

Wirtschaft

Verlustbeschränkte Finanzinvestitionen

von Prof. Dr. Leo Schubert

1. Einleitung

Finanzinvestitionen sollten möglichst rentabel und gleichzeitig möglichst sicher sein. Überdurchschnittliche Renditen werden i.d.R. jedoch durch überdurchschnittliche Risikobereitschaft erkaufte. Die Erkenntnis "There is no free lunch" drückt das nüchterne Verhältnis von Rendite und Risiko aus. Um den individuellen Neigungen von Investoren bzw. deren Risikobereitschaft mehr zu entsprechen, werden effiziente Mischungen zu unterschiedlichen Anlageinstrumenten angeboten (vgl. z.B. "Stressfaktoren" und Themen einzelner Fonds). Die Portfoliooptimierung ermittelt diese effizienten Mischungen.

2. Klassische Portfoliooptimierung versus Target-Shortfall-Probability-Ansatz

Klassische Modelle der Portfoliooptimierung messen das Risiko anhand der Varianz der Renditen. Eine Aktie bzw. ein Portfolio mit hoher Renditevarianz ist dementsprechend risikoreicher als ein Portfolio mit niedriger Renditevarianz. Dieses Risikomaß drückt nicht unbedingt das aus, was Investoren unter "riskant" empfinden. Trotzdem bewirkte die einfache Minimierungsmöglichkeit der Varianz (d.h. des Risikos) im Rahmen einer quadratischen Funktion², dass dieses von Harry Markowitz 1952 erstmals angewandte Kriterium noch heute in der Portfoliooptimierung zur Erfassung des Risikos dominiert. Eine wesentliche Annahme der klassischen Portfoliooptimierung ist die Normalverteilung der Renditen. Diese Annahme ist jedoch nicht stets gegeben. Nicht nur derivative Kapitalmarktinstrumente besitzen extrem schiefe Renditeverteilungen. Auch auf Aktienmärkten werden zunehmend Verteilungsschiefen gemessen.

Deshalb wird ein Kriterium zur Erfassung des Risikos in der Form der **Target-Shortfall-Probability (TSP)** vorgeschlagen, das für Investoren intuitiv verständlich ist, wie z.B. in der Form der "Verlustwahrscheinlichkeit". Darüber hinaus können mit diesem Kriterium Portfolios bestimmt werden, die auch schiefe Renditeverteilungen berücksichtigen. Die nutzentheoretische und empirische Analyse des darauf basierenden Portfolioansatzes ist **Inhalt eines Forschungsprojektes**. Die finanzielle Förderung dieses Projektes erfolgt wiederholt im Rahmen des Forschungsprogramms "Innovative Projekte" des Landes Baden-Württemberg. Ferner wird das Projekt durch das Institut für diskrete Mathematik an der Technischen Universität Darmstadt, als auch von Großbanken durch Datenbereitstellung und praxisrelevante Anregungen unterstützt.

Die klassische Portfoliooptimierung strebt eine Aufteilung des Investitionskapitals auf unterschiedliche Aktien so an, dass eine vorgegebene bzw. erwartete Mindestrendite μ mit minimalem Risiko, d.h. Varianz σ^2 erzielt wird. Variiert man die erwartete Mindestrendite μ , so erhält man eine Menge von effizienten Portfolios, die i.d.R. im μ - σ -Raum dargestellt werden (vgl. Abb. 1: Linie zwischen dem Portfolio mit minimaler Varianz (MVP) und Aktie 1). Bestimmt man alle möglichen Portfolios, so entsteht eine Fläche, deren rechte Seite von einzelnen Aktien begrenzt wird.



Prof. Dr. Leo Schubert

Studienschwerpunkte an der Universität Augsburg: Marketing und Unternehmensforschung
1985: Promotion über Methoden der Datenanalyse

CEO-Stabsstelle einer Großbank
(Zentrale Marketing Aufgaben)
seit 1991: Professur für Marketing an der FH Konstanz

1999: Kurzeitdozentur zu Finanzinnovationen an der Universität von Havanna
Forschungsschwerpunkte: Marktforschung (insb. Kapitalmarkt- und Kundenzufriedenheitsforschung)

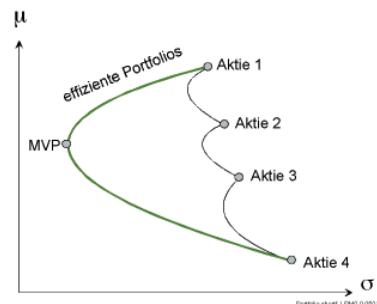


Abb. 1: Portfolios im μ - σ -Raum

Welches der effizienten Portfolios von einem Investor ausgewählt wird, hängt von dessen Risikobereitschaft ab. Risikoscheue Investoren werden ein effizientes Portfolio näher beim MVP wählen, risikofreudige dagegen näher bei Aktie 1.

Neuere Ansätze⁴ versuchen die Schiefe von Verteilungen bei der Portfolio-optimierung zu berücksichtigen. Eine zentrale Stellung nehmen dabei die sog. **Lower Partial Moments (LPM)** ein. Während die LPM höherer Ordnung primär aus theoretischer Sicht ergänzend Interesse fanden⁵, wurden die niedrigerer Ordnung bereits einzeln praktisch getestet.

Das LPM der Ordnung 0 (LPM^0) ist mit der **Target-Shortfall-Probability (TSP)** identisch. Bereits heute wird dieses Maß deskriptiv bei der Kontrolle des Risikos im Asset-Liability-Management der Pensionsfonds eingesetzt. LPMs beziehen sich, im Gegensatz zu den Parametern der klassischen Portfolio-optimierung, ausschließlich auf den Bereich der Wahrscheinlichkeitsfunktion unterhalb einem vorgegebenen Target τ (vgl. Abb. 2). Ein Target stellt eine Renditeschwelle dar, deren Unterschreitung möglichst selten vorkommen soll.

Die TSP drückt die Wahrscheinlichkeit $P(R < \tau)$ aus, d.h. die Wahrscheinlichkeit, mit der die Rendite eines Portfolios unter der vorgegebenen Target-Rendite τ liegt.

Bei normalverteilten Renditen R , also $R \sim N(\mu, \sigma)$, kann diese Vorgabe des Investors als lineare Funktion ($\mu \geq \tau - z_\alpha \sigma$) in der (μ, σ) -Portfoliodarstellung eingezeichnet werden (vgl. Abb. 3). Der Faktor z_α ist der Fraktilwert der $N(0,1)$ -Verteilung zur Wahrscheinlichkeit α . P_0 ist das Portfolio mit dem höchsten Renditeerwartungswert, das der TSP-Restriktion genügt und P_u das mit dem geringsten Renditeerwartungswert. Alle Portfolios auf dieser Linie unterschreiten den Target genau mit der Wahrscheinlichkeit α .

Das intuitiv verständliche und Investorenängste besser charakterisierende Risikomaß der TSP besitzt den Nachteil, dass die Verteilung der Renditen unterhalb der Target-Rendite beliebig günstig bzw. ungünstig verlaufen kann. Dieser Mangel wurde durch die Vorgabe von m Targets und entsprechenden Shortfall-Probabilities reduziert. Diese Erweiterung zu einem **TSP-Vektor** $[\tau, \alpha]$ ist in Abb. 4 dargestellt. Bei Annahme normalverteilter Renditen (ohne Schiefe), wie in Abb. 4, wäre nur

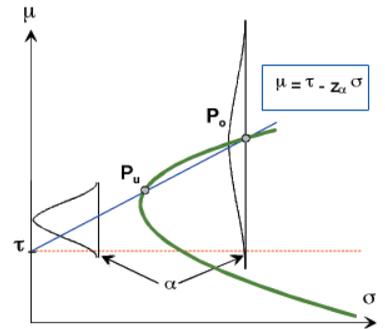


Abb. 3: TSP

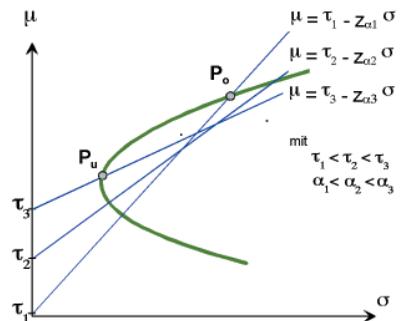


Abb. 4: TSP-Vektor

der Bereich oberhalb aller Geraden zulässig. Das Portfolio P_0 besitzt unter allen zulässigen den höchsten Renditeerwartungswert und P_u ist das zulässige Portfolio mit der geringsten Rendite bzw. Varianz.

3. Die Mean-TSP-Vektor-Portfolio-optimierung

Die klassische Portfoliooptimierung erzeugt sog. Mean-Variance-Portfolios, da die Varianz unter Einhaltung einer vorgegebenen Mindestrendite minimiert wird. Analog kann das Modell zur Bestimmung eines Portfolios P_0 (vgl. Abb. 4) als Mean-TSP-Vektor-Portfolio bezeichnet werden.

Das adäquate Optimierungsmodell⁶ zur Maximierung des Renditeerwartungswertes unter Berücksichtigung aller TSP-Restriktionen ist diskret und linear:

