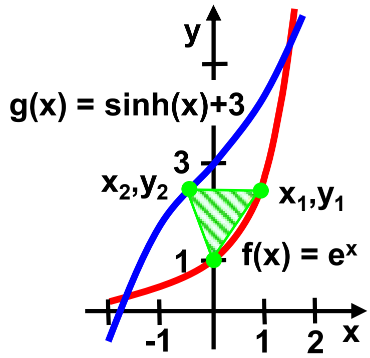
HTWG Konstanz 8.7.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

1.) (4+2+6 Punkte) Die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \sinh(x)+3$ schließen mit dem Punkt (0,1) das dargestellte Dreieck mit dem Flächeninhalt A ein.



a.) Geben Sie A in Abhängigkeit von x_2 an. Zeigen Sie, dass für $x_2 = -0.1403$ der Flächeninhalt A ein Extremwert besitzt.
b.) Bestimmen Sie mit einer Diskretisierung näherungsweise die zweite Ableitung von A bei $x_2 = -0.1403$ mit der Schrittweite $h = 0.1403$.
c.) Ersetzen Sie g(x) durch ihre Tangente bei x = 0. Für welches x_2 hat dann der Flächeninhalt seinen Extremwert. Verwenden Sie beim Newtonverfahren einen Iterationsschritt und den Startwert null.

2.) (10 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert a. Mit der Funktion $f(x) = \ln(x)/(x-1)$ und einer Taylorreihe von ln(x) um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist der Grenzwert b anzugeben.

$$a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{nk+2k^2}{n^2k} \qquad b = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

3.) (4 Punkte) Bestimmen Sie mit der komplexen e-Funktion die Konstante a.

$$4cos^3(x) - 3cos(x) = cos(ax)$$

Beachten Sie: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

4.) (7+8 Punkte) a.) Für welche z-Werte außer z = 1 ist die Bedingung f(z) = g(z) erfüllt?

$$f(z) = 2 - z \qquad g(z) = \frac{1+3i(1-z)}{z^2}$$

b.) Bestimmen Sie die Lösungen der beiden Gleichungen und zeichnen Sie diese in der Gausschen Zahlenebene ein.

$$\left(z\sqrt[4]{8}\right)^{2/3} = 1 + i \qquad |Re(z) + z| = |z - Im(z)|$$

5.) (7+4 Punkte) Die Integralgleichung f(b) ist gegeben. Falls das Newtonverfahrens angewendet wird, ist zwei als Startwert zu wählen und eine Iteration durchzuführen.

$$f(b) = \int_1^b \frac{ln(x)}{x\left(1 + ln(x)\right)} dx$$

a.) Bestimmen Sie die Lösung von f(b) = 1-ln(2).
b.) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn f(2) mit dem Trapezverfahren und zwei Intervallen berechnet wird?

6.) (5 Punkte) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung F(z) = 0.

$$F(z) = \int_0^{\infty} (t - e^{-2t})e^{-zt}\, dt$$

7.) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert a.

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x}{e^x - 1 - x}$$

HTWG Konstanz 8.7.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

Klausur Mathematik 1 SS 22

1/2

Aufgabe 1

a.) $y_2 = \sinh(x_2) + 3 = y_1 = e^{x_1}$

$\Rightarrow x_1 = \ln(\sinh(x_2) + 3)$

$A = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\ln(\sinh(x_2)+3) - x_2\right)(\sinh(x_2) + 2)$

$A' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sinh(x_2)+3}\cosh(x_2) - 1\right)(\sinh(x_2)+2)$

$+ \frac{1}{2}\left(\ln(\sinh(x_2)+3) - x_2\right)\cosh(x_2)$

$\Rightarrow A'(-0{,}1403) = 0$

b.) $A'' \approx \frac{A'(0) - A'(-0{,}1403)}{0{,}1403}$

$= \frac{1}{0{,}1403}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0+3}1 - 1\right)(0+2) + \frac{1}{2}\left(\ln(0+3) - 0\right)\cdot 1 - 0\right) = -0{,}18368$

c.) $t(x) = \sinh(0) + 3 + \cosh(0)(x - 0) = 3 + x$

$y_2 = 3 + x_2 = y_1 = e^{x_1}$

$\Rightarrow x_1 = \ln(3 + x_2)$

$A = \frac{1}{2}\left(\ln(3+x_2) - x_2\right)(2 + x_2)$

$A' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3+x_2} - 1\right)(2+x_2) + \left(\ln(3+x_2) - x_2\right)\cdot 1\right)$

$A'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(3+x_2)^2}(2+x_2) + \left(\frac{1}{3+x_2} - 1\right)1 + \frac{1}{3+x_2} - 1\right.$

$x_{2,1} = x_{2,0} - \frac{A'(x_{2,0})}{A''(x_{2,0})} = 0 - \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}-1\right)2 + \ln(3) - 0\right)}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3^2}2 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right)}$

$= 0 - \frac{-0{,}1174}{-0{,}7778} = -0{,}1505$

Aufgabe 2

a.) $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{nk + 2k^2}{n^2 k} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1)\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$

$= 1 + \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2$

HTWG Konstanz 8.7.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{g(x)}{x-1}$$

$$g(x) = \ln(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad g'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad g''''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^{k-1}}{k}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{\ln(2)}{2-1} = \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = b$$

