

Damit sind bis auf die Lagerkräfte alle Kräfte und Momente bekannt, die an der zu untersuchenden Welle angreifen. Für die Lagerkraftberechnung werden die Lager durch die entsprechenden Kräfte ersetzt. Da keine Kräfte außerhalb der Lager in x-Richtung wirken, werden auch keine Lagerkräfte  $F_{Cx}$  und  $F_{Dx}$  eingezeichnet.



$$\sum M_y|_C = 0: \quad -L F_{1z} - 2L F_{2z} + 3L F_{Dz} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Dz} = \frac{F_{1z} + 2F_{2z}}{3} = \frac{600 + 2 \cdot 900}{3} = 800N$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Cz} + F_{1z} + F_{2z} - F_{Dz} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Cz} = F_{1z} + F_{2z} - F_{Dz} = 700N$$

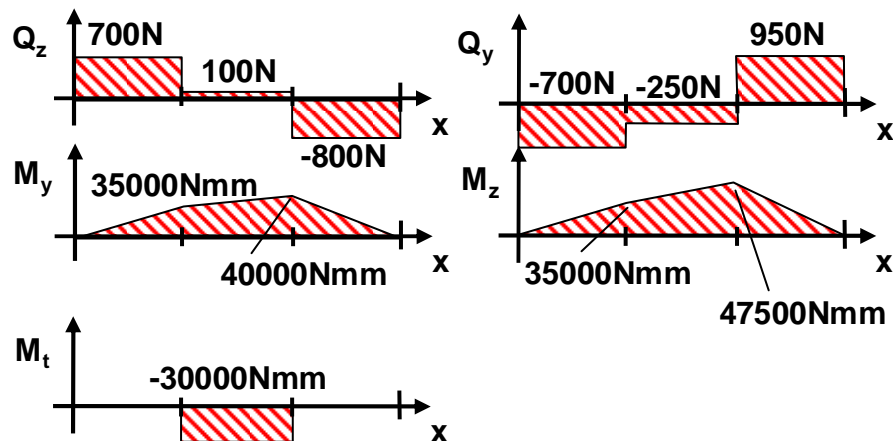
$$\sum M_z|_C = 0: \quad -L F_{1y} - 2L F_{2y} + 3L F_{Dy} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Dy} = \frac{F_{1y} + 2F_{2y}}{3} = \frac{450 + 2 \cdot 1200}{3} = 950N$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Cy} - F_{1y} - F_{2y} + F_{Dy} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Cy} = F_{1y} + F_{2y} - F_{Dy} = 700N$$

Innere Kräfte und Momente in der Welle:



Da sich beide Maximalbiegemomente  $M_{y\max} = 40000\text{Nmm}$  und  $M_{z\max} = 47500\text{Nmm}$  an der gleichen Position  $x = 2L$  befinden, sind auch an dieser Position die maximalen Normalspannungen infolge Biegemoment. Für die Berechnung dieser maximalen Normalspannungen kann bei kreisrunden Profilen das Gesamtmoment verwendet werden.

$$M_{ges} = \sqrt{M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2} = \sqrt{40000^2 + 47500^2} = 62099\text{Nmm}$$

Für die Spannungsberechnung benötigt man das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  und das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$ .

$$I_y = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{64} D^4 = \frac{\pi}{64} 20^4 = 7854\text{mm}^4$$

$$I_t = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4 = 2I_y = \frac{\pi}{32} 20^4 = 15708\text{mm}^4$$

Betrag der maximalen Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{ges}}{I_y} \frac{D}{2} = \frac{62099}{7854} \frac{20}{2} = 79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Betrag der maximalen Schubspannungen  $\tau_{\max}$  infolge des Torsionsmoments:

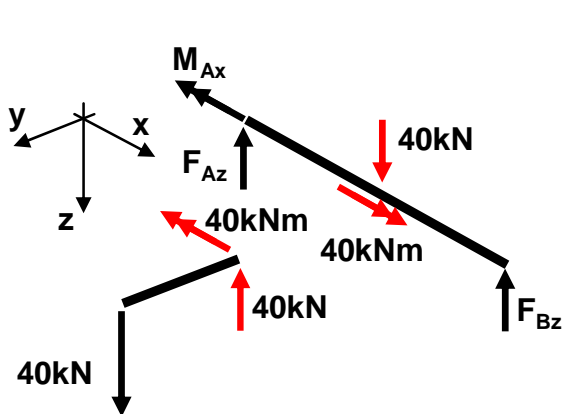
$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|}{I_t} \frac{D}{2} = \frac{|-30000|}{15708} \frac{20}{2} = 19 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Vergleichsspannung  $\sigma_v$  nach Mises:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{79^2 + 3 \cdot 19^2} = 86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

### Lösungen Aufgabe 52:

Für die Berechnung der Lagerkräfte werden der Balken und der Hebel frei geschnitten. Die notwendigen Schnittkräfte sind in der Skizze dargestellt. Es sind nur die Lagerkräfte ungleich null eingezeichnet.



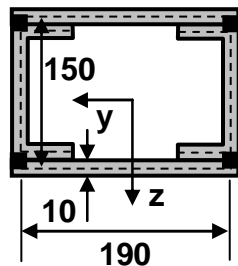
$$\begin{aligned} \sum M_x|_A = 0: & -M_{Ax} + 40 = 0 \\ \Rightarrow & M_{Ax} = 40 \text{ kNm} \\ \sum M_y|_A = 0: & -2.4 \cdot 40 + 4F_{Bz} = 0 \\ \Rightarrow & F_{Bz} = 24 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0: & -F_{Az} + 40 - F_{Bz} = 0 \\ \Rightarrow & F_{Az} = 16 \text{ kN} \end{aligned}$$

Innere Kräfte und Momente im zu untersuchenden Balken:



Für die Berechnung der Spannungen infolge Torsion und Querkraft muss, das Profil als dünnwandig betrachtet werden. Infolge dessen wird es auch bei der Berechnung der Spannungen infolge des Biegemoments als dünnwandig betrachtet.

### Spannungsbetrachtung und Schweißnahtschubfluss am Querschnitt C:



Für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments benötigt man das Flächenträgheitsmoment. Da am Querschnitt C das Profil symmetrisch zur waagrechten Mittellinie ist, liegt auf dieser der Gesamtflächenmittelpunkt.

$$I_y = 2 \cdot 75^2 \cdot 190 \cdot 10 + 2 \cdot 48 \cdot 10^5 = 3.1 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Bei der Berechnung des Torsionswiderstandsmoments stellen die Flanken des U-Profils ein offenes Profil dar. Da offene Profile im Verhältnis zu geschlossenen Profilen bei der Torsion eine deutlich geringere Steifigkeit besitzen, können die Flanken bei der Berechnung der Torsionsbelastungen vernachlässigt werden. Somit resultiert für die Torsionsberechnung ein geschlossenes Rechteckprofil mit der Breite 190mm und der Höhe 150mm.

$$W_t = 2A_m s = 2 \cdot 190 \cdot 150 \cdot 10 = 5.7 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

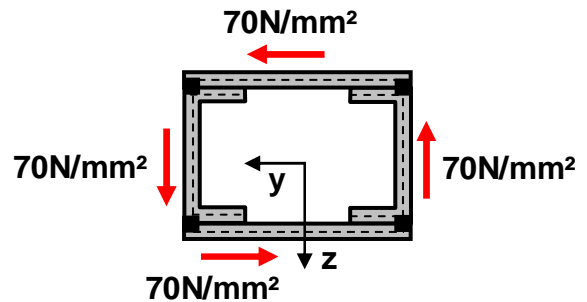
Die Schubspannungen infolge des Torsionsmoments sind über dem ganzen Querschnitt konstant. Da die Normalspannungen infolge des Biegemoments bei einem gestreckten Balken gegenüber der Schubspannung infolge Querkraft überwiegen, ist die maximale Vergleichsspannung  $\sigma_{\max}$  am Ort der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments. Dies ist in den Bauteilober- und -unterseiten. Innerhalb dieser Bereiche ist in den Eckpunkten die Schubspannungen infolge Querkraft am größten, daher sind in den Ecken, wo sich die Schubspannungen infolge Torsionsmoment und Querkraft addieren, die maximalen Vergleichsspannungen.

Maximale Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  infolge des Biegemoments:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max} = \frac{38.4 \cdot 10^6}{3.1 \cdot 10^7} 75 = 93 \frac{N}{mm^2}$$

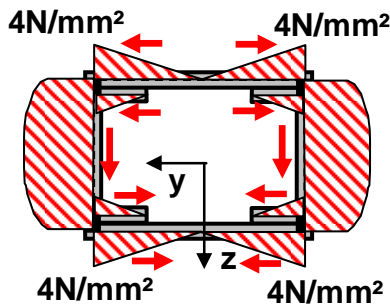
Konstant Schubspannung  $\tau_{Torsion}$  infolge des Torsionsmoments:

$$\tau_{Torsion} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{40 \cdot 10^6}{5.7 \cdot 10^5} = 70 \frac{N}{mm^2}$$



Für die Berechnung der Schubspannungen infolge Querkraft in den Eckpunkten wird das dortige statische Moment  $S_y$  benötigt. Dazu muss der halbe Flächeninhalt des oberen Flansches mit dessen Schwerpunktskoordinate multipliziert werden.

$$S_y = 75 \cdot \frac{190 \cdot 10}{2} = 71250 mm^3$$



Die Schubspannung infolge Querkraft in den Eckpunkten beträgt somit:

$$\tau_{Querkraft} = \frac{Q}{I_y s} S_y = \frac{16000}{3.1 \cdot 10^7 \cdot 10} \cdot 71250 = 3.7 = 4 \frac{N}{mm^2}$$

Die Wirkrichtung der Schubspannung infolge der Querkraft ist in der Skizze dargestellt. Da die genauen Abmessungen des U-Profiles nicht bekannt sind, können die

Statischen Momente im U-Profil nicht angegeben werden. Lediglich die Aussage, dass auf Höhe des Gesamtflächenmittelpunkts, das Maximum zu finden ist, kann gemacht werden. Betrachtet man den Verlauf der Schubspannungen infolge Torsionsmoment und Querkraft stellt man fest, dass diese sich in den linken Ecken addieren, wodurch dort die maximalen Gesamtschubspannungen  $\tau_{\max}$  innerhalb des oberen oder unteren Flansches anzutreffen sind.

$$\tau_{\max} = \tau_{Torsion} + \tau_{Querkraft} = 70 + 4 = 74 \frac{N}{mm^2}$$

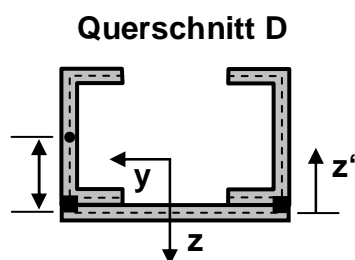
Maximale Vergleichsspannung  $\sigma_{\max}$ :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{93^2 + 3 \cdot 74^2} = 158 \frac{N}{mm^2}$$

Den maximalen Schubfluss  $q_{\max}$  innerhalb der Schweißnähte findet man in den linken.

$$q = \tau_{\max} s = 74 \cdot 10 = 740 \frac{N}{mm}$$

Spannungsbetrachtung und Schweißnahtschubfluss am Querschnitt D:



Für die Berechnung der Normalspannungen infolge des Biegemoments benötigt man das Flächenträgheitsmoment. Da am Querschnitt D das Profil nicht symmetrisch zu einer Waagrechten ist, muss vorab die Lage des Gesamtflächenmittelpunkts  $z_s'$  bestimmt werden. Dazu wird das Bezugskordinatensystem  $z'$  eingeführt.

$$z'_s = \frac{0 \cdot 190 \cdot 10 + 2 \cdot 75 \cdot 2000}{190 \cdot 10 + 2 \cdot 2000} = 51 \text{ mm}$$

Mit  $z'_s$  kann das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  ermittelt werden.

$$I_y = 51^2 \cdot 190 \cdot 10 + 2 \cdot 48 \cdot 10^5 + 2 \cdot (51 - 75)^2 \cdot 2000 = 1.7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Das statische Moment  $S_y$  in den oberen Eckpunkten kann nicht bestimmt werden. Da der unteren ecken kann vom Querschnitt C übernommen werden.

Betrag der Normalspannungen infolge des Biegemoments an der Bauteilunterseite:

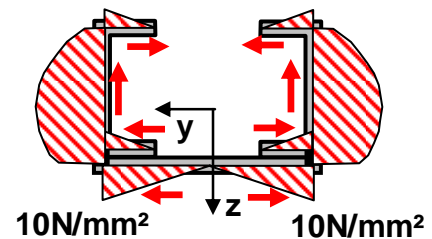
$$\sigma_{\text{max,unten}} = \frac{M_y}{I_y} |z_{\text{max}}| = \frac{38.4 \cdot 10^6}{1.7 \cdot 10^7} \cdot 51 = 115 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Betrag der Normalspannungen infolge des Biegemoments an der Bauteiloberseite:

$$\sigma_{\text{max,oben}} = \frac{M_y}{I_y} |z_{\text{max}}| = \frac{38.4 \cdot 10^6}{1.7 \cdot 10^7} |51 - 150| = 223 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Das Torsionsmoment ist gleich null, somit auch die Spannungen infolge des Torsionsmoments. Der Betrag der Schubspannungen infolge der Querkraft an den unteren Ecken lautet:

$$\tau_{\text{Querkraft}} = \frac{Q}{I_y} S_y = \frac{24000}{1.7 \cdot 10^7 \cdot 10} \cdot 71250 = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Der Verlauf der Schubspannung infolge Querkraft kann der Skizze entnommen werden. An der Oberseite können die Schubspannungen infolge Querkraft nicht angegeben werden. Sie sind größer wie null und kleiner als  $10 \text{ N/mm}^2$ . Somit gilt für die Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{max,oben}}$  an der Oberseite:

$$\sigma_{v,\text{oben}} > \sqrt{\sigma_{\text{max,oben}}^2 + 3 \cdot 0^2} = 223 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

An der Unterseite lautet die Vergleichsspannung  $\sigma_{\text{max,unten}}$ :

$$\sigma_{v,\text{unten}} = \sqrt{\sigma_{\text{max,unten}}^2 + 3 \cdot 10^2} = \sqrt{115^2 + 3 \cdot 10^2} = 116 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Der Schubfluss  $q_{\text{max}}$  innerhalb der Schweißnähte lautet:

$$q = \tau_{\text{max}} s = 10 \cdot 10 = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

### Lösungen Aufgabe 53:

Beim ausgefahrenen Gestänge muss nur die Biegung und keine Torsion berücksichtigt werden. Beim angewinkelten Gestänge wird die Biegung durch die Torsion überlagert. Für die Torsion muss das Profil dünnwandig betrachtet werden. Daher wird es auch bei der Biegung als dünnwandig betrachtet. Neben dem Flächenträgheitsmoment  $I_y$  benötigt man die Fläche  $A_m$  der Profilmittellinie, den Umfang  $U$  entlang der Profilmittellinie, das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$  und das Torsionswiderstandsmoment  $W_t$ .

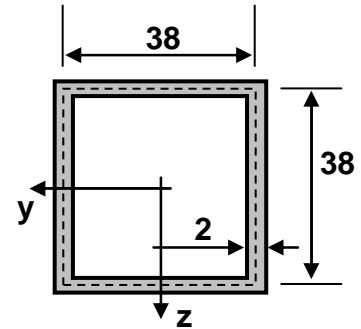
$$I_y = 2 \frac{2 \cdot 38^3}{12} + 2 \cdot 19^2 \cdot 76 = 73163 \text{ mm}^4$$

$$A_m = 38^2 = 1444 \text{ mm}^2$$

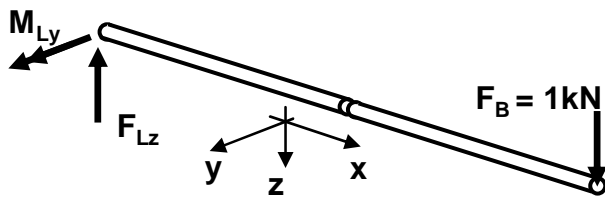
$$U = 4 \cdot 38 = 152$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{du}{s}} = \frac{4A_m^2}{\frac{U}{s}} = \frac{4A_m^2 s}{U} = \frac{4 \cdot 1444^2 \cdot 2}{152} = 109744$$

$$W_t = 2A_m s = 2 \cdot 1444 \cdot 2 = 5776 \text{ mm}^3$$



Gestrecktes Gestänge:

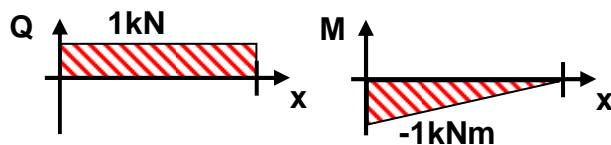


$$\sum M_y|_L = 0: M_{Ly} - 1F_B = 0$$

$$\Rightarrow M_{Ly} = 1 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Lz} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{Lz} = 1 \text{ kN}$$



Für die Berechnung der Absenkung  $u$  des Kraftangriffspunktes muss am Kraftangriffspunkt die Einheitskraft angebracht werden. Die resultierenden Schaubilder  $M_E$  können aus den

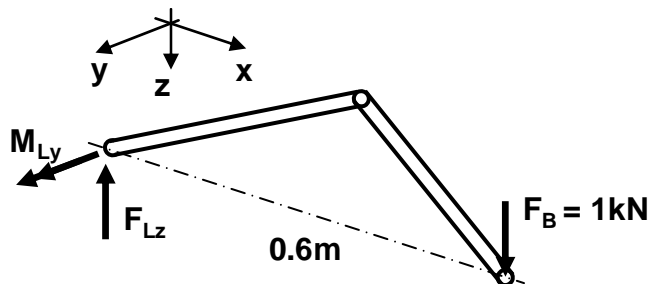
dargestellten Schaubildern  $M = M_B$  übernommen werden, wenn alle Größen durch 1 kN geteilt werden.

$$u = \int_L \frac{M_B M_E}{EI_y} dx = \frac{(-1 \cdot 10^6)(-1 \cdot 10^3) \cdot 1000}{3 \cdot 200000 \cdot 73163} = 22.8 \text{ mm}$$

Der Betrag der maximalen Normalspannung infolge des Biegemomentes, die identisch ist zur maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_{\max}$  lautet:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{I_y} z_{\max} = \frac{10^6}{73163} 19 = 260 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Angewinkeltes Gestänge:



Am Gesamtgestänge werden die Lagerkraft und das Lagermoment bestimmt.

$$\sum M_y|_L = 0: M_{Ly} - 0.6F_B = 0$$

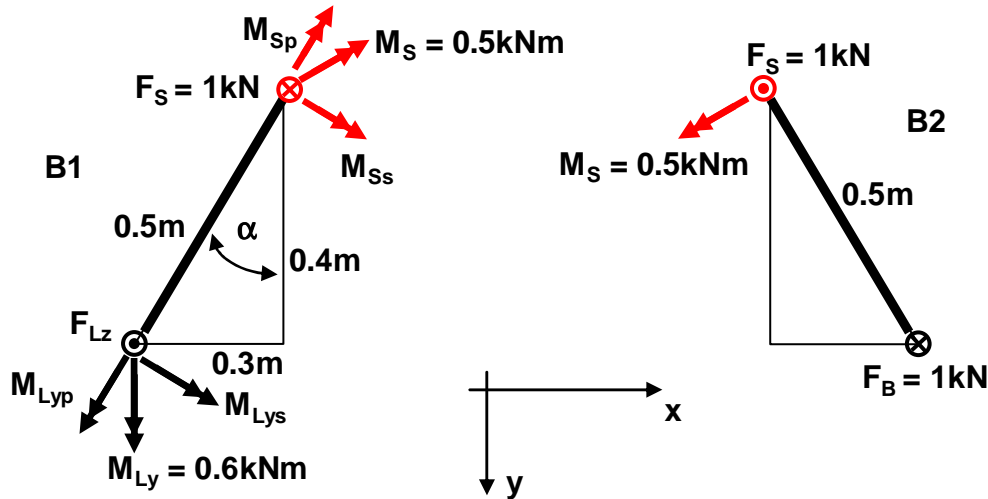
$$\Rightarrow M_{Ly} = 0.6 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Lz} + 1 = 0$$

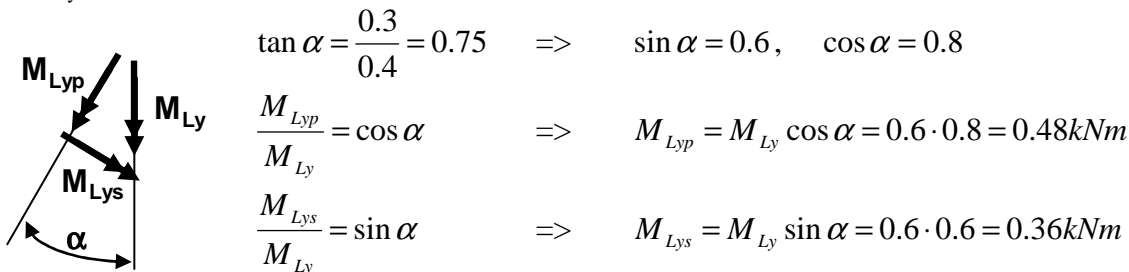
$$\Rightarrow F_{Lz} = 1 \text{ kN}$$



Anschließend muss das Gesamtbauteil in zwei gerade Balken zerlegt werden. Dazu ist es sinnvoll, das zerlegte Bauteil in der xy-Ebene darzustellen. Das Lagermoment  $M_{Ly}$  muss in eine Komponente  $M_{Lyp}$  in Richtung und in eine Komponente  $M_{Lys}$  quer zum Balken B1 zerlegt werden. Am Balken B2 erkennt man, dass ein Moment  $M_S$  quer zum Balken wirksam sein muss. Überträgt man dieses Schnittmoment auf den Balken B1, so muss auch dieses in zwei Komponenten zerlegt werden. Ein Kreis mit Punkt symbolisiert eine aus der Ebene zeigende Kraft, ein Kreis mit Kreuz eine Kraft, die in die Ebene zeigt.



Alle Schnittkräfte haben den Betrag 1kN. Anhand des geometrischen Dreiecks, welches vom Balken B1 aufgespannt wird, kann man den Winkel  $\alpha$  des Momentendreiecks  $M_{Ly}$ ,  $M_{Lyp}$  und  $M_{Lys}$  erkennen.

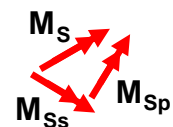


Die äußere Belastung  $F_B$  erzeugt am Balken B2 ein Schnittmoment  $M_S = 0.5 \text{ kNm}$ . Dies kann man mit umgekehrter Orientierung auf den Balken B1 übertragen. Am Balken B1 sind zwei Momente  $M_{Lyp}$  und  $M_{Sp}$  um die Balkenachse wirksam. Daher wird das Momentengleichgewicht um die Balkenachse (lokale x-Achse) gebildet um die Komponente  $M_{Sp}$  zu bestimmen.

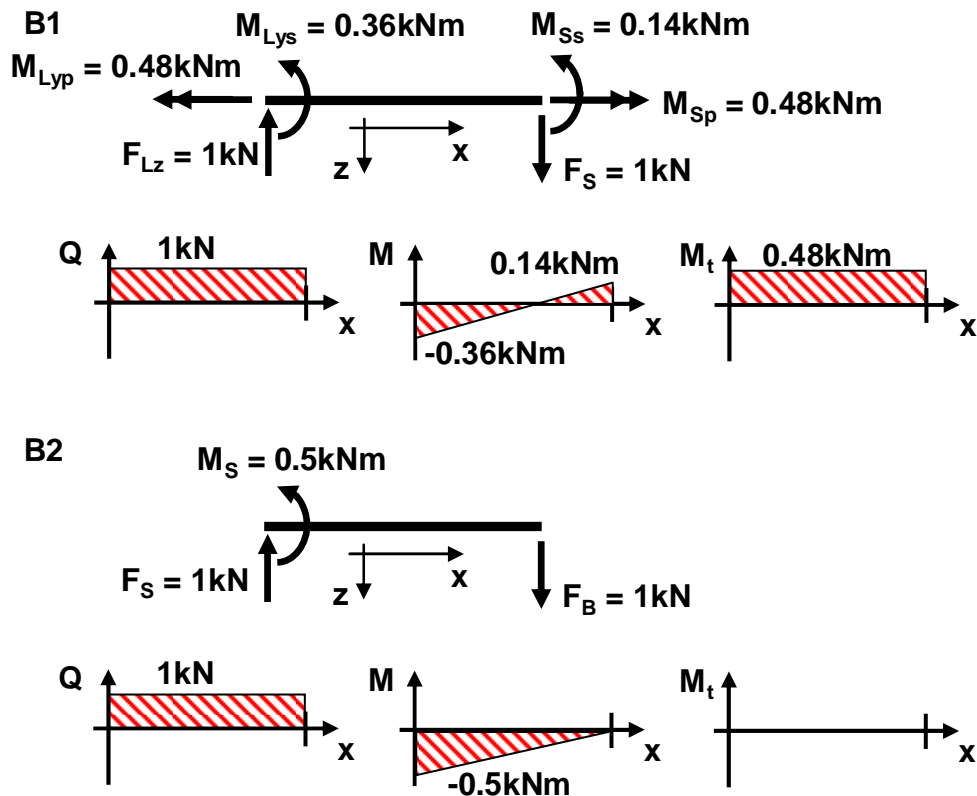
$$\sum M_{x, \text{lokal}} \Big|_L = 0: \quad -M_{Lyp} + M_{Sp} = 0 \Rightarrow M_{Sp} = M_{Lyp} = 0.48 \text{ kNm}$$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann die Komponente  $M_{Ss}$  ermittelt werden.

$$M_S = \sqrt{M_{Sp}^2 + M_{Ss}^2} \Rightarrow M_{Ss} = \sqrt{M_S^2 - M_{Sp}^2} = \sqrt{0.5^2 - 0.48^2} = 0.14 \text{ kNm}$$



Innere Kräfte und Momente:



Für die Berechnung der Absenkung  $u$  des Kraftangriffspunktes muss am Kraftangriffspunkt die Einheitskraft angebracht werden. Die resultierenden Schaubilder  $M_E$  können aus den dargestellten Schaubildern  $M = M_B$  übernommen werden, wenn alle Größen durch  $1\text{ kN}$  geteilt werden.

$$\begin{aligned}
 u &= \int_L \frac{M_B M_E}{EI_y} dx + \int_L \frac{M_{tB} M_{tE}}{GI_t} dx \\
 &= \frac{1}{200000 \cdot 73163} \frac{500 \left( -0.36 \cdot 10^6 \left( 2 \left( -0.36 \cdot 10^3 \right) + 0.14 \cdot 10^3 \right) + 0.14 \cdot 10^6 \left( -0.36 \cdot 10^3 + 2 \cdot 0.14 \cdot 10^3 \right) \right)}{6} \\
 &+ \frac{1}{200000 \cdot 73163} \frac{500 \cdot \left( -0.5 \cdot 10^6 \right) \left( -0.5 \cdot 10^3 \right)}{3} \\
 &+ \frac{1}{80000 \cdot 109744} 500 \cdot 0.48 \cdot 10^6 \cdot 0.48 \cdot 10^3 \\
 &= 1.13 + 2.85 + 13.12 = 17.1 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Maximale Spannung im B1:

Im Balken B1 sind die maximalen Beträge der Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  infolge des Biegemomentes am Balkenanfang. Die Torsionsspannungen  $\tau_{\max}$  sind über den ganzen Balken konstant.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{I_y} z_{\max} = \frac{0.36 \cdot 10^6}{73163} 19 = 93 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|}{W_t} = \frac{0.48 \cdot 10^6}{5776} = 83 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Daraus resultiert im Balken B1 die folgende maximale Vergleichsspannung  $\sigma_v$ :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{93^2 + 3 \cdot 83^2} = 171 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Maximale Spannung im B2:

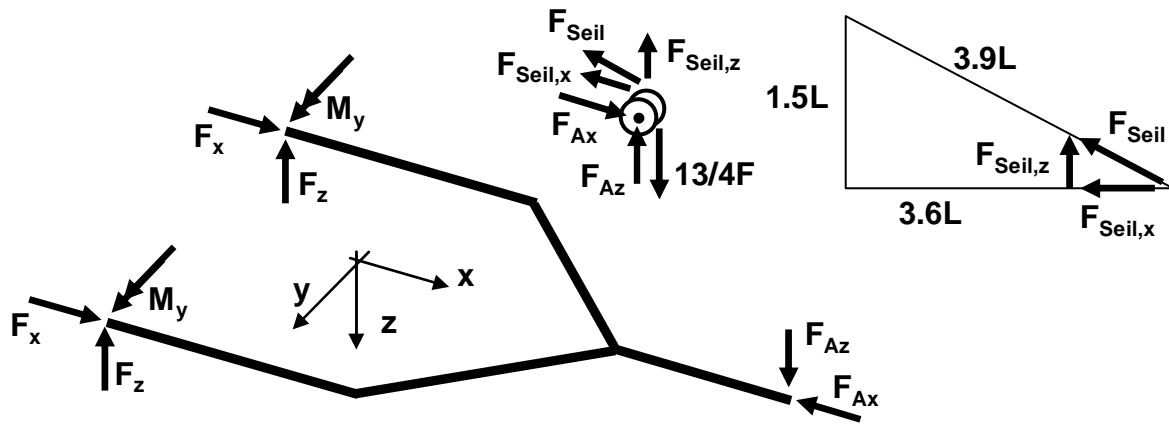
Der Betrag der maximalen Normalspannung infolge des Biegemomentes ist identisch zur maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_{\max}$ , da keine Schubspannungen infolge Torsion vorhanden sind:

$$\sigma_v = \sigma_{\max} = \frac{|M|}{I_y} z_{\max} = \frac{0.5 \cdot 10^6}{73163} 19 = 130 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Somit liegt am Lagerungspunkt des Gestänges die am stärksten belastete Stelle.

**Lösungen Aufgabe 54:**

Zu Beginn werden der Rahmen und die Rolle frei geschnitten. Die dargestellten Schnittkräfte sind einzutragen.



Wegen der reibungsfreien Rolle muss die Seilkraft gleich der Gewichtskraft der Last sein. Dies ergibt das Gleichgewicht der Momente an der Rolle.

$$\sum M_y|_A = 0: -R \frac{13}{4} F + R F_{Seil} = \Rightarrow F_{Seil} = \frac{13}{4} F$$

Für die Kräftebilanzen muss die Seilkraft in ihre Komponenten zerlegt werden.

$$\frac{F_{Seil,x}}{F_{Seil}} = \frac{3.6}{3.9} = \frac{12}{13} \Rightarrow F_{Seil,x} = \frac{12}{13} F_{Seil} = \frac{12}{13} \frac{13}{4} F = 3F$$

$$\frac{F_{Seil,z}}{F_{Seil}} = \frac{1.5}{3.9} = \frac{5}{13} \Rightarrow F_{Seil,z} = \frac{5}{13} F_{Seil} = \frac{5}{13} \frac{13}{4} F = \frac{5}{4} F$$

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - F_{Seil,x} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = F_{Seil,x} = 3F$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} - F_{Seil,z} + \frac{13}{4} F = 0 \Rightarrow F_{Az} = \frac{13}{4} F - F_{Seil,z} = 2F$$

Mit den bekannten Kräften  $F_{Ax}$  und  $F_{Az}$  können am Rahmen die Lagergrößen berechnet werden.

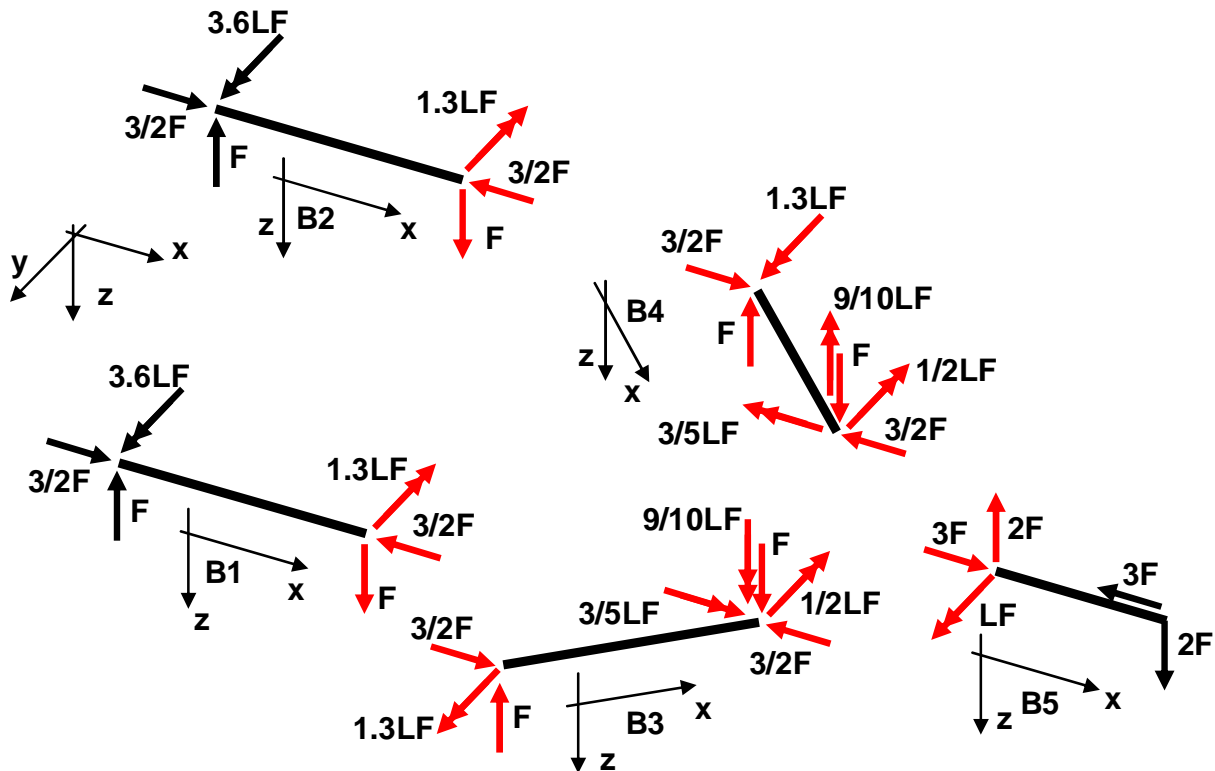
$$\sum F_x = 0: 2F_x - F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_x = \frac{1}{2} F_{Ax} = \frac{3}{2} F$$

$$\sum F_z = 0: -2F_z + F_{Az} = 0 \Rightarrow F_z = \frac{1}{2} F_{Az} = F$$

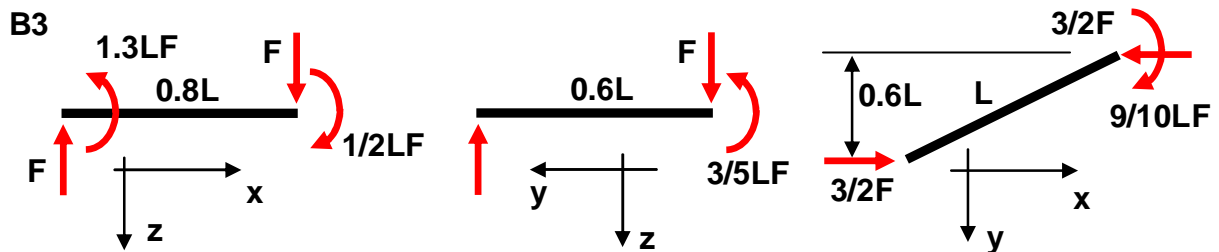
$$\sum M_y|_{Lager} = 0: 2M_z - 3.6L F_{Az} = 0 \Rightarrow M_z = 1.8L F_{Az} = 3.6LF$$

Die restlichen Gleichgewichte müssen nicht ausgewertet werden, da die daraus resultierenden Größen gleich null sind.

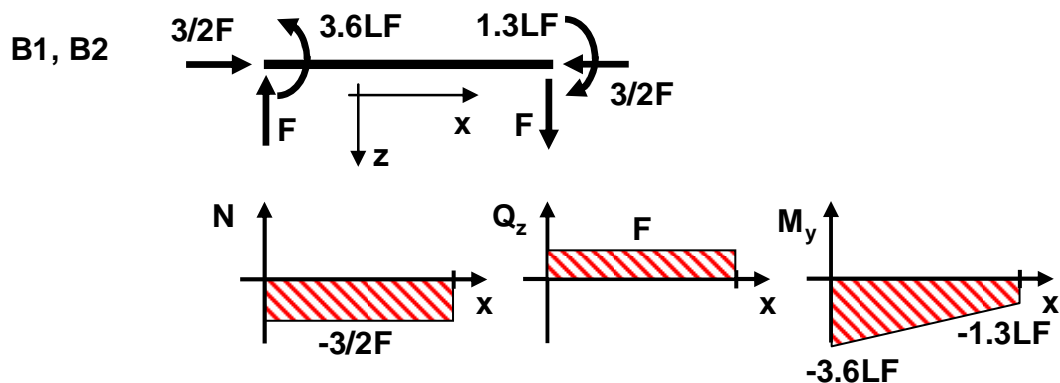
Zerlegung des Trägers in fünf gerade Balken:



Für die Berechnung der Schnittgrößen am Teilbalken B3 ist es sinnvoll, wenn man den Balken in die drei globalen Ebenen xz, yz und xy projiziert. Für den Balken kann analog vorgegangen werden.

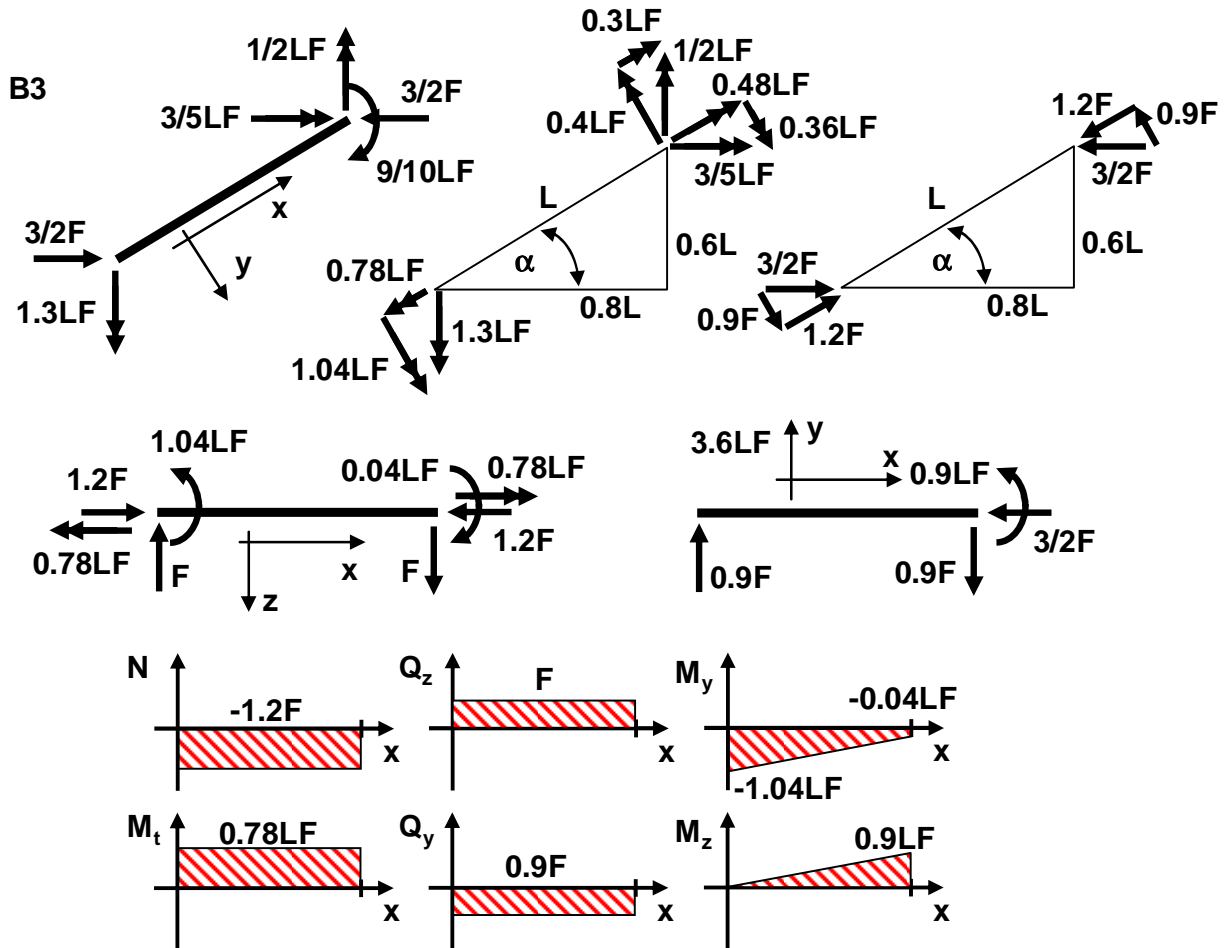


Innere Kräfte und Momente in den identischen Balken B1 und B2:



Innere Kräfte und Momente am Balken B3:

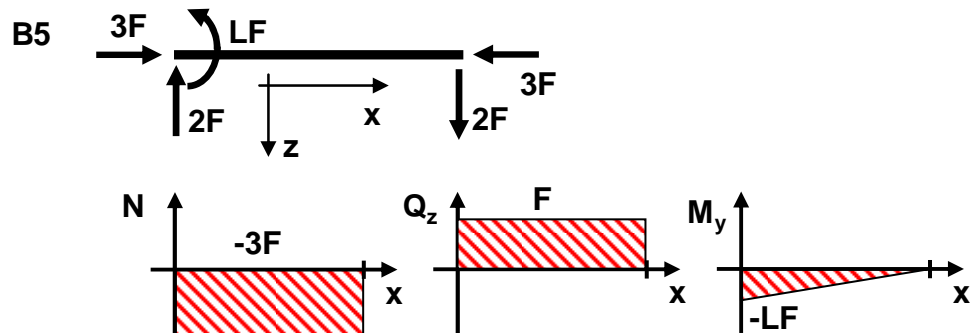
Die Kraft  $3/2F$  und die Momente  $1.3LF$ ,  $3/5LF$  und  $1/2LF$  zeigen weder in Balkenrichtung noch quer zum Balken. Daher müssen die entsprechenden Größen zerlegt werden. Dazu ist es hilfreich, den Balken in das lokale  $xy$ -Koordinatensystem zu projizieren.



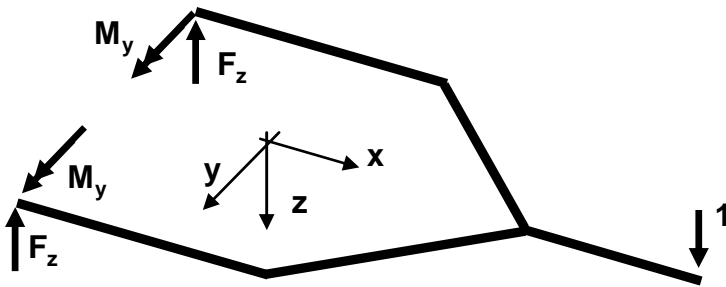
Innere Kräfte und Momente am Balken B4:

Das Bauteil und die Belastung sind symmetrisch. Daher sind die inneren Größen im Balken B4 symmetrisch zu den Größen im Balken B3. Bei der Verschiebungsberechnung kann der Balken B4 berücksichtigt werden, indem die Größen des Balkens B3 doppelt verwendet werden.

Innere Kräfte und Momente am Balken B5:



Für die Berechnung der senkrechten Absenkung des rechten Endes des Trägers muss dort eine Einheitskraft angebracht werden.



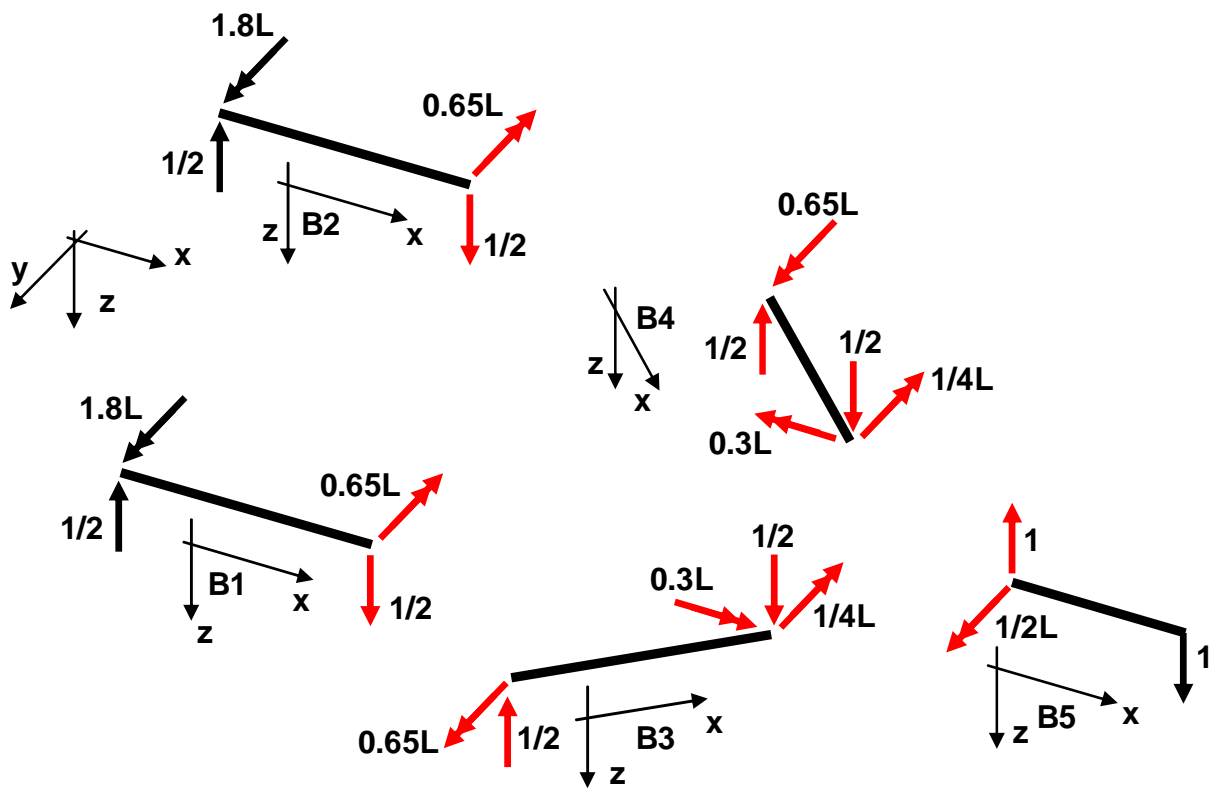
$$\sum F_z = 0: \quad -2F_z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{1}{2}$$

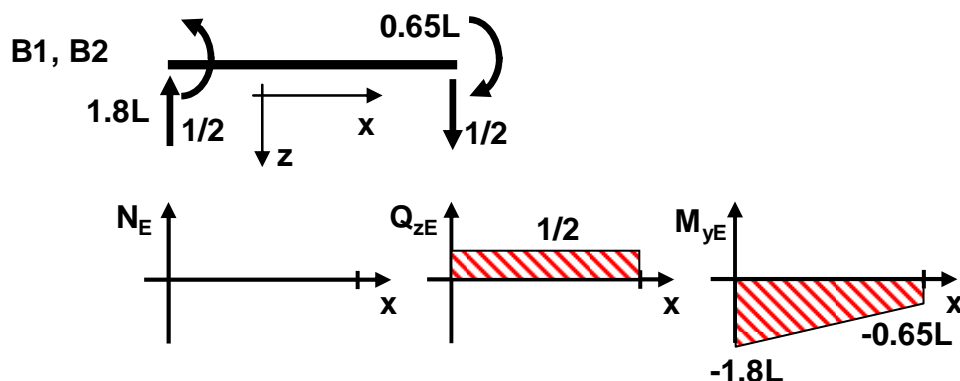
$$\sum M_y|_{Lager} = 0: \quad 2M_z - 3.6 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow M_z = 1.8L$$

Zerlegung des Trägers in fünf gerade Balken:

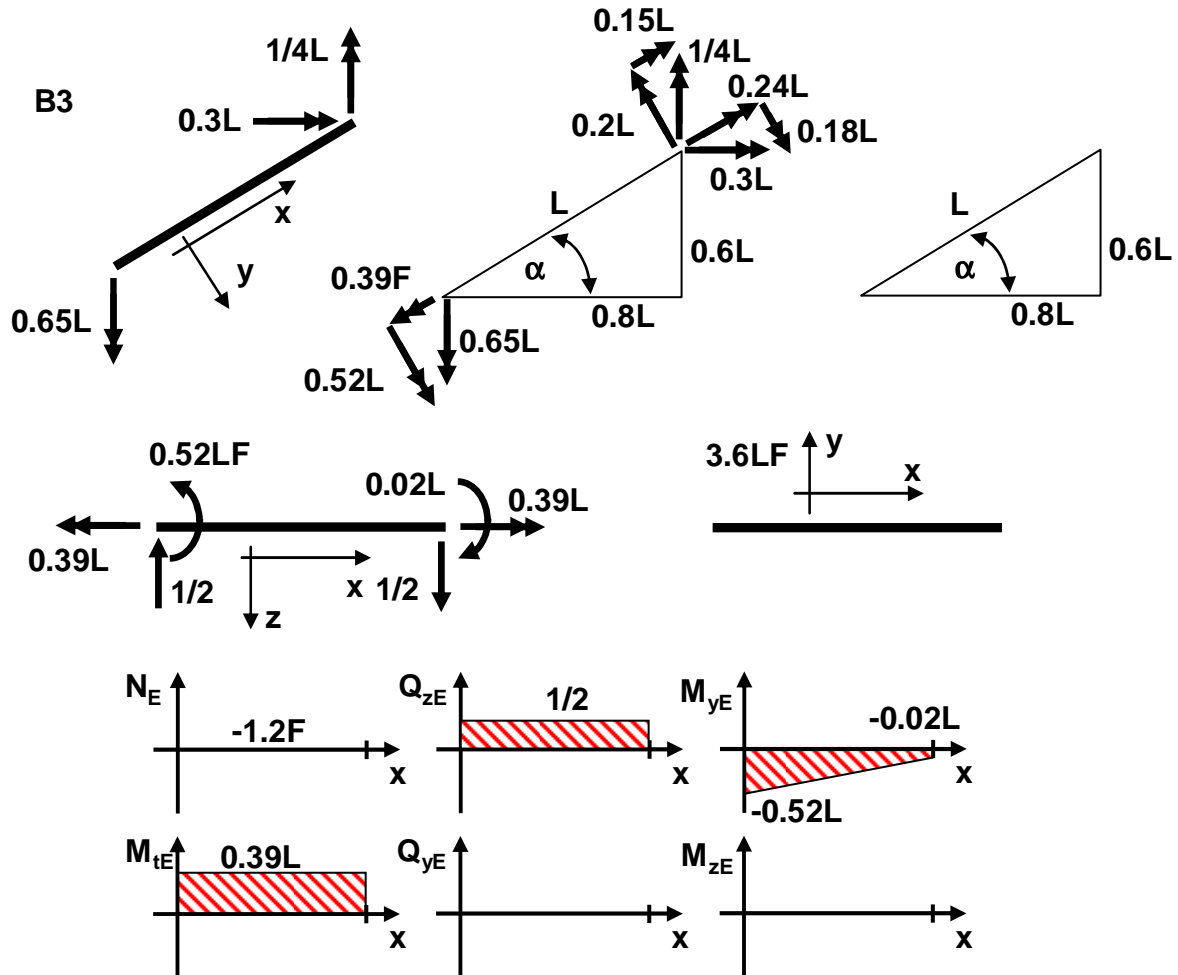


Innere Kräfte und Momente in den identischen Balken B1 und B2 infolge der Einheitskraft:



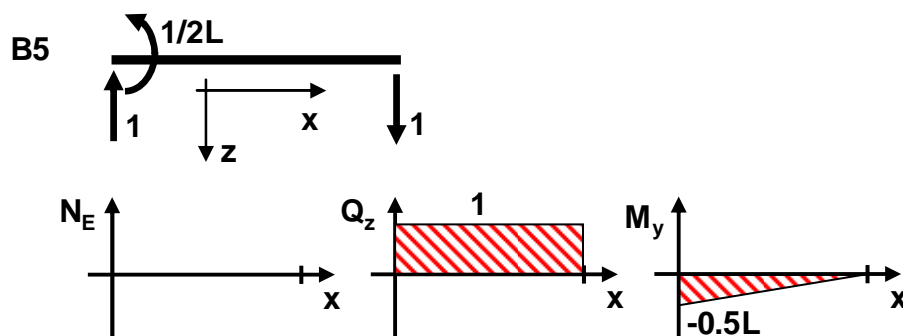
Innere Kräfte und Momente am Balken B3 und B4 infolge Einheitskraft:

Die die Momente  $0.65L$ ,  $0.3L$  und  $1/4L$  zeigen weder in Balkenrichtung noch quer zum Balken. Daher müssen die entsprechenden Größen zerlegt werden. Die Vorgehensweise ist identisch zu der bei der äußeren Belastung.



Die Verläufe im Balken B4 müssen aus den zuvor genannten Gründen nicht berechnet werden.

