HTWG Konstanz 4.10.2022
Fakultät Maschinenbau

# Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

**1.) (3+7 Punkte)** a.) Untersuchen Sie mit der geometrischen Reihe, ob die Folge $a_n$ konvergiert. Wenn ja, bestimmen Sie den Grenzwert a.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \qquad b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

b.) Zeigen Sie mit einer geeigneten Minorante, dass der Grenzwert b größer eins ist. Verwenden Sie dazu eine Partialbruchzerlegung. Weisen Sie zeichnerisch nach, dass $b < 2 = 1 + \int_1^{\infty} x^{-2} dx$ gilt.

**2.) (4 Punkte)** Zeigen Sie mit der komplexen e-Funktion.

$$sin'(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

**3.) (8+7 Punkte)** a.) Welcher z-Wert erfüllt die Bedingungen f(z) = 2i und g(z) = 0? Für welche weitere z-Werte gilt ebenso g(z) = 0?

$$f(z) = z^2 \qquad g(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (3+4i)z + 1 - 3i$$

b.) Bestimmen Sie die Lösungen der beiden Gleichungen und zeichnen Sie diese in der Gausschen Zahlenebene ein.

$$Re(z) - Im(z) \leq |z| \qquad |z - i| \leq Re(z) + Im(z)$$

**4.) (3+8 Punkte)** a.) Zeigen Sie mit nachvollziehbaren Rechenschritten:

$$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\big(x + sin(x)cos(x)\big)$$

b.) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen in ihrem Definitionsbereich. Die Graphen schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Inhalt.

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \qquad y = 1 - \sqrt{1 - (x-3)^2}$$

**5.) (8+7 Punkte)** a.) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn das Integral näherungsweise mit dem Trapezverfahren mit zwei Intervallen berechnet wird? Substituieren Sie beim Bruch den Nenner und ergänzen Sie den Zähler mit 9/4 – 9/4.

$$\int_{-1}^{1} 2 + \frac{x^2 + 3x}{2x + 3} dx$$

b.) Wie ist der Integralwert, wenn die Funktion unter dem Integral bei $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe $T_3$ entwickelt wird?

**6.) (5 Punkte)** Eine Dose (Zylinder mit Boden, Deckel und Mantel) hat den Radius R, die Höhe H und die Oberfläche O. Wie ist H/R zu wählen, damit das Volumen maximal wird?

HTWG Konstanz 4.10.2022
Fakultät Maschinenbau

## Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

# Wiederholklausur Mathematik 1 SS 22

## Aufgabe 1

a.) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$

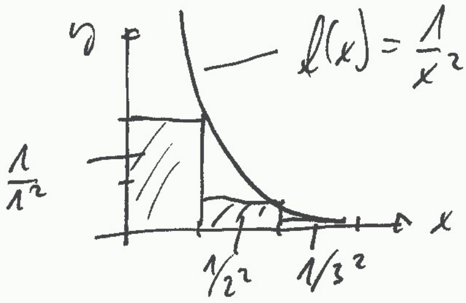
Konvergenz, da $\frac{1}{2} < 1$ $1/2$

$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-0}{1-1/2} = 2$

b.) $b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

$\left( \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow a=1,\ a+b=0 \Rightarrow b=-1 \right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1$




$b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$= 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1 + 1 = 2$

## Aufgabe 2

$\sin'(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)' = \frac{ie^{ix}+ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ix} - e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-ix}}{2i}$

$= \frac{e^{i(x+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(x+\frac{\pi}{2})}}{2i} = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2x}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-i2x}}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

## Aufgabe 3

a.) $z^2 = 2i$ $\quad u = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\sqrt{u} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1+i$

HTWG Konstanz 4.10.2022
Fakultät Maschinenbau

# Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{u} = 1+i$

$z^3 - (3+i)z^2 + (3+4i)z + 1 - 3i = (z-1-i)(z^2 - 2z + 1 + 2i)$

$z^3 - (1+i)z^2$

$-2z^2 + (3+4i)z$

$-2z^2 + (2+2i)z$

$(1+2i)z + 1 - 3i$

$(1+2i)z + 1 - 3i$

$0$

$\Rightarrow z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$

$z_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+2i)}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2i}$

$u = -2i = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$

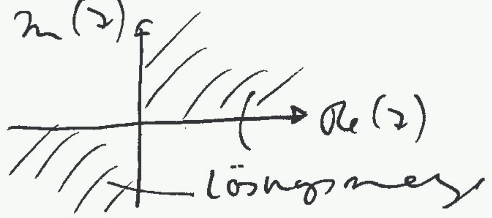
$\sqrt{u} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = -1 + i$

$z_{2/3} = 1 \pm (-1+i) \Rightarrow z_2 = i \quad z_3 = 2 - i$

b.) $a - b \leq \sqrt{a^2+b^2}$

$a^2 - 2ab + b^2 \leq a^2 + b^2$

$0 \leq 2ab$




$|a + ib - i| \leq a + b$

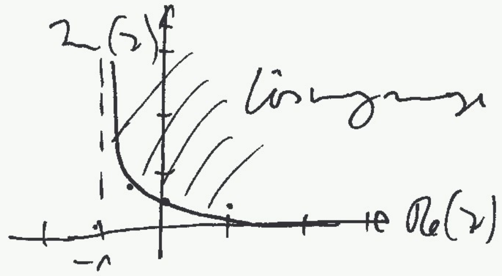
$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} \leq a + b$

$a^2 + b^2 - 2b + 1 \leq a^2 + 2ab + b^2$

$2ab + 2b \geq 1$

$b \geq \frac{1}{2a+2} \quad a > -1$

$b \leq \frac{1}{2a+2} \quad a < -1 \quad ↯ \quad 0 \leq a + b \leq a + \frac{1}{2a+2} < 0$ für $a < -1$




Aufgabe 4

a.) $\int \cos^2(x)\,dx = \int 1 - \sin^2(x)\,dx = \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx$

HTWG Konstanz 4.10.2022
Fakultät Maschinenbau

## Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

Wiederhol Klausur Mathematik 1 SS 22

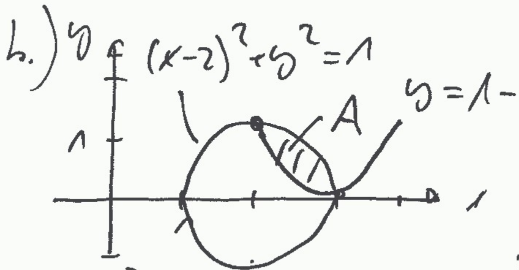
$$= x - \left(-\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\,dx\right)$$

2/2

$$= x + \sin(x)\cos(x) - \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,dx = x + \sin(x)\cos(x)$$

b.)




Alternative:
Viertelkreis: $A^{*} = \frac{\pi}{4}$
mit Radius 1
Quadrat − Viertelkreis
$A^{**} = 1 - \frac{\pi}{4}$
$A = 1 - 2A^{**} = \frac{\pi}{2} - 1$

$$A = \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}\,dx - \int_2^3 1 - \sqrt{1-(x-3)^2}\,dx$$

$u = x-2 \quad \frac{du}{dx} = 1 \qquad v = x-3 \quad \frac{dv}{dx} = 1$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du - \int_2^3 1\,dx + \int_{-1}^0 \sqrt{1-v^2}\,dv$$

$u = \sin(w) \quad \frac{du}{dw} = \cos(w) \qquad v = \sin(w) \quad \frac{dv}{dw} = \cos(w)$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(w)}\cos(w)\,dw - 1 + \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-\sin^2(w)}\cos(w)\,dw$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2(w)\,dw - 1 + \int_{-\pi/2}^0 \cos^2(w)\,dw$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(w + \sin(w)\cos(w)\right)\right]_0^{\pi/2} - 1 + \left[\frac{1}{2}\left(w + \sin(w)\cos(w)\right)\right]_{-\pi/2}^0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - 1 + \left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^1 2 + \frac{x^2+3x}{2x+3}\,dx = \int_{-1}^1 2\,dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2+3x}{2x+3}\,dx$$

$u = 2x+3 \quad \frac{du}{dx} = 2 \qquad u^2 = 4x^2+12x+9 = 4\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)$

$$= 4 + \int_1^5 \frac{x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}{2u}\,du = 4 + \int_1^5 \frac{u^2/4 - 9/4}{2u}\,du$$

HTWG Konstanz 4.10.2022
Fakultät Maschinenbau

## Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$= 4 + \int_1^5 \frac{u}{8}\, du - \frac{9}{8}\int_1^5 \frac{1}{u}\, du$$

$$= 4 + \left[\frac{1}{16}u^2\right]_1^5 - \frac{9}{8}\left[\ln(u)\right]_1^5 = 3{,}6894$$

$$\int_{-1}^{1} 2 + \frac{x^2+3x}{2x+3}\, dx \approx \frac{1}{2}\cdot 1\left(2 + \frac{(-1)^2+3(-1)}{2(-1)+3}\right) + 1\left(2 + \frac{0^2+3\cdot 0}{2\cdot 0+3}\right) + \frac{1}{2}\, 1\left(2 + \frac{1^2+3\cdot 1}{2\cdot 1+3}\right) = 3{,}4$$

Fehler: $\left(1 - \frac{3{,}4}{3{,}6894}\right) 100\,\% = 7{,}8\,\%$

b.) $f(x) = 2 + \frac{x^2+3x}{2x+3}$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+3) - (x^2+3x)2}{(2x+3)^2} = 1 - 2\frac{x^2+3x}{(2x+3)^2}$$

$$f''(x) = -2\,\frac{(2x+3)(2x+3)^2 - (x^2+3x)2(2x+3)\cdot 2}{(2x+3)^4}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2x+3} - 4\frac{x^2+3x}{(2x+3)^3}\right) = -\frac{18}{(2x+3)^3}$$

$$f'''(x) = 54\cdot 2\,\frac{1}{(2x+3)^4} = \frac{108}{(2x+3)^4}$$

$$T_3 = 2 + \frac{1}{1!}\,1\cdot x + \frac{1}{2!}\,\frac{-18}{3^3}x^2 + \frac{1}{3!}\,\frac{108}{3^4}x^3 = 2 + x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3$$

$$\int_{-1}^{1} 2 + \frac{x^2+3x}{2x+3}\, dx \approx \int_{-1}^{1} 2 + x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3\, dx$$

$$= \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^4\right]_{-1}^{1} = 3{,}\bar{7}$$

Aufgabe 6

$$\frac{h}{r} = \frac{O}{2\pi r^2} - 1 = \frac{O}{2\pi\frac{O}{6\pi}} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{O}{2\pi r} - r$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2\left(\frac{O}{2\pi r} - r\right) = \frac{O}{2}r - \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{O}{2} - 3\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$$