Aufgabe 3

a.)
$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 - 3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{4}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right) - 3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + \frac{3}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) - 3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} = \cosh(3x) \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Aufgabe 4

a.)
$$2 - z = \frac{1+3i-3iz}{z^2}$$

$$\Rightarrow \quad z^3 - 2z^2 - 3iz + 1 + 3i = 0$$

$$z^3 - 2z^2 - 3iz + 1 + 3i = (z-1)(z^2 - z - 1 - 3i)$$

$$\begin{array}{l} z^3 - z^2 \\ \hline -z^2 - 3iz \\ -z^2 + z \\ \hline -3iz - z + 1 + 3i \\ -3iz - z + 1 + 3i \\ \hline 0 \end{array}$$

$$z^2 - z - 1 - 3i = 0$$

$$\Rightarrow z_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4+12i}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5+12i}}{2}$$

HTWG Konstanz 8.7.2022

Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

Klausur Mathematik 1 SS 22

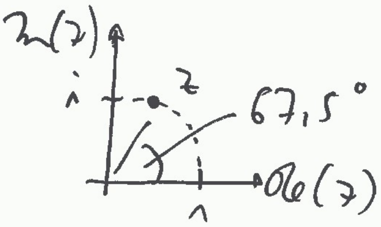
$u = 5 + 12i = 13\left(\cos(1{,}176) + i\left(\sin(1{,}176)\right)\right)$ 2(8)

$\sqrt{u} = \sqrt{13}\left(\cos(0{,}588) + i\sin(0{,}588)\right) = 3 + 2i$

$$z_{2/3} = \frac{1 \pm (3+2i)}{2} \Rightarrow z_2 = 2 + i \ , \ z_3 = -1 - i$$

b.) $\left(z\sqrt[4]{8}\right)^{2/3} = z^{2/3}\left(\sqrt[4]{8}\right)^{2/3} = z^{2/3}\sqrt{2} = 1 + i$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3/2}$$



$$u = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = u^{3/2} = 1^{3/2}\left(\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$$

$|a + a + ib| = |a + ib - b|$

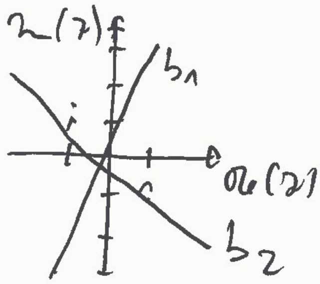
$\Rightarrow |2a + ib| = |a - b + ib|$

$\Rightarrow 4a^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2$

$\Rightarrow b^2 - 2ab - 3a^2 = 0$

$$\Rightarrow b_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{2}$$

$$= a \pm 2a \qquad \Rightarrow b_1 = 3a \ , \ b_2 = -a$$



Aufgabe 5

a.) $u = 1 + \ln(x) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$$f(b) = \int_1^{1+\ln(b)} \frac{u-1}{x\,u}\,x\,du = \int_1^{1+\ln(b)} 1 - \frac{1}{u}\,du$$

$$= \left[u - \ln(u)\right]_1^{1+\ln(b)} = 1 + \ln(b) - \ln\left(1 + \ln(b)\right) - 1$$

$$= \ln(b) - \ln\left(1 + \ln(b)\right) = 1 - \ln(2)$$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{aligned} \ln(b) &= 1 \\ 1 + \ln(b) &= 2 \end{aligned}\right\} b = e$

Newtonverfahren

$$g(b) = \ln(b) - \ln\left(1 + \ln(b)\right) - 1 + \ln(2)$$

HTWG Konstanz 8.7.2022

Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$g'(b) = \frac{\ln(b)}{b(1+\ln(b))}$$

$$b_1 = b_0 - \frac{g(b)}{g'(b)} = 2 - \frac{\ln(2) - \ln(1+\ln(2)) - 1 + \ln(2)}{\frac{\ln(2)}{2(1+\ln(2))}}$$

$$= 2{,}6854$$

b.) $\ell(2) = \ln(2) - \ln(1+\ln(2)) = 0{,}1666$

$$\ell(2) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(1)}{1(1+\ln(1))} + \frac{\ln(3/2)}{3/2(1+\ln(3/2))} + \frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{2(1+\ln(2))}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + 0{,}1923 + 0{,}1023\right) = 0{,}1473$$

Fehler: $\frac{|0{,}1473 - 0{,}1666|}{0{,}1666} 100\% = 11{,}6\,\%$

Aufgabe 6

$$F(z) = \int_0^\infty (t - e^{-2t}) e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty t\, e^{-zt}\,dt - \int_0^\infty e^{-(2+z)t}\,dt$$

$$= \left[t\left(-\frac{1}{z}\right)e^{-zt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1\left(-\frac{1}{z}\right)e^{-zt}\,dt + \frac{1}{2+z}\left[e^{-(2+z)t}\right]_0^\infty$$

$$= 0 + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt - \frac{1}{2+z}$$

$$= \frac{1}{z}\left[\left(-\frac{1}{z}\right)e^{-zt}\right]_0^\infty - \frac{1}{2+z} = -\frac{1}{z^2}(0-1) - \frac{1}{2+z}$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2+z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 - z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\ , \quad z_2 = -1$$

Aufgabe 7

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot e^x + x\,e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1e^x + xe^x}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(2+x)}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 + x = 2$$