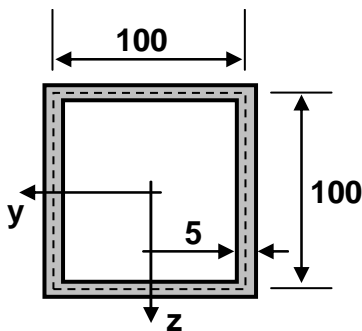
Innere Kräfte und Momente am Balken B5 infolge Einheitskraft:





Berechnung der Absenkung  $u$  infolge Biegemoment und Torsionsmoment in Abhängigkeit von  $E$ ,  $G$ ,  $I_y$  und  $I_t$ . In den Formeln gilt  $M_{yB} = M_y$ ,  $M_{zB} = M_z$  und  $M_{tB} = M_t$ .

$$\begin{aligned}
 u &= 2 \frac{1}{EI_y} \frac{2.3L((-3.6LF)(2(-1.8L)+(-0.65L))+(-1.3LF)(2(-0.65L)+(-1.8L)))}{6} \\
 &+ 2 \frac{1}{EI_y} \frac{L((-1.04LF)(2(-0.52L)+(-0.02L))+(-0.04LF)(2(-0.02L)+(-0.52L)))}{6} \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \frac{0.5L(-LF)(-0.5L)}{3} \\
 &+ 2 \frac{1}{GI_t} L \cdot 0.78LF \cdot 0.39L \\
 &= \frac{FL^3}{EI_y} (2 \cdot 7.410 + 2 \cdot 0.187 + 0.083) + 2 \cdot 0.304 \frac{FL^3}{GI_t} = 15.277 \frac{FL^3}{EI_y} + 0.608 \frac{FL^3}{GI_t}
 \end{aligned}$$



Die fehlenden Größen  $I_y$  und  $I_t$  des dünnwandigen Profils sind noch zu bestimmen.

$$I_y = 2 \frac{5 \cdot 100^3}{12} + 2 \cdot 50^2 \cdot 500 = 3.333 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{du}{s}} = \frac{4A_m^2 s}{U} = \frac{4 \cdot (100^2)^2 \cdot 5}{4 \cdot 100} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Dies ergibt den angegebenen Zahlenwert für die Verschiebung  $u$ :

$$\begin{aligned}
 u &= 15.277 \frac{FL^3}{EI_y} + 0.608 \frac{FL^3}{GI_t} = 15.277 \frac{5000 \cdot 1000^3}{200000 \cdot 3.333 \cdot 10^6} + 0.608 \frac{5000 \cdot 1000^3}{80000 \cdot 5 \cdot 10^6} \\
 &= 114.6 + 7.6 = 122.2 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

### Lösungen Aufgabe 55:

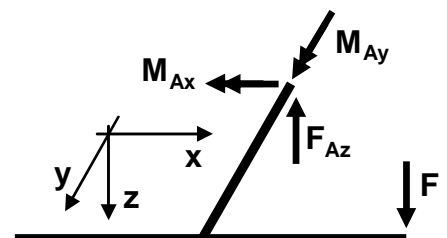
Das Bauteil ist statisch überbestimmt gelagert. Daher ersetzt man das Lager B durch die Lagerkraft  $F_B$ . Belastet man das Bauteil nur mit der Kraft  $F$ , ohne  $F_B$ , senkt sich der Punkt B um den Betrag  $u_F$  ab. Greift nur  $F_B$  an, ohne dass  $F$  wirksam ist, so senkt sich der Punkt B um den Betrag  $u_{FB}$  ab. Bei linearer Berechnung kann man superpositionieren. Das bedeutet, wirken beide Kräfte gleichzeitig, ergibt sich die Gesamtverschiebung  $u$ :

$$u = u_F + u_{FB}$$

Da am Punkt B das Lager die senkrechte Verschiebung verhindert, gilt  $u = 0$ . Dadurch gewinnt man eine Formel zur Berechnung der Lagerkraft  $F_B$ .

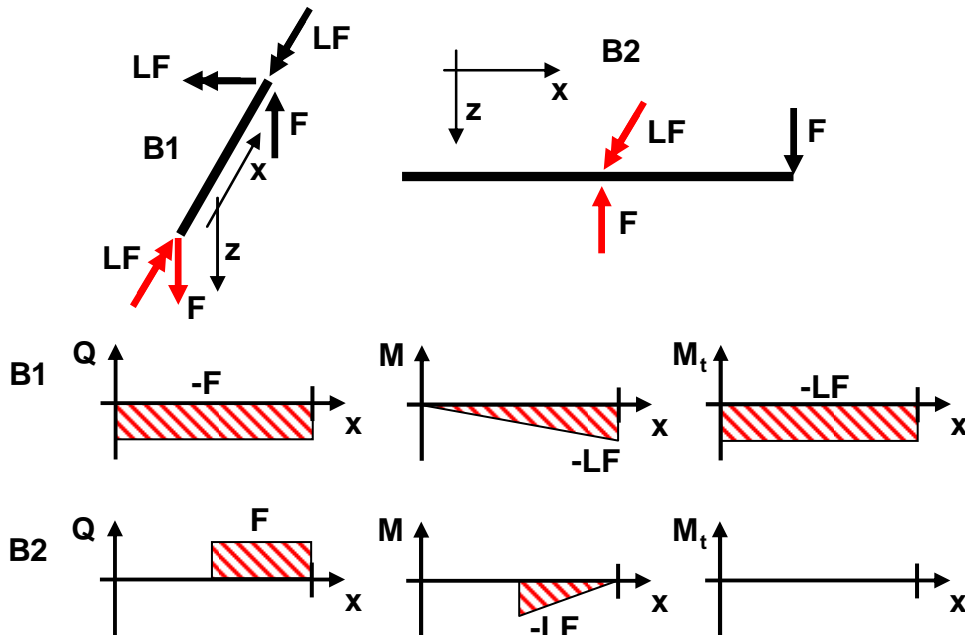
Dies bedeutet, dass man die Verschiebungen  $u_F$  und  $u_{FB}$  berechnet. Dazu müssen die Inneren Kräfte und Momente infolge  $F$  und infolge  $F_B$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 \sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = F \\
 \sum M_x|_A = 0: \quad -M_{Ax} + LF &= 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ax} = LF
 \end{aligned}$$



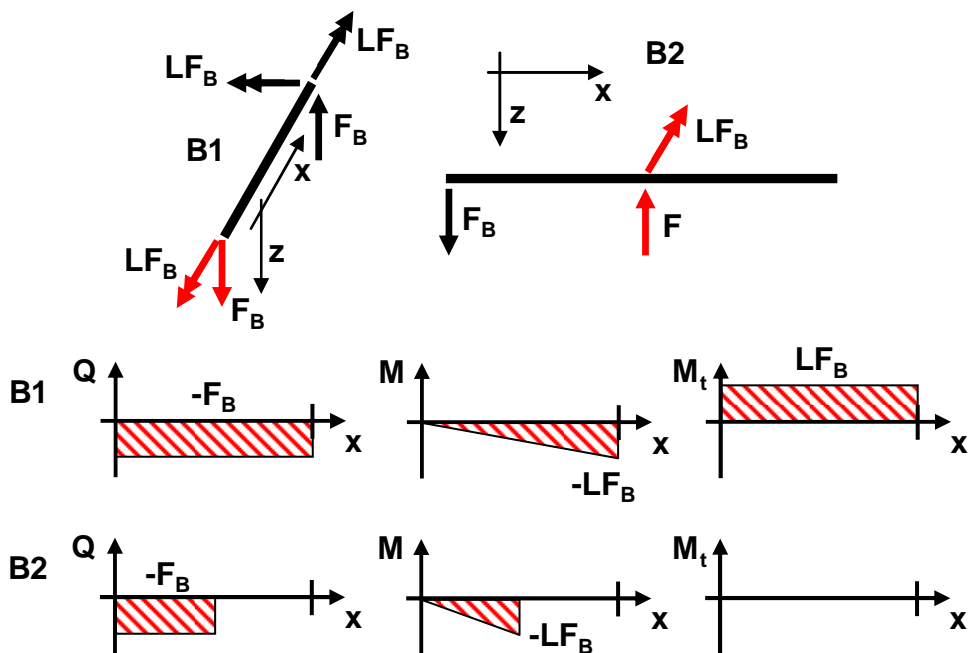
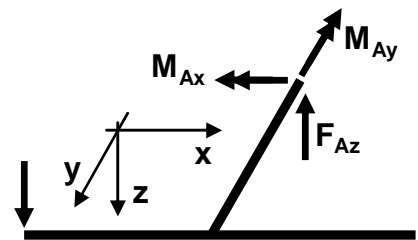
$$\sum M_y|_A = 0: M_{Ay} - LF = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ay} = LF$$

Innere Kräfte und Momente infolge F:



Innere Kräfte und Momente infolge  $F_B$ :

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0: & -F_{Az} + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = F_B \\ \sum M_x|_A = 0: & -M_{Ax} + LF_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ax} = LF_B \\ \sum M_y|_A = 0: & -M_{Ay} + LF_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Ay} = LF_B \end{aligned}$$



Für die Absenkung  $u_F$  des Punktes B muss am Punkt B eine senkrechte Einheitskraft aufgebracht werden. Die daraus resultierenden Verläufe der inneren Kräfte und Momente

gewinnt man aus den Verläufen für die Kraft  $F_B$ , indem man  $F_B$  gleich eins setzt. Für die Momente  $M_B$  und  $M_{tB}$  verwendet man die Verläufe infolge der Kraft  $F$ . Außerdem wird berücksichtigt, dass für ein kreisrundes Profil  $I_t = 2I_y$  gilt.

$$u_F = \frac{1}{EI_y} \frac{(-LF)(-L)L}{3} + \frac{1}{GI_t} (-LF)LL = \frac{FL^3}{3EI_y} - \frac{FL^3}{GI_t} = \frac{FL^3}{3EI_y} - \frac{FL^3}{3/8 E2I_y} = -\frac{FL^3}{EI_y}$$

Zur Berechnung von  $u_{FB}$  muss die gleiche Einheitskraft verwendet werden. Für die Momente  $M_B$  und  $M_{tB}$  verwendet man die Verläufe infolge der Kraft  $F_B$ .

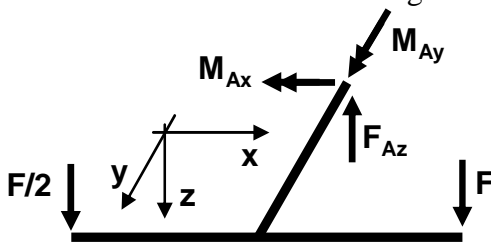
$$u_F = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{(-LF_B)(-L)L}{3} + \frac{(-LF_B)(-L)L}{3} \right) + \frac{1}{GI_t} LF_B LL = \frac{2F_B L^3}{3EI_y} + \frac{F_B L^3}{GI_t}$$

$$= \frac{2F_B L^3}{3EI_y} + \frac{F_B L^3}{3/8 E2I_y} = 2 \frac{F_B L^3}{EI_y}$$

Für die Bestimmungsformel für  $F_B$  ergibt sich:

$$0 = u = u_F + u_{FB} = -\frac{FL^3}{EI_y} + 2 \frac{F_B L^3}{EI_y} \Rightarrow 0 = -F + 2F_B \Rightarrow F_B = \frac{1}{2} F$$

Mit der bekannten Lagerkraft  $F_B$  können die restlichen Lagergrößen berechnet werden.

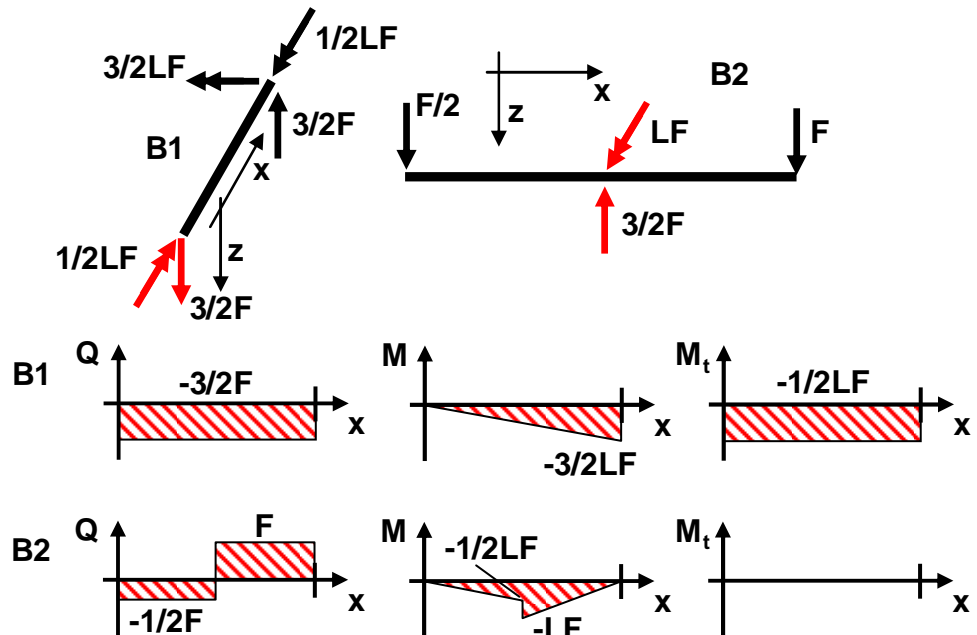


$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + \frac{1}{2}F + F = 0 \Rightarrow F_{Az} = \frac{3}{2}F$$

$$\sum M_x|_A = 0: -M_{Ax} + L \frac{F}{2} + LF = 0 \Rightarrow M_{Ax} = \frac{3}{2}LF$$

$$\sum M_y|_A = 0: M_{Ay} + L \frac{F}{2} - LF = 0 \Rightarrow M_{Ay} = \frac{1}{2}LF$$

Innere Kräfte und Momente im Bauteil:



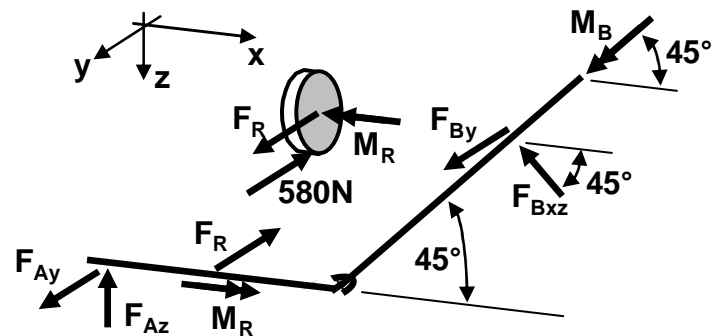
Für die Berechnung der senkrechten Absenkung  $u_C$  des Punktes C werden für die Momente  $M_B$  und  $M_{tB}$  die Schaubilder durch die gleichzeitige Belastung mit  $F$  und  $F_B$  verwendet. Die notwendigen Schaubilder infolge Einheitskraft erhält man aus den Schaubildern, bei denen nur die Kraft  $F$  wirksam ist. Dabei muss  $F$  gleich eins gesetzt werden.

$$u_c = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{\left( -\frac{3}{2} LF \right) (-L)L}{3} + \frac{(-LF)(-L)L}{3} \right) + \frac{1}{GI_t} \left( -\frac{1}{2} LF \right) (-L)L = \frac{5 FL^3}{6 EI_y} + \frac{FL^3}{2GI_t}$$

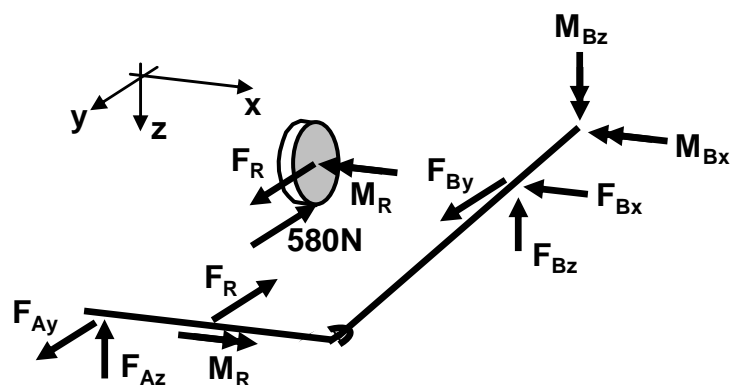
$$= \frac{5FL^3}{6EI_y} + \frac{FL^3}{2 \cdot 3/8 E2I_y} = \frac{FL^3}{EI_y} \left( \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) = 1.5 \frac{FL^3}{EI_y}$$

**Lösungen Aufgabe 56:**

Die beiden Wellen und das Rad werden frei geschnitten. Die Lagerkräfte  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$ ,  $F_{By}$  und  $F_{Bz}$  stehen senkrecht auf den Wellen. Die Kraft  $F_{Bxz}$  und das Moment  $M_B$  liegen beide in der  $xz$ -Ebene und sind jeweils um  $45^\circ$  gegenüber der  $x$ -Achse gedreht. Daher müssen beide in Komponenten in  $x$ - und  $z$ -Richtung zerlegt werden.



	$\frac{M_{Bx}}{M_B} = \cos 45^\circ$	$\Rightarrow M_{Bx} = M_B \cos 45^\circ = \frac{M_B}{\sqrt{2}}$
	$\frac{M_{Bz}}{M_B} = \sin 45^\circ$	$\Rightarrow M_{Bz} = M_B \sin 45^\circ = \frac{M_B}{\sqrt{2}}$
	$\frac{F_{Bx}}{F_{Bxz}} = \cos 45^\circ$	$\Rightarrow F_{Bx} = F_{Bxz} \cos 45^\circ = \frac{F_{Bxz}}{\sqrt{2}}$
	$\frac{F_{Bz}}{F_{Bxz}} = \sin 45^\circ$	$\Rightarrow F_{Bz} = F_{Bxz} \sin 45^\circ = \frac{F_{Bxz}}{\sqrt{2}}$



Gleichgewichtsbedingungen am Rad:

$$\sum F_x = 0: \quad F_R - 580 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = 580N$$

$$\sum M_x|_A = 0: \quad -M_R + 25 \cdot 580 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_R = 14500Nmm$$

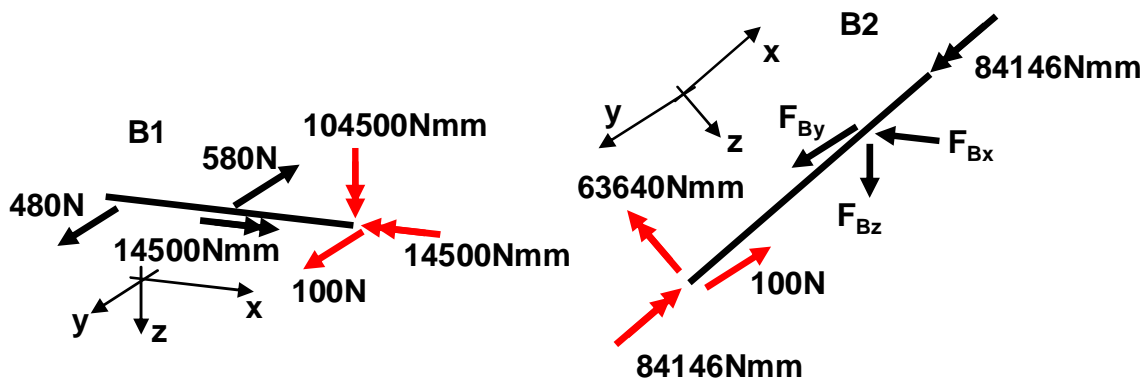
Die weiteren Gleichgewichtsbedingungen am Rad liefern keine zusätzlichen Informationen.

Gleichgewichtsbedingungen an den beiden Wellen:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bxz} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bz} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} - F_{Bz} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = 0 \\ \sum M_x|_A = 0: & \quad M_R + 450F_{By} - M_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Bx} = M_R + 450F_{By} \\ \sum M_z|_A = 0: & \quad -275F_R + 1000F_{By} + M_{Bz} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Bz} = 275F_R - 1000F_{By} \\ \text{mit } M_{Bx} = \frac{M_B}{\sqrt{2}} = M_{Bz} & \quad \Rightarrow \quad M_R + 450F_{By} = 275F_R - 1000F_{By} \\ \Rightarrow & \quad 1450F_{By} = 275F_R - M_R \\ \Rightarrow & \quad F_{By} = \frac{275F_R - M_R}{1450} = \frac{275 \cdot 580 - 14500}{1450} = 100\text{N} \\ \Rightarrow & \quad M_{Bx} = M_{Bz} = M_R + 450F_{By} = 14500 + 450 \cdot 100 = 59500\text{Nmm} \\ \Rightarrow & \quad M_B = M_{Bz} = M_{Bx} = 59500\sqrt{2} = 84146\text{Nmm} \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} - 580 + F_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 580 - F_{By} = 480\text{N} \end{aligned}$$

Anschließend müssen die beiden Wellen frei geschnitten werden und die dargestellten Schnittgrößen eingezeichnet werden. Die Schnittgrößen am linken Balken B1 sind mit der



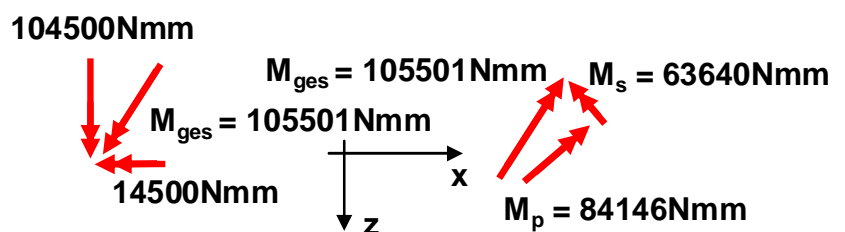
Standardmethode zu bestimmen. Überträgt man die am linken Balken gewonnen Größen direkt auf den rechten Balken B1 zeigen die beiden Momente weder in Balkenrichtung noch quer zum Balken. Um auch die Momente am rechten Balken B2 so anzugeben, dass sie in Balkenrichtung oder quer zum Balken zeigen, wird ein Zwischenschritt durchlaufen. Am rechten Ende des linken Balkens B1 wird das Gesamtmoment  $M_{ges}$  berechnet.

$$M_{ges} = \sqrt{104500^2 + 14500^2} = 105501\text{Nmm}$$

Am linken Ende des Balkens B1 wirkt das Gegenmoment mit dem Betrag  $M_{ges}$ , welches in eine Komponente  $M_p$  in Balkenrichtung und in eine Komponente  $M_s$  zerlegt werden kann. Da sich das innere Torsionsmoment im Balken nicht ändert, muss der Betrag des Moments  $M_p$  gleich dem des Momentes  $M_B$  sein.

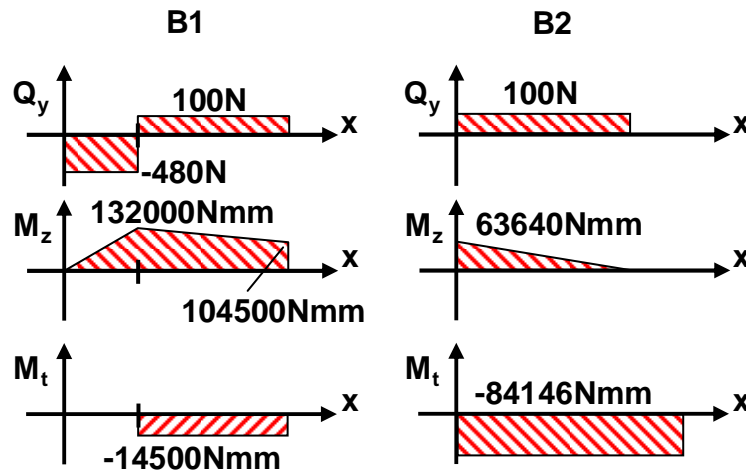
$$\sum M_x|_C = 0: \quad M_p - M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_p = M_B = 59500\sqrt{2} = 84146\text{Nmm}$$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann  $M_s$  bestimmt werden.



$$M_{ges} = \sqrt{M_p^2 + M_s^2} \Rightarrow M_s = \sqrt{M_{ges}^2 - M_p^2} = \sqrt{105501^2 - 84146^2} = 45000\sqrt{2} = 63640 \text{ Nmm}$$

Innere Kräfte und Momente:



Maximale Vergleichsspannung im Balken B1:

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{M_{z,\max}}{I_y} z_{\max} \right| = \frac{|M_{z,\max}|}{\pi/4R^4} R = \frac{|M_{z,\max}|}{\pi/4R^4} R = \frac{4|M_{z,\max}|}{\pi R^3} = \frac{4 \cdot 132000}{\pi 10^3} = 168 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_{t,\max}}{I_t} R \right| = \frac{|M_{t,\max}|}{\pi/2R^4} R = \frac{|M_{t,\max}|}{\pi/2R^4} R = \frac{2|M_{t,\max}|}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot 14500}{\pi 10^3} = 9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{168^2 + 3 \cdot 9^2} = 169 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Vergleichsspannung im Balken B2:

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{M_{z,\max}}{I_y} z_{\max} \right| = \frac{|M_{z,\max}|}{\pi/4R^4} R = \frac{|M_{z,\max}|}{\pi/4R^4} R = \frac{4|M_{z,\max}|}{\pi R^3} = \frac{4 \cdot 63640}{\pi 10^3} = 81 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_{t,\max}}{I_t} R \right| = \frac{|M_{t,\max}|}{\pi/2R^4} R = \frac{|M_{t,\max}|}{\pi/2R^4} R = \frac{2|M_{t,\max}|}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot 84146}{\pi 10^3} = 54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

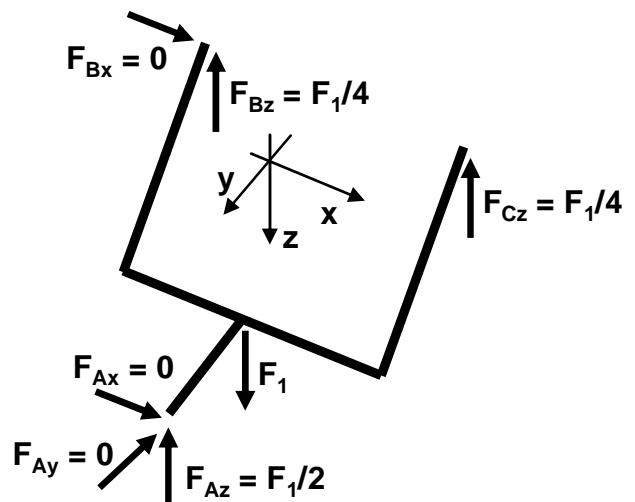
$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{81^2 + 3 \cdot 54^2} = 124 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

**Lösungen Aufgabe 57:**

a.) Kraft \$F\_1\$:

6 Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der 6 unbekannt Lagerkräfte:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ \sum F_y = 0: & \quad -F_{Ay} = 0 \\ \sum F_z = 0: & \quad F_1 - F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0 \\ \sum M_x|_A = 0: & \quad -LF_1 + 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0 \end{aligned}$$



$$\sum M_y|_A = 0: -LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$$

$$\sum M_z|_A = 0: 2LF_{Bx} = 0$$

Die Auswertung der 6 Gleichgewichtsbedingungen ergibt:

$$F_{Az} = F_1/2, \quad F_{Bz} = F_{Cz} = F_1/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = F_{Ay} = 0$$

Kraft F<sub>2</sub>:

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

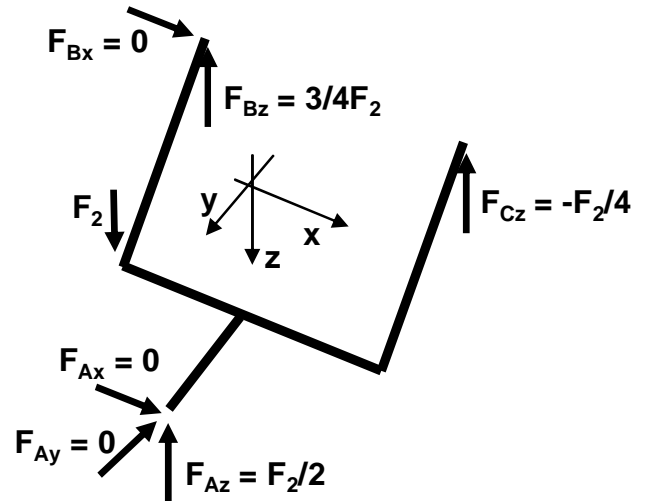
$$\sum F_y = 0: -F_{Ay} = 0$$

$$\sum F_z = 0: F_2 - F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0$$

$$\sum M_x|_A = 0: -LF_2 + 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0$$

$$\sum M_y|_A = 0: LF_2 - LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$$

$$\sum M_z|_A = 0: 2LF_{Bx} = 0$$



Auswertung:

$$F_{Az} = F_2/2, \quad F_{Bz} = 3/4 F_2, \quad F_{Cz} = -F_2/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = F_{Ay} = 0$$

Kraft F<sub>3</sub>:

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0: F_3 + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

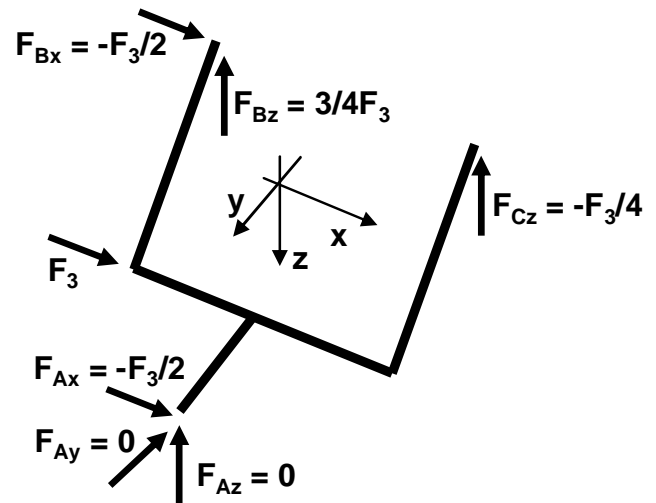
$$\sum F_y = 0: -F_{Ay} = 0$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} - F_{Bz} - F_{Cz} = 0$$

$$\sum M_x|_A = 0: 2LF_{Bz} + 2LF_{Cz} = 0$$

$$\sum M_y|_A = 0: -LF_{Bx} - LF_{Bz} + LF_{Cz} = 0$$

$$\sum M_z|_A = 0: LF_3 + 2LF_{Bx} = 0$$



Auswertung:

$$F_{Az} = 0, \quad F_{Bz} = F_3/4, \quad F_{Cz} = -F_3/4, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = -F_3/2, \quad F_{Ay} = 0$$

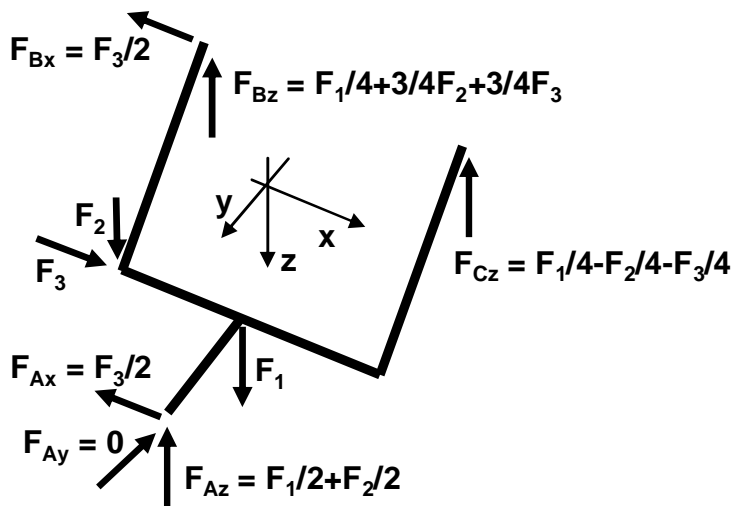
Kraft F<sub>1</sub>+F<sub>2</sub>+F<sub>3</sub>:

Bei der Lagerkraftberechnung handelt es sich um eine lineare Berechnungsaufgabe. Dies bedeutet, dass für die Berechnung der Lagerkräfte infolge F<sub>1</sub>+F<sub>2</sub>+F<sub>3</sub> die Lagerkräfte der Einzelbelastungen der drei Kräfte überlagert bzw. addiert werden.

$$F_{Az} = F_1/2 + F_2/2$$

$$F_{Bz} = F_1/4 + 3/4 F_2 + F_3/4$$

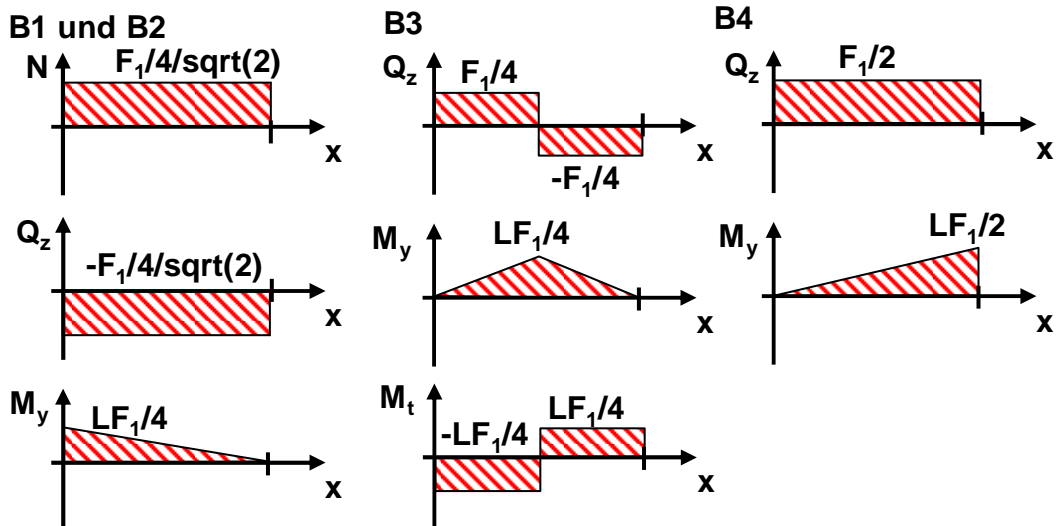
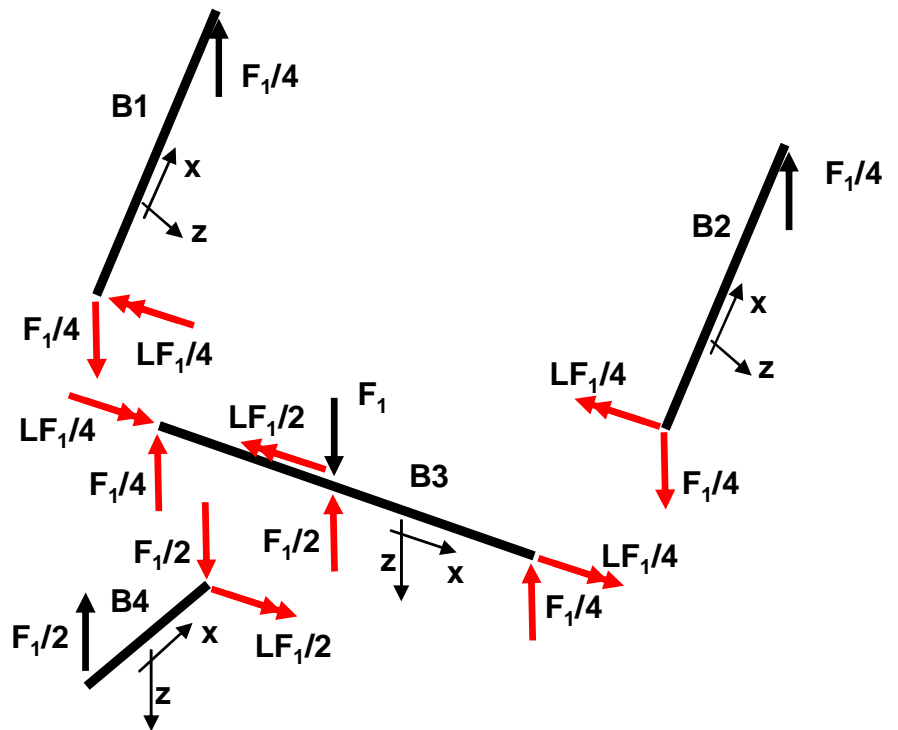
$$F_{Cz} = F_1/4 - F_2/4 - F_3/4$$



$F_{Ax} = F_{Bx} = F_3/2$  (Orientierung siehe Skizze)  
 $F_{Ay} = 0$

b.) Kraft  $F_1$ :

Zerlegung des Bauteils und innere Kräfte und Momente:

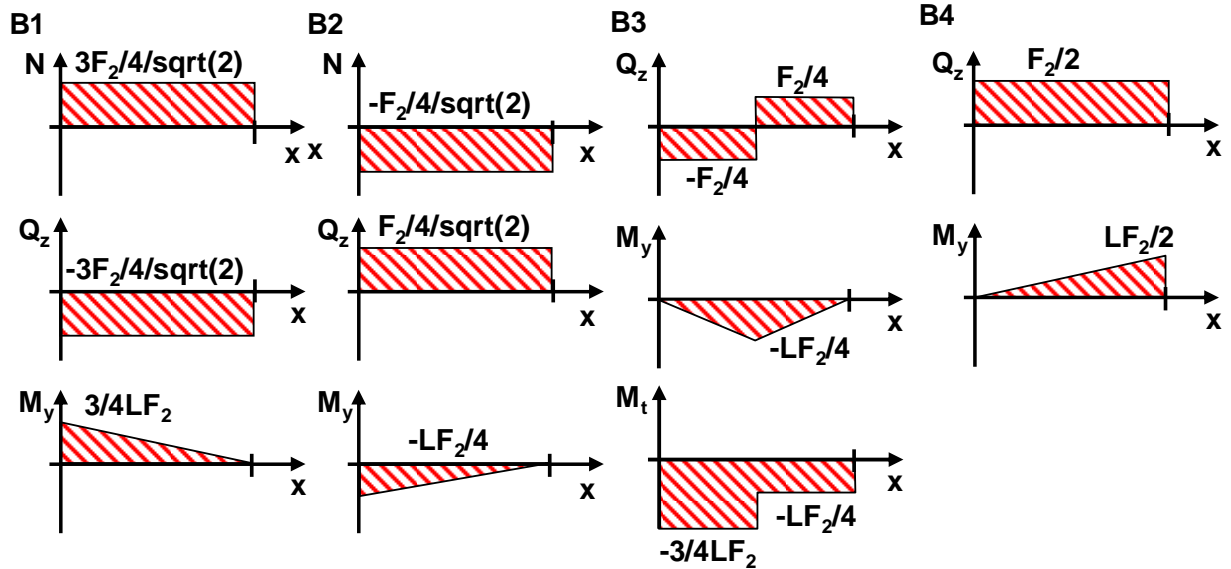
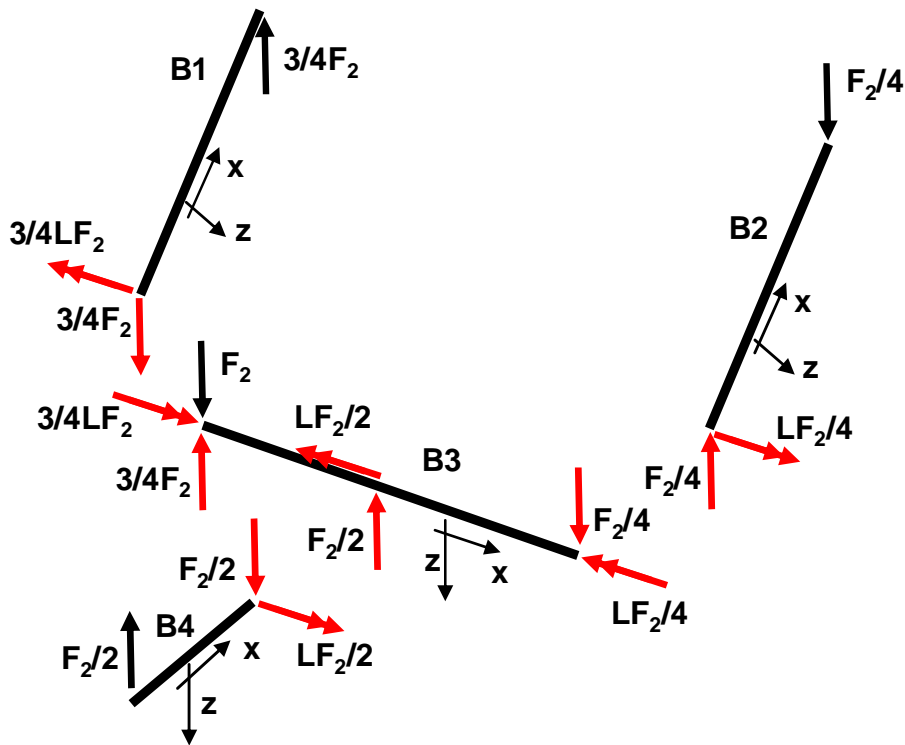


b.)



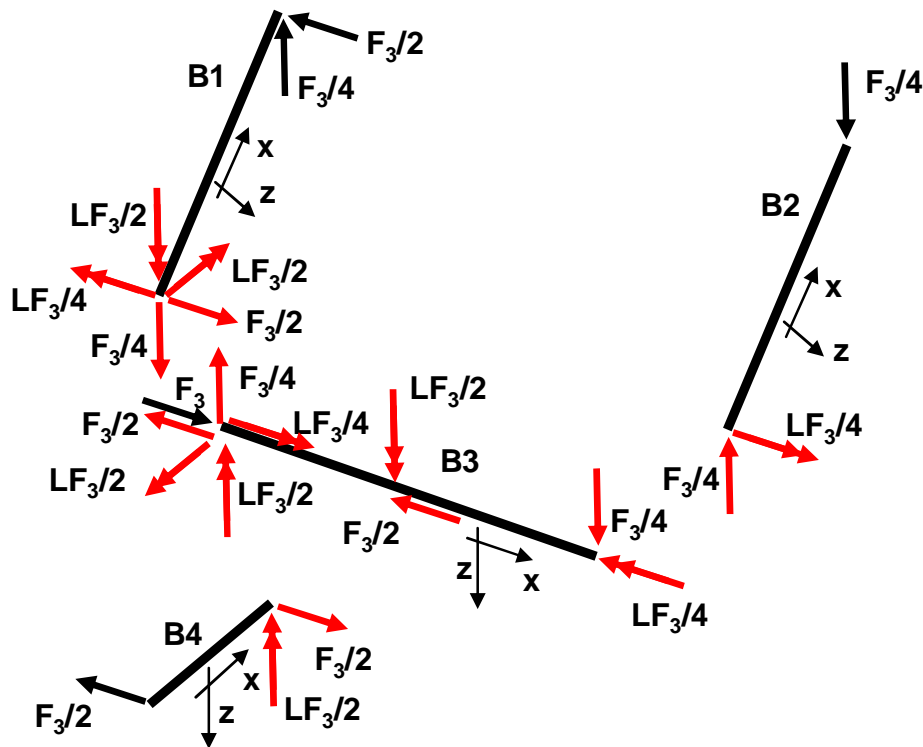
Kraft  $F_2$ :

Zerlegung des Bauteils und innere Kräfte und Momente:

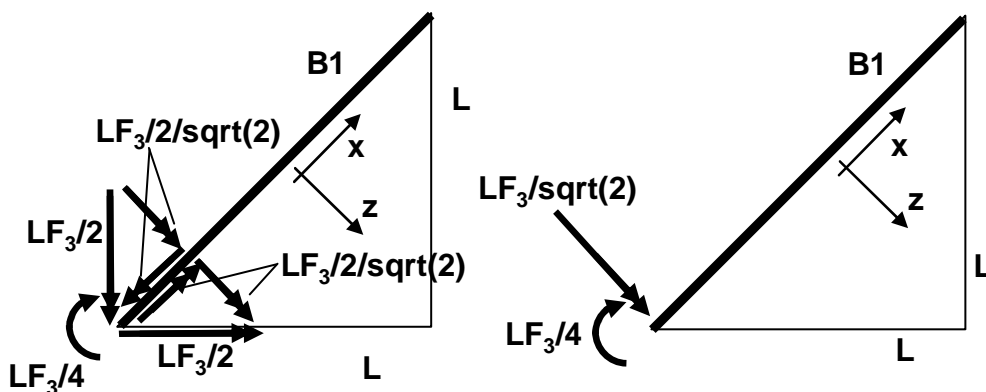
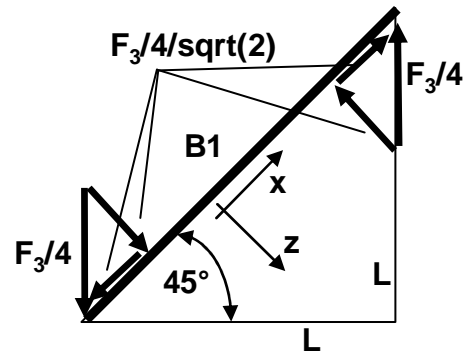


b.) Kraft  $F_3$ :

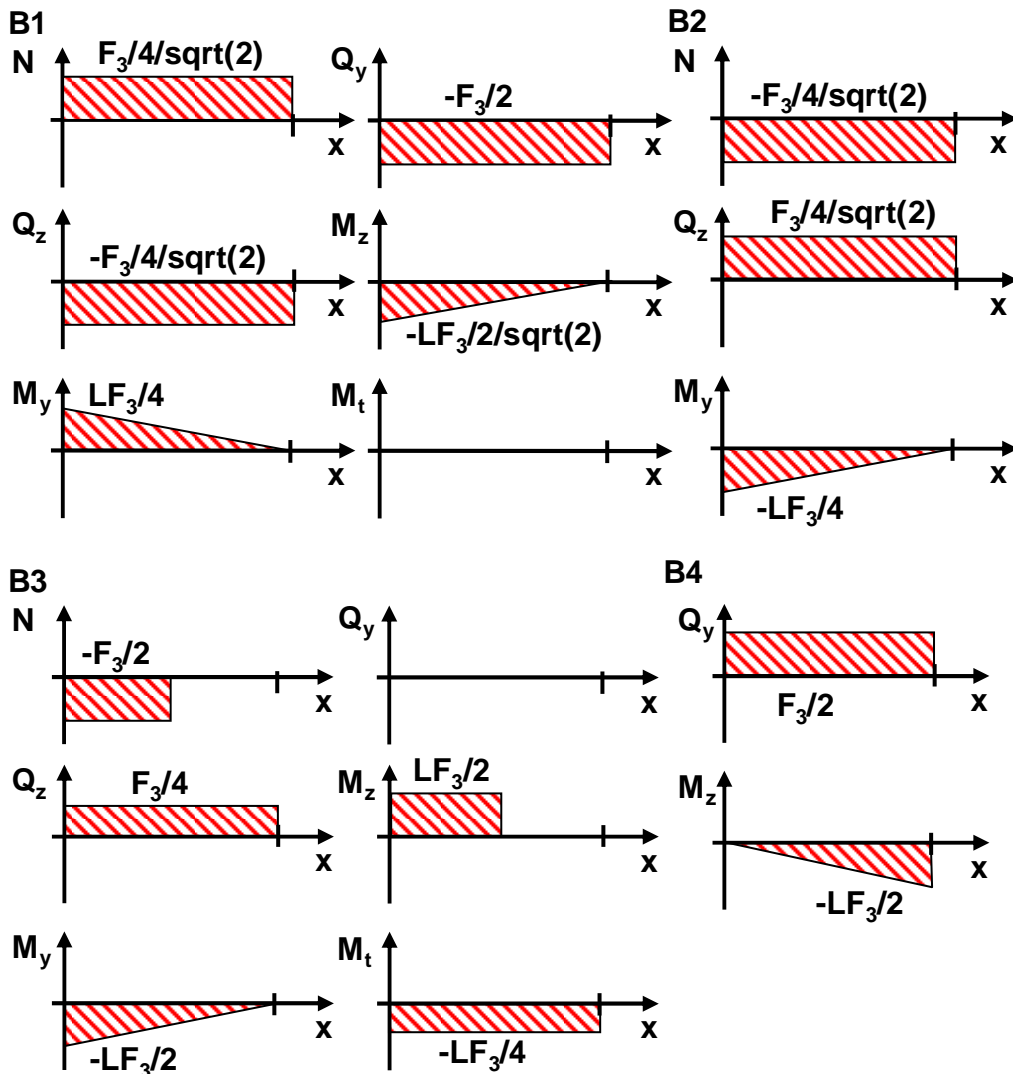
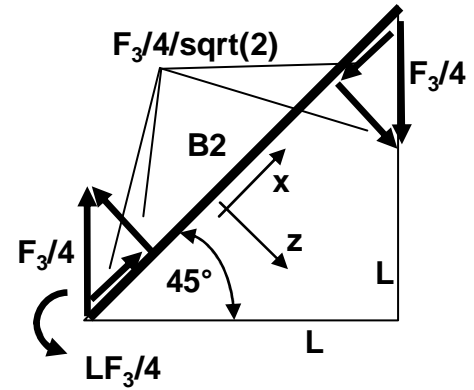
Zerlegung des Bauteils und innere Kräfte und Momente:



Zerlegung der Kräfte und Momente am Balken B1 in Komponenten parallel und senkrecht zum Balken.



Zerlegung der Kräfte am Balken B2 in Komponenten parallel und senkrecht zum Balken.



c.) Für die Berechnung der Verschiebung  $w$  des Punktes D in z-Richtung infolge der Kraft  $F_1$  müssen die Schaubilder für die Kraft  $F_1$  mit den Schaubildern der Kraft  $F_2$  ausgewertet werden, wobei  $F_2$  anschließend als Einheitskraft gleich eins gesetzt wird.

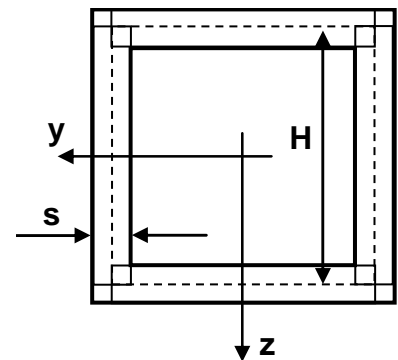
$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{EA} \left( \frac{F_1}{4\sqrt{2}} \frac{3F_2}{4\sqrt{2}} \sqrt{2}L + \frac{F_1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{-F_2}{4\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}L \right) \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left( \frac{\frac{LF_1}{4} \frac{3LF_2}{4} \sqrt{2}L}{3} + \frac{\frac{LF_1}{4} \left( \frac{-LF_2}{4} \right) \sqrt{2}L}{3} + \frac{\frac{LF_1}{4} \left( \frac{-LF_2}{4} \right) 2L}{3} + \frac{\frac{LF_1}{2} \frac{LF_2}{2} L}{3} \right) \\
 &+ \frac{1}{GI_t} \left( \left( \frac{-LF_1}{4} \right) \left( \frac{-3LF_2}{4} \right) L + \frac{LF_1}{4} \left( \frac{-1LF_2}{4} \right) L \right) \\
 &= \frac{F_1 F_2 L \sqrt{2}}{EA \cdot 16} + \frac{F_1 F_2 L^3}{EI_y} \left( \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{24} \right) + \frac{F_1 F_2 L^3}{GI_t} \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Die Kraft  $F_2$  muss gleich eins eingesetzt werden.

$$w = 0.0884 \frac{F_1 L}{EA} + 0.1006 \frac{F_1 L^3}{EI_y} + 0.125 \frac{F_1 L^3}{GI_t}$$

Für die Berechnung der Verschiebung  $u$  des Punktes D in x-Richtung infolge der Kraft  $F_1$  müssen die Schaubilder für die Kraft  $F_1$  mit den Schaubildern der Kraft  $F_3$  ausgewertet werden, wobei  $F_3$  anschließend als Einheitskraft gleich eins gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{EA} \left( \frac{F_1}{4\sqrt{2}} \frac{F_3}{4\sqrt{2}} \sqrt{2}L + \frac{F_1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{-F_3}{4\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}L \right) \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left( \frac{\frac{LF_1}{4} \frac{LF_3}{4} \sqrt{2}L}{3} + \frac{\frac{LF_1}{4} \left( \frac{-LF_3}{4} \right) \sqrt{2}L}{3} + \frac{\frac{LF_1}{4} \left( \frac{-LF_3}{2} \right) 2L}{4} \right) \\
 &+ \frac{1}{GI_t} \left( \left( \frac{-LF_1}{4} \right) \left( \frac{-LF_3}{4} \right) L + \frac{LF_1}{4} \left( \frac{-LF_3}{4} \right) L \right) \\
 &= \frac{F_1 F_3 L^3}{EI_y} \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$



Für  $F_3$  muss eins eingesetzt werden.

$$u = 0.0625 \frac{F_1 L^3}{EI_y}$$

d.) Für die Berechnung von  $H$  muss die Querschnittsfläche  $A$ , das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  und das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$  in Abhängigkeit von  $H$  ausgedrückt werden.

$$A = 4Hs$$

$$I_y = 2 \frac{sH^3}{12} + 2 \underbrace{\frac{Hs^3}{12}}_{\approx 0} + 2 \left( \frac{H}{2} \right)^2 Hs = \frac{sH^3}{6} + \frac{H^3 s}{2} = \frac{2H^3 s}{3}$$

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{du}{s}} = \frac{(2H^2)^2 s}{4H} = H^3 s$$

Setzt man die berechneten Werte in die Gleichung für die Verschiebung  $w$  ein, so folgt:

$$w = 0.0884 \frac{F_1 L}{EA} + 0.1006 \frac{F_1 L^3}{EI_y} + 0.125 \frac{F_1 L^3}{GI_t} = 0.0884 \frac{F_1 L}{E4H_s} + 0.1006 \frac{3F_1 L^3}{E2H_s^3} + 0.125 \frac{F_1 L^3}{GH^3_s}$$

Vernachlässigt man den Einfluss durch die Normalkraft kann man die Gleichung nach  $H$  auflösen.

$$w = \left( 0.1006 \frac{3F_1 L^3}{E2s} + 0.125 \frac{F_1 L^3}{Gs} \right) \frac{1}{H^3}$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{0.1006 \frac{3F_1 L^3}{E2s} + 0.125 \frac{F_1 L^3}{Gs}}{w}} = \sqrt[3]{\frac{0.1006 \frac{3 \cdot 10000 \cdot 1000^3}{200000 \cdot 2 \cdot 1.2} + 0.125 \frac{10000 \cdot 1000^3}{80000 \cdot 1.2}}{5}} = 157 \text{ mm}$$

e.) Das maximale Biegemoment im Bauteil unter der Last  $F_1$  wirkt im Balken B4 und beträgt  $M_{\max} = LF_1/2$ . Damit errechnet man die maximalen Normalspannungen  $\sigma_{\max}$  infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} \frac{H}{2} = \frac{LF_1/2}{2/3 H^3_s} \frac{H}{2} = \frac{3LF_1}{8H^2_s} = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 10000}{8 \cdot 157^2 \cdot 1.2} = 127 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Die maximalen Normalspannungen  $\sigma_{\text{normal}}$  infolge der maximalen Normalkraft  $N_{\max}$  wirken im Balken B1.

$$\sigma_{\text{normal}} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{F_1 / (4\sqrt{2})}{4H_s} = \frac{10000 / 5.6569}{4 \cdot 156.9 \cdot 1.2} = 2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Da im Balken B4 nur ein maximales Moment  $M_{\max}/2$  anzutreffen ist, hat die Normalspannung  $\sigma_{\text{normal}}$  keinen Einfluss auf die maximalen Normalspannungen im Bauteil. Das maximale Torsionsmoment beträgt  $M_{t,\max} = LF_1/4$ . Daraus resultieren die maximalen Schubspannungen  $\tau_{\max}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t,\max}}{W_t} = \frac{M_{t,\max}}{2A_{m,s}} = \frac{LF_1/4}{2H^2_s} = \frac{LF_1}{8H^2_s} = \frac{1000 \cdot 10000}{8 \cdot 157^2 \cdot 1.2} = 42 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

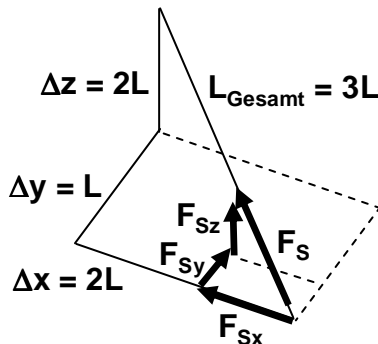
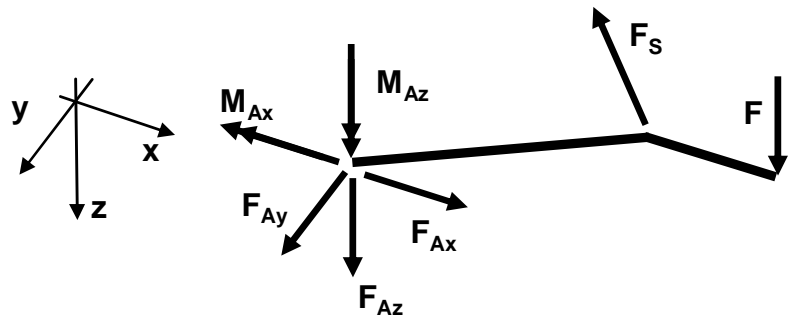
Zur Bestimmung der maximalen Vergleichsspannung  $\sigma_v$  wird der Balken B3 betrachtet. Dort tritt maximal  $M_{\max}/2$  und  $M_{t,\max}$ . Das halbe maximale Biegemoment bedeutet, dass im Balken B3 die Hälfte der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments auftreten.

$$\sigma_v = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{\max}}{2} \right)^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{\left( \frac{127}{2} \right)^2 + 3 \cdot 42^2} = 97 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Da diese Vergleichsspannung  $\sigma_v$  kleiner der Normalspannung  $\sigma_{\max}$  im Balken B4 ist, ist die Normalspannung im Balken B4 gleichzeitig die maximale Vergleichsspannung.

**Lösungen Aufgabe 58:**

Das Lager und das Seil werden durch die Lagerkräfte  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$  und  $F_{Az}$ , durch die Lagermomente  $M_{Ax}$  und  $M_{Az}$  und durch die Seilkraft  $F_S$  ersetzt. Für die Bestimmung der Seilkraft  $F_S$  muss diese in ihre 3 Komponenten zerlegt werden. Bei dreidimensionalen Aufgaben



ist dies einfacher, wenn der Richtungskosinus anstatt zweier Winkel verwendet wird. Die geometrischen Abmessungen ergeben mit:

$$\Delta x = 2L, \quad \Delta y = L \quad \text{und} \quad \Delta z = 2L$$

$$\Rightarrow L_{Gesamt} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 3L$$

$$\frac{\Delta x}{L_{Gesamt}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\Delta y}{L_{Gesamt}} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta z}{L_{Gesamt}} = \frac{2}{3}$$

Die Kraftkomponenten sind Richtungskosinus mal Betrag der Gesamtkraft. Daher erhält man für die einzelnen Komponenten von  $F_S$ :

$$F_{Sx} = \frac{\Delta x}{L_{Gesamt}} F_S = \frac{2}{3} F_S, \quad F_{Sy} = \frac{\Delta y}{L_{Gesamt}} F_S = \frac{1}{3} F_S \quad \text{und} \quad F_{Sz} = \frac{\Delta z}{L_{Gesamt}} F_S = \frac{2}{3} F_S$$

Für die Berechnung der Lagergrößen und der Seilkraft werden die 6 Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Sx} = F_{Ax} - 2/3 F_S = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{Sy} = F_{Ay} - F_S/3 = 0$$

$$\sum F_z = 0: \quad F + F_{Az} - F_{Sz} = F + F_{Az} - 2/3 F_S = 0$$

$$\sum M_x|_A = 0: \quad -M_{Ax} + 1.5L F_{Sz} - 1.5L F = -M_{Ax} + 1.5L \cdot 2/3 F_S - 1.5L F = 0$$

$$\sum M_y|_A = 0: \quad 2L F_{Sz} - 3L F = 2L \cdot 2/3 F_S - 3L F = 0$$

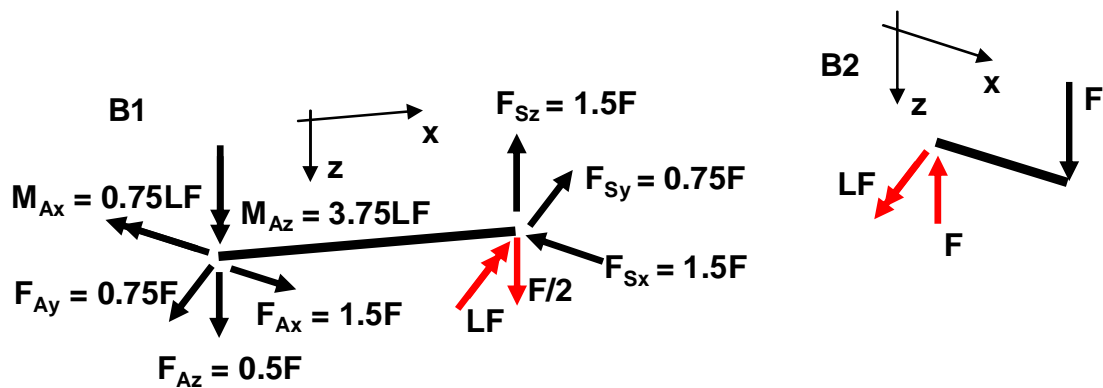
$$\sum M_z|_A = 0: \quad M_{Az} - 1.5L F_{Sx} - 2L F_{Sy} = M_{Az} - 1.5 \cdot 2/3 L F_S - 2L F_S/3 = 0$$

Auswertung:

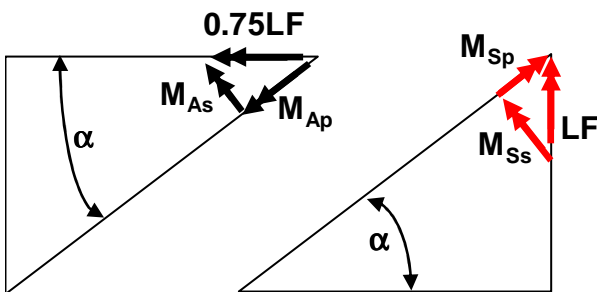
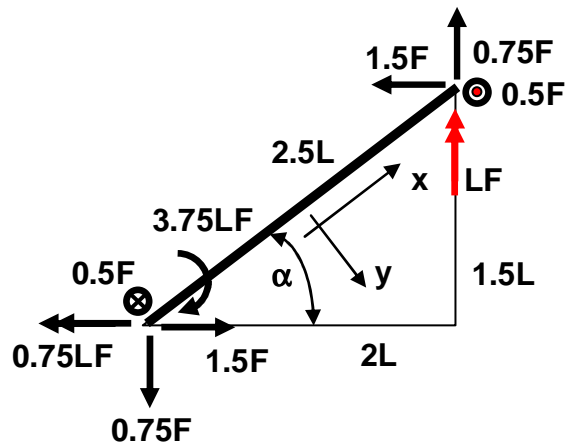
$$F_{Ax} = 1.5F, \quad F_{Ay} = 0.75F, \quad F_{Az} = 0.5F, \quad M_{Ax} = 0.75LF, \quad M_{Az} = 3.75LF \quad \text{und}$$

$$F_S = 2.25F \quad (F_{Sx} = 1.5F, F_{Sy} = 0.75F, F_{Sz} = 1.5F)$$

Für die weiteren Berechnungen wird das Bauteil in zwei gerade Balken B1 und B2 zerlegt. Die dargestellten Schnittgrößen müssen eingefügt werden.



Die Kräfte und Momente am Balken B1 zeigen teilweise weder in Stabrichtung noch quer zum Stab. Da nur die inneren Momente gesucht sind, ist es ausreichend, die Momente in die entsprechenden Komponenten zu zerlegen. Für die Verläufe der Momente sind nur die Sprünge am Anfang und Ende notwendig. Der Verlauf im Inneren erhält man, indem man Anfangswerte und Endwerte linear verbindet. Im Folgenden ist der Balken B1 in die lokale xy-Ebene projiziert. Das Moment  $M_{Ax} = 0.75LF$  und das rote Schnittmoment  $LF$  muss zerlegt werden.



$$\tan \alpha = \frac{1.5L}{2L} = 0.75$$

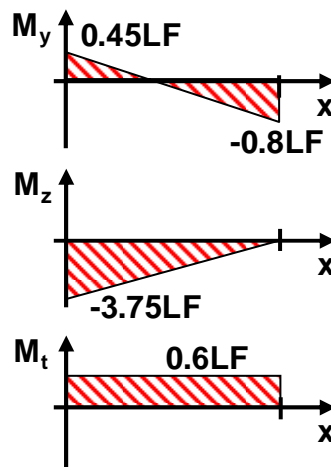
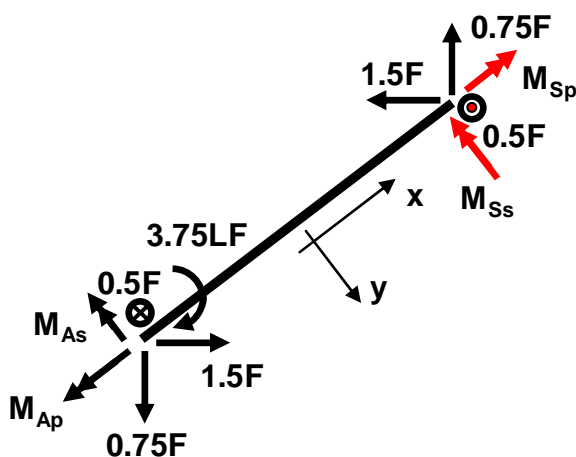
$$\Rightarrow \sin \alpha = 0.6, \quad \cos \alpha = 0.8$$

$$M_{As} = 0.75LF \sin \alpha = 0.45LF$$

$$M_{Ap} = 0.75LF \cos \alpha = 0.6LF$$

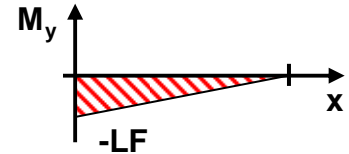
$$M_{Ss} = LF \cos \alpha = 0.8LF$$

$$M_{Sp} = LF \sin \alpha = 0.6LF$$

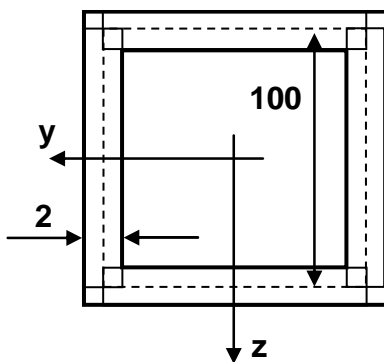


Anfang von Balken B1 zeigt das Moment  $M_{As}$  und am Ende das Momente  $M_{Ss}$  jeweils in negativer y-Richtung. Daher macht das innere Biegemoment jeweils einen Sprung nach oben von 0 auf  $0.45L$  bzw. von  $-0.8L$  auf 0. Am Anfang von Balken B1 wirkt in positiver lokaler z-Richtung das Momente  $3.75LF$ . Am Ende des Balkens zeigt kein Moment in z-Richtung. Das bedeutet, dass am Anfang ein Sprung von 0 auf  $-3.75LF$  und am Ende kein Sprung vorhanden ist. Das innere Torsionsmoment im Balken B1 erhält man aus den Momenten  $M_{Ap}$  und  $M_{Sp}$ .

Am Balken B2 ist am Balkenanfang ein positives äußeres Moment, welches in y-Richtung zeigt, am Ende des Balkens ist kein Moment wirksam. Also springt das Moment am Balkenanfang von 0 auf  $-LF$ , am Ende ist kein Sprung.



b.) Es werden die Flächenträgheitsmomente  $I_y$ ,  $I_z$  und das Torsionsflächenträgheitsmoment  $I_t$  benötigt. Da das Profil quadratisch ist, sind  $I_y$  und  $I_z$  identisch.



$$I_y = I_z = 2 \frac{2 \cdot 100^3}{12} + 2 \frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \left( \frac{100}{2} \right)^2 100 \cdot 2 = 1333333 \text{ mm}^4$$

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{du}{s}} = \frac{(2 \cdot 100^2)^2 \cdot 2}{4 \cdot 100} = 2000000 \text{ mm}^4$$

Senkrechte Absenkung  $w$  des Kraftangriffspunkt infolge der Momente und der Seilkraft:

$$w = \frac{1}{EI_y} \frac{2.5L(0.45LF(2 \cdot 0.45L - 0.8L) - 0.8LF(2(-0.8L) + 0.45L))}{6}$$

$$+ \frac{1}{EI_z} \frac{(-3.75LF)(-3.75L)2.5L}{3} + \frac{1}{GI_t} 0.6LF \cdot 0.6L \cdot 2.5L$$

$$+ \frac{1}{EI_y} \frac{(-LF)(-L)L}{3} + \frac{1}{EA} 2.25F \cdot 2.25 \cdot 3L$$

$$= 0.40208 \frac{FL^3}{EI_y} + 11.71875 \frac{FL^3}{EI_z} + 0.9 \frac{FL^3}{GI_t} + \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI_y} + 15.1875 \frac{LF}{EA}$$

$$= 0.40208 \frac{1000 \cdot 1000^3}{70000 \cdot 1333333} + 11.71875 \frac{1000 \cdot 1000^3}{70000 \cdot 1333333}$$

$$+ 0.9 \frac{1000 \cdot 1000^3}{25000 \cdot 2000000} + \frac{1}{3} \frac{1000 \cdot 1000^3}{70000 \cdot 1333333} + 15.1875 \frac{1000 \cdot 1000}{2.8 \cdot 10^5}$$

$$= 4.31 + 125.56 + 18 + 3.57 + 54.24 = 205.68 = 206 \text{ mm}$$

c.) Aus den Schaubildern erkennt man, dass am Anfang von Balken B1 die maximalen Vergleichsspannungen auftreten, da das große Moment  $M_z$  dominiert. Man erhält dort die folgende Normalspannungsfunktion:

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{-3.75 \cdot 1000 \cdot 1000}{1333333} y + \frac{0.45 \cdot 1000 \cdot 1000}{1333333} z = 2.81y + 0.34z$$



Den maximalen Spannungswert  $\sigma_{\max}$  erhält man für  $y = z = 100\text{mm}$ .

$$\sigma_{\max} = \sigma(y = 100, z = 100) = 2.81 \cdot 100 + 0.34 \cdot 100 = 315 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  infolge des Torsionsmoments lautet:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{0.6LF}{2A_m s} = \frac{0.3LF}{H^2 s} = \frac{0.3 \cdot 1000 \cdot 1000}{100^2 \cdot 2} = 15 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Am Balkenanfang erhält man die folgende maximale Vergleichsspannung  $\sigma_v$ :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{315^2 + 3 \cdot 15^3} = 316 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

**Lösungen Aufgabe 59 (Kurzfassung):**

a.) Die Radkraft  $F_{\text{Rad}}$  beträgt:

$$F_R = \frac{R_2}{R_1} F_K = \frac{50}{500} F_K = 0.1 F_K = 1000 \text{ N}$$

b.) Betrag der maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments  $M_g$ :

$$\sigma_{\text{Biegemoment}} = \frac{M_g}{I} R_m = \frac{\sqrt{0.0292} L F_K}{\pi R_m^3 s} R_m = \frac{\sqrt{0.0292} L F_K}{\pi R_m^2 s} = \frac{\sqrt{0.0292} \cdot 400 \cdot 10000}{\pi \cdot 100^2 \cdot 2} = 10.88 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Normalspannungen infolge des Normalkraft N:

$$\sigma_{\text{Normalkraft}} = \frac{N}{A} = \frac{-0.94 F_K}{2\pi R_m s} = \frac{-0.94 \cdot 10000}{2\pi \cdot 100 \cdot 2} = -7.48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Zugspannungen:

$$\sigma_{\text{Zug}} = \sigma_{\text{Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = 10.88 - 7.48 = 3.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Druckspannungen:

$$\sigma_{\text{Druck}} = -\sigma_{\text{Biegemoment}} + \sigma_{\text{Normalkraft}} = -10.88 - 7.48 = -18.36 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

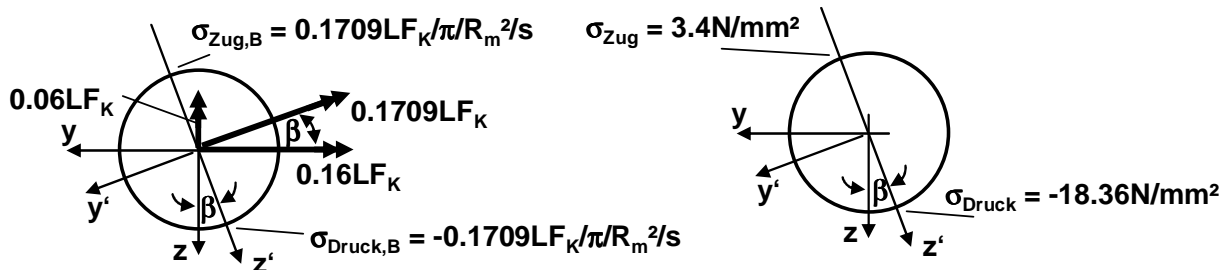
Maximale Schubspannungen infolge des Torsionsmoments:

$$\tau_{\text{Torsion}} = \frac{M_t}{I_t} R_m = \frac{0.08 L F_K}{2\pi R_m^3 s} R_m = \frac{0.08 L F_K}{2\pi R_m^2 s} = \frac{0.08 \cdot 400 \cdot 10000}{2\pi \cdot 100^2 \cdot 2} = 2.55 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maximale Normalspannung  $\sigma_v$  nach Mises:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\text{Druck}}^2 + 3\tau_{\text{Torsion}}^2} = \sqrt{(-18.36)^2 + 3 \cdot 2.55^2} = 18.88 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

c.) Die Normalspannungen infolge Normalkraft sind konstant über der Querschnittsfläche. Daher muss für die Bestimmung der Position der maximalen Normalspannungen nur die Normalspannungen infolge des Biegemoments betrachtet werden. Mit Hilfe der Biegemomente  $M_{y,\text{max}}$  und  $M_{z,\text{max}}$  wird die Lage des gedrehten  $y'z'$ -Koordinatensystem bestimmt.

