HTWG Konstanz 1.10.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

1.) (4+4 Punkte) Die Funktionen f(x) und g(x) schließen mit der y-Achse im ersten Quadranten eine Fläche ein.

$$f(x) = e^x \qquad\qquad g(x) = e^{-x} + c$$

a.) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche für c = 2sinh(2).
b.) Bestimmen Sie näherungsweise den Flächeninhalt des Rechtecks mit dem maximalen Flächeninhalt, welches in die Fläche von a.) bei beliebigem c gelegt werden kann. Berücksichtigen Sie beim Newtonverfahren $x_0 = 0$ und einen Iterationsschritt.

2.) (5+5 Punkte) a.) In welchem Intervall muss a liegen, dass die Integralgleichung erfüllt ist.

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3-a)^2}\,dx < 0$$

3.) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Nullstellen der komplexen Funktion f(z).

$$f(z) = iz(3-z) + 1 - 3i$$

4.) (5 Punkte) Skizzieren Sie in der Gausschen Zahlenebene die Menge aller Zahlen z, die die beiden Ungleichungen

$$|z + Re(z)| \leq |2z - i| \qquad\qquad (Re(z) - z)^2 \leq -4$$

gemeinsam erfüllen.

5.) (7 Punkte) Zeigen Sie, ob die beiden Reihen konvergieren oder divergieren.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{8}{7}\right)^k \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$$

6.) (7 Punkte) Wie groß ist die Differenz zwischen Darboux'scher Obersumme O_n und Untersumme U_n bei der Funktion f(x) = x+2 im Intervall [-2,0].

7.) (9 Punkte) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn der Wert des Integrals

$$\int_0^{0.75}\frac{9}{9+16x^2}\,dx$$

näherungsweise mit dem Trapezverfahren mit n = 3 bestimmt wird. Wie groß ist der Wert des Integrals, wenn die Funktion vor der Berechnung des Integrals am Entwicklungspunkt x_0 = 0.25 linearisiert wird?

8.) (3 Punkte) Begründen Sie mit der komplexen e-Funktion.

$$cos^2(x) - sin^2(x) = cos(2x)$$

9.) (7 Punkte) Die komplexe geometrische Reihe konvergiert. Geben Sie ihren Grenzwert an.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{3-4i}\right)^k$$

HTWG Konstanz 1.10.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

WIEDERHOLUNGSKLAUSUR MATHEMATIK 1 SS21

AUFGABE 1

a.) $e^{x} = e^{-x} + 2\sinh(2)$

$\Rightarrow (e^{x})^2 - 2\sinh(2)\, e^{x} - 1 = 0$

$y = e^{x}$

$\Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{2\sinh(2) \pm \sqrt{4\sinh^2(2) + 4}}{2} = \sinh(2) \pm \cosh(2) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} \pm \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2}$

$\Rightarrow y_1 = e^2 \Rightarrow x = 2$

$(y_2 = -e^{-2})$

ODER:
$e^{x} - e^{-x} = 2\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right)$
$\Rightarrow x = 2$

$A = \int_0^2 e^{-x} + 2\sinh(2) - e^{x}\, dx = \left[-e^{-x} + 2\sinh(2)\, x - e^{x}\right]_0^2$

$= \left[-e^{-2} + 4\sinh(2) - e^{+2}\right] - \left[-e^{-0} - e^{0}\right]$

$= 4\sinh(2) - 2\cosh(2) + 2 = 8{,}98$

b.) $B = x\left(e^{-x} + c - e^{x}\right)$

$B' = e^{-x} + c - e^{x} + x\left(-e^{-x} - e^{x}\right) = Q(x) = 0$

$Q'(x) = -e^{-x} - e^{x} + \left(-e^{-x} - e^{x}\right) + x\left(e^{-x} - e^{x}\right)$

$x_1 = x_0 - \dfrac{Q(x_0)}{Q'(x_0)} = 0 - \dfrac{c}{-4} = \dfrac{c}{4}$

$\Rightarrow B = \dfrac{c}{4}\left(e^{-c/4} + c - e^{c/4}\right)$

AUFGABE 2

$u = x^3 - a \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3x^2}$

$\int_0^1 \dfrac{3x^2}{(x^3 - a)^2}\, dx = \int_{-a}^{1-a} \dfrac{1}{u^2}\, du = \left[-\dfrac{1}{u}\right]_{-a}^{1-a}$

$= \left[-\dfrac{1}{1-a}\right] - \left[-\dfrac{1}{-a}\right] = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a-1} < \dfrac{1}{a}$

HTWG Konstanz 1.10.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

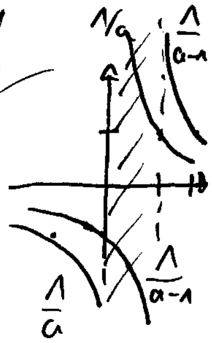
Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$a < 0: \quad a < a-1 \quad \Rightarrow \quad 0 < -1$

$0 < a < 1: \quad a > a-1 \quad \Rightarrow \quad 0 > -1$

$a > 1: \quad a < a-1 \quad \Rightarrow \quad 0 < -1$

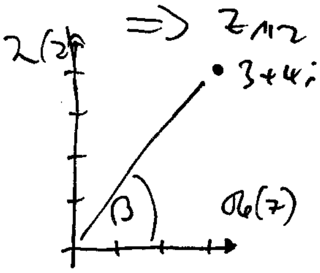
$\Rightarrow \quad a \in (0,1)$



AUFGABE 3

$-i z^2 + 3i z + 1 - 3i = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{-3i \pm \sqrt{-9 + 4i(1-3i)}}{-2i}$



$= \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3+4i}}{2i}$

$|3+4i| = 5 \quad \tan\beta = 4/3 \Rightarrow \beta = 0{,}9273$

$\Rightarrow \sqrt{3+4i} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$

$= 2 + i$

$\Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{2+i}{2i} = \dfrac{3}{2} \pm \left(\dfrac{1}{2} - i\right) \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 2 - i \\ z_2 = 1 + i \end{array}$

AUFGABE 4

$|a + ib + a| \leq |2(a+ib) - i|$

$\Rightarrow |2a + ib| \leq |2a + i(2b-1)|$

$\Rightarrow 4a^2 + b^2 \leq 4a^2 + 4b^2 - 4b + 1$

$\Rightarrow 3b^2 - 4b + 1 \geq 0$

$b_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \cdot 3}$

$= \dfrac{4 \pm 2}{6}$

$\Rightarrow b_1 \geq 1, \quad b_2 \leq 1/3$

$(a - (a+ib))^2 \leq -4$

$\Rightarrow (-ib)^2 \leq -4$

$\Rightarrow -b^2 \leq -4$

$b^2 \geq 4$

$\Rightarrow b_3 \geq 2$

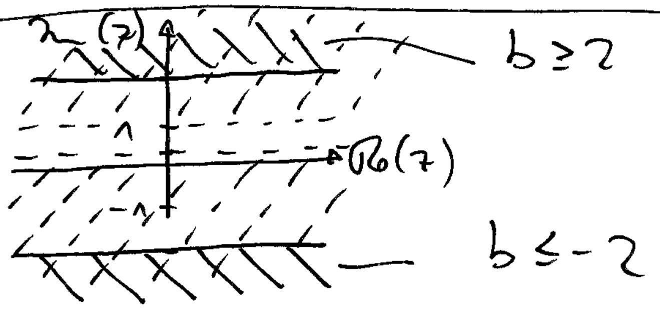
$b_4 \leq -2$

HTWG Konstanz 1.10.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

WIEDERHOLKLAUSUR MATHEMATIK 1 SS21



AUFGABE 5

$$q_1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k}+\frac{8}{7}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{8}{7}\right) = \frac{8}{7} > 1$$

$\Rightarrow$ REIHE IST DIVERGENT

$$q_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} (k+1)\frac{k^k}{(k+1)^k(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k < 1$$

$\Rightarrow$ REIHE IST KONVERGENT

AUFGABE 6

$$x_k = -2 + 2\frac{k}{n} \qquad \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,max})\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(-2+2\frac{k}{n}+2\right)\frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{4}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = 2\,\frac{n+1}{n}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,min})\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(-2+2\frac{k-1}{n}+2\right)\frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k-1 = \frac{4}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$$

$$= O_n - \frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow O_n - U_n = \frac{4}{n}$$

HTWG Konstanz 1.10.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

AUFGABE 7

$$\int_0^{0,75} \frac{9}{9+16x^2}\,dx = \int_0^{0,75} \frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}x\right)^2}\,dx$$

$$\tan(u) = \tfrac{4}{3}x \Rightarrow x = \tfrac{3}{4}\tan(u) \Rightarrow \frac{dx}{du} = \tfrac{3}{4}\left(\tan^2(u)+1\right)$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{3}{4}\left(\tan^2(u)+1\right)}{1+\tan^2(u)}\,du = \int_0^{\pi/4} \tfrac{3}{4}\,du = \left[\tfrac{3}{4}u\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_0^{0,75} \frac{9}{9+16x^2}\,dx \overset{n=3}{\approx} \frac{0,75}{3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{9}{9+16\cdot 0^2} + \frac{9}{9+16\cdot 0,25^2} + \frac{9}{9+16\cdot 0,5^2} + \frac{1}{2}\,\frac{9}{9+16\cdot 0,75^2}\right) = 0,5855$$

$$\text{FEHLER: } \frac{\frac{3}{16}\pi - 0,5855}{\cancel{0,5855}\ \frac{3}{16}\pi} \cdot 100\,\% = 0,6\,\%$$

$$f(x) = 9\left(9+16x^2\right)^{-1} \Rightarrow f(x=0,25) = 0,9$$

$$f'(x) = 9(-1)\left(9+16x^2\right)^{-2}\,32x \Rightarrow f'(x=0,25) = -0,72$$

$$\int_0^{0,75} \frac{9}{9+16x^2}\,dx \approx \int_0^{0,75} 0,9 - 0,72(x-0,25)\,dx$$

$$= \int_0^{0,75} 1,08 - 0,72x\,dx = \left[1,08x - 0,36x^2\right]_0^{0,75} = 0,6075$$

AUFGABE 8

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{e^{i2x}+2+e^{-i2x}}{4} + \frac{e^{i2x}-2+e^{-i2x}}{4}$$

$$= \frac{2e^{i2x}+2e^{-i2x}}{4} = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} = \cos(2x)$$

AUFGABE 9

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{3-4i}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{3-4i}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{3-4i}} = \frac{3-4i}{-4i} = 1 - \frac{3}{4i}$$