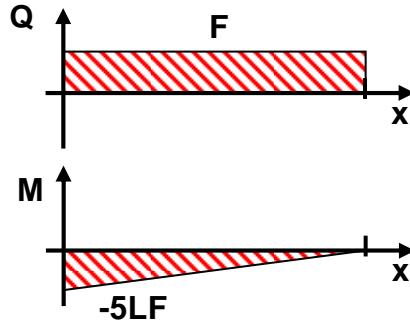


$$\tan \beta = \frac{0.06 L F_K}{0.16 L F_K} = \frac{0.06}{0.16} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \beta = 20.56^\circ$$

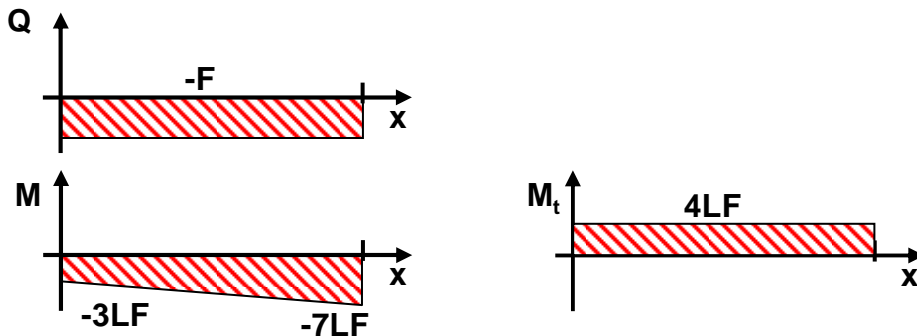
Die maximalen Normalspannungen liegen auf der  $z'$ -Achse. Diese erhält man, wenn man die  $z$ -Achse um den Winkel  $\beta = 20.56^\circ$  in positiver Richtung dreht.

**Lösungen Aufgabe 60 (Kurzfassung):**

a.) Innere Kräfte und Moment im Unterarm (der Unterarm zeigt vom Ellenbogen zur Hand):



Innere Kräfte und Moment im Oberarm (Der Oberarm reicht vom Ellenbogen zum Schulterpunkt A):



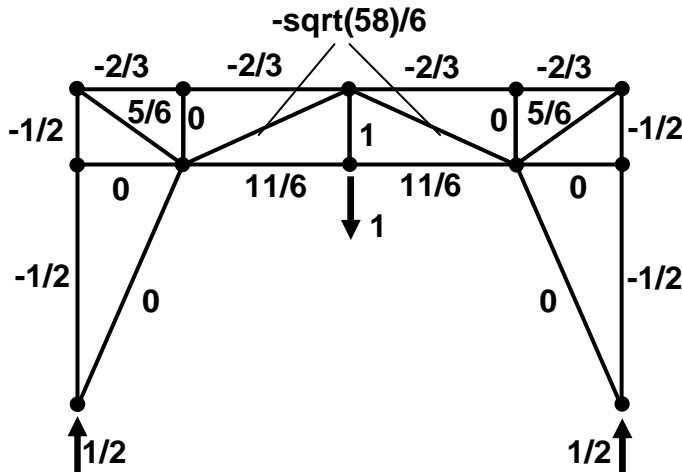
b.) Maximale Normalspannung  $\sigma_v$  nach Mises:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\text{Biegemoment}}^2 + 3\tau_{\text{Torsion}}^2} = \sqrt{32.9^2 + 3 \cdot 9.4^2} = 36.7 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

c.) Dreht man den Arm und die Kraft F um  $30^\circ$  ändert sich an der Vergleichsspannung  $\sigma_v$  nichts. Dreht man auch das Koordinatensystem haben alle von außen wirksamen Kräfte den gleichen Betrag, somit auch die inneren Kräfte und Momente und auch die Spannungen.

**Lösungen Aufgabe 61:**

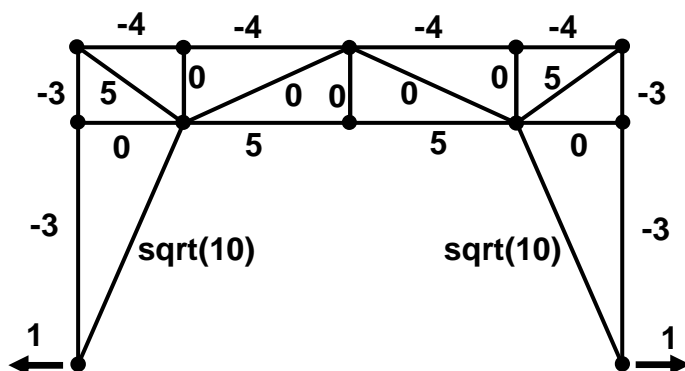
Das Fachwerk ist statisch bestimmt gelagert. Dies bedeutet, dass durch die Temperaturerhöhung keine Lagerkräfte entstehen und somit auch keine Stabkräfte. Für die Berechnung der Verschiebung  $u_1$  muss in Richtung von  $u_1$  eine Einheitskraft angebracht werden. Dies ergibt die dargestellten Lager- und Stabkräfte infolge Einheitskraft.



Damit kann die Verformung  $u_1$  berechnet werden. Es müssen nur die Stäbe 1 bis 4 berücksichtigt werden.

$$u_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \Delta T_i L_i F_{Ei} = \alpha \Delta T \sum_{i=1}^4 L_i F_{Ei} = 2.4 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot \left( 2 \cdot 1000 \sqrt{10} \cdot 0 + 2 \cdot 1750 \frac{11}{6} \right) = 15.4 \text{ mm}$$

Für die Berechnung der Verschiebung  $u_2$  wird am rechten Lager in waagrechter Richtung eine Einheitskraft aufgebracht und die resultierenden Lager- und Stabkräfte ermittelt.



Auch hier müssen zur Berechnung von  $u_2$  nur die Stäbe 1 bis 4 berücksichtigt werden.

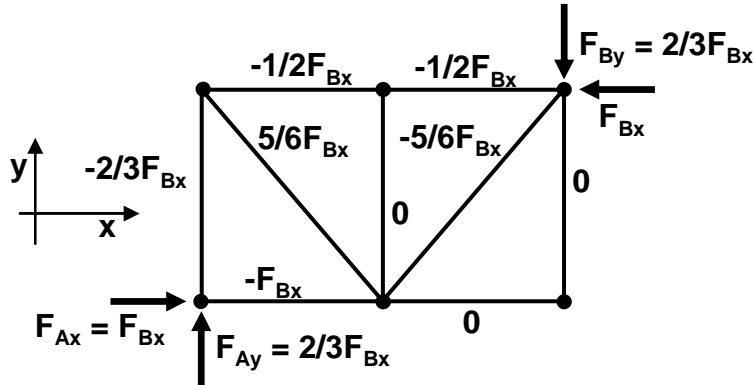
$$u_2 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \Delta T_i L_i F_{Ei} = \alpha \Delta T \sum_{i=1}^4 L_i F_{Ei} = 2.4 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot \left( 2 \cdot 1000 \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot 1750 \cdot 5 \right) = 90 \text{ mm}$$

**Lösungen Aufgabe 62:**

Das Fachwerk ist statisch überbestimmt gelagert. Dies bedeutet, dass Lagerkräfte entstehen, um die Wärmeausdehnungen an den Lagern zu unterdrücken. Diese müssen bekannt sein, wenn man die Verschiebung in x-Richtung bestimmen möchte. Weil Lagerkräfte vorhanden sind, resultieren auch Stabkräfte. Für die Berechnung der Lagerkräfte wird die waagrechte

Lagerkraft  $F_{Bx}$  am Lager B als bekannt vorausgesetzt. Es entsteht ein statisch bestimmtes Bauteil. An diesem wird die waagrechte Verschiebung  $u_{Bx}$  des Knotens B in Abhängigkeit von der Kraft  $F_{Bx}$  bestimmt. Da wegen der Lagerung bekannt ist, dass  $u_{Bx}$  gleich null sein muss, gewinnt man eine Formel zur Bestimmung von  $F_{Bx}$ .

Lager- und Stabkräfte in Abhängigkeit von der noch unbekanntem Lagerkraft  $F_{Bx}$ .

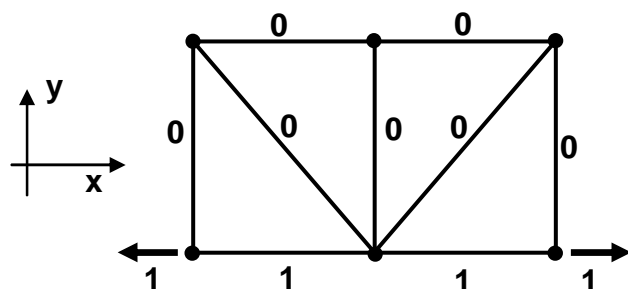


Anschließend kann die waagrechte Verschiebung  $u_{Bx}$  infolge der Lagerkraft  $F_{Bx}$  und der Temperaturerhöhung angegeben werden. Dazu muss in waagrechter Richtung am Knoten B eine Einheitskraft angebracht werden. Die daraus resultierenden Lager- und Stabkräfte entsprechen den Größen infolge  $F_{Bx}$ , wenn  $F_{Bx}$  gleich eins gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
 u_{Bx} &= \sum_{i=1}^9 \left( \alpha_i \Delta T_i L_i F_{Ei} + \frac{L_i F_{Bi} F_{Ei}}{EA_i} \right) = \alpha \Delta T \sum_{i=1}^9 L_i F_{Ei} + \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^9 L_i F_{Bi} F_{Ei} \\
 &= \alpha \Delta T \cdot \left( 3L(-1) + 2 \cdot 3L \left( -\frac{1}{2} \right) + 4L \left( -\frac{2}{3} \right) + 5L \frac{5}{6} + 5L \left( -\frac{5}{6} \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{EA} \left( 3L(-1) \cdot (-F_{Bx}) + 2 \cdot 3L \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{F_{Bx}}{2} \right) + 4L \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} F_{Bx} \right) + 5L \frac{5}{6} \frac{5}{6} F_{Bx} + 5L \left( -\frac{5}{6} \right) \left( -\frac{5}{6} F_{Bx} \right) \right) \\
 &= -\alpha \Delta T \frac{26}{3} L + F_{Bx} \frac{119L}{9EA} = 0 \\
 \Rightarrow F_{Bx} &= \frac{\frac{26}{3} \alpha \Delta T L}{\frac{119}{9EA} L} = \frac{78}{119} \alpha \Delta T EA = \frac{78}{119} \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 800000 = 629.24 N
 \end{aligned}$$

Somit sind alle Lager- und Stabkräfte bekannt. Für die Berechnung der waagrechten Verschiebung  $u_C$  wird am Knoten C eine waagrechte Einheitskraft angebracht und die resultierenden Lager- und Stabkräfte bestimmt.

Lager- und Stabkräfte infolge der waagrechten Einheitskraft am Knoten C:

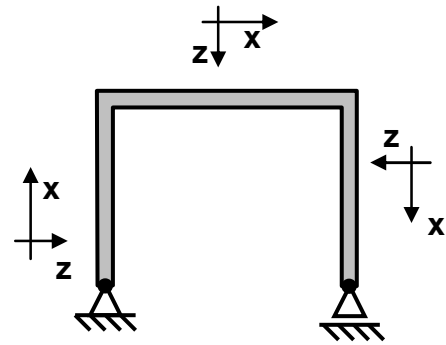


Die Verschiebung  $u_C$  infolge der Temperaturerhöhung der der daraus resultierenden Stabkräfte kann berechnet werden. Es müssen nur die unteren beiden Stäbe betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
 u_C &= \sum_{i=1}^2 \left( \alpha_i \Delta T_i L_i F_{Ei} + \frac{L_i F_{Bi} F_{Ei}}{EA_i} \right) = \alpha \Delta T \sum_{i=1}^2 L_i F_{Ei} + \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^2 L_i F_{Bi} F_{Ei} \\
 &= \alpha \Delta T \cdot (2 \cdot 3L \cdot 1) + \frac{1}{EA} (3L \cdot (-F_{Bx}) \cdot 1) = 6\alpha \Delta T L - \frac{3L F_{Bx}}{EA} = 6\alpha \Delta T L - \frac{3L \frac{78}{119} \alpha \Delta T EA}{EA} \\
 &= 6\alpha \Delta T L - \frac{234}{119} \alpha \Delta T L = \frac{480}{119} \alpha \Delta T L = \frac{480}{119} 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 1000 = 4.84 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

**Lösungen Aufgabe 63:**

Der skizzierte Bügel ist statisch bestimmt gelagert. Dies bedeutet, dass durch die Temperaturerhöhung keine Lagerkräfte entstehen. Durch die Wahl der skizzierten lokalen Koordinatensysteme gilt für jeden Teilbalken  $\Delta T = T_u - T_o = 100\text{K}$ . Dies ergibt in jedem Balken das gleiche, konstante Ersatzmoment  $M_{\text{Ersatz}}$ .



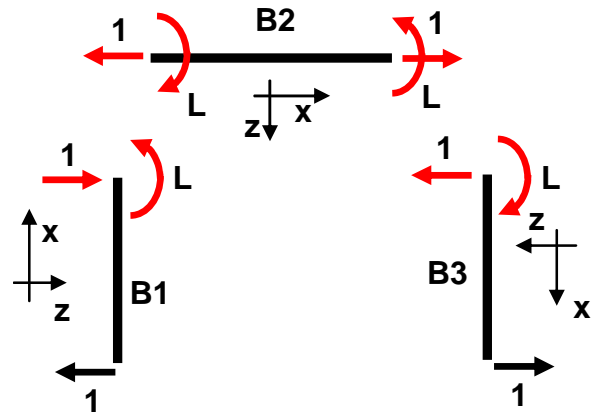
$$M_{\text{Ersatz}} = EI_y \alpha \frac{\Delta T}{H}$$

Für die Änderung der Länge ist die mittlere Temperaturerhöhung  $T_m = (T_u + T_o)/2 = 50\text{K}$  ausschlaggebend. Daraus resultiert in jedem Teilbalken die Ersatzkraft  $F_{\text{Ersatz}}$ .

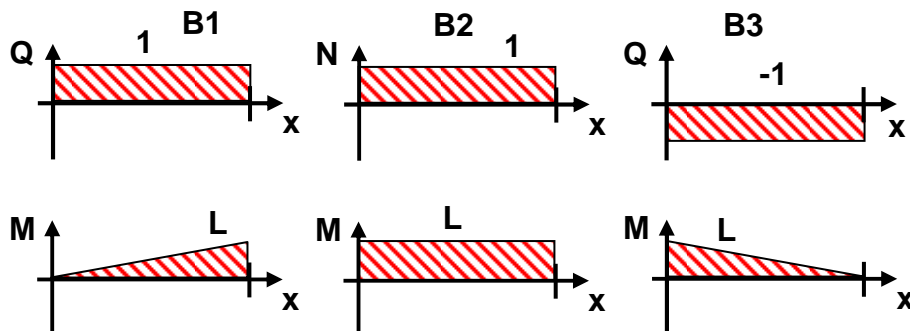
$$F_{\text{Ersatz}} = EA \alpha T_m = EA \alpha \frac{\Delta T}{2}$$

Für die Berechnung  $u$  muss am rechten Lager eine waagrechte Einheitskraft angebracht werden.

Lager- und Schnittkräfte infolge der Einheitskraft:



Innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft:



Berechnung der Verschiebung  $u$ :

$$u = \frac{\alpha \frac{\Delta T}{H} L \cdot L}{2} + \alpha \frac{\Delta T}{H} L \cdot 2L + \frac{\alpha \frac{\Delta T}{H} L \cdot L}{2} + \alpha \frac{\Delta T}{2} \cdot 1 \cdot 2L = \alpha \Delta T \left( 3 \frac{L^2}{H} + L \right)$$
$$= 2.4 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \left( 3 \frac{1000^2}{100} + 1000 \right) = 74.4 \text{ mm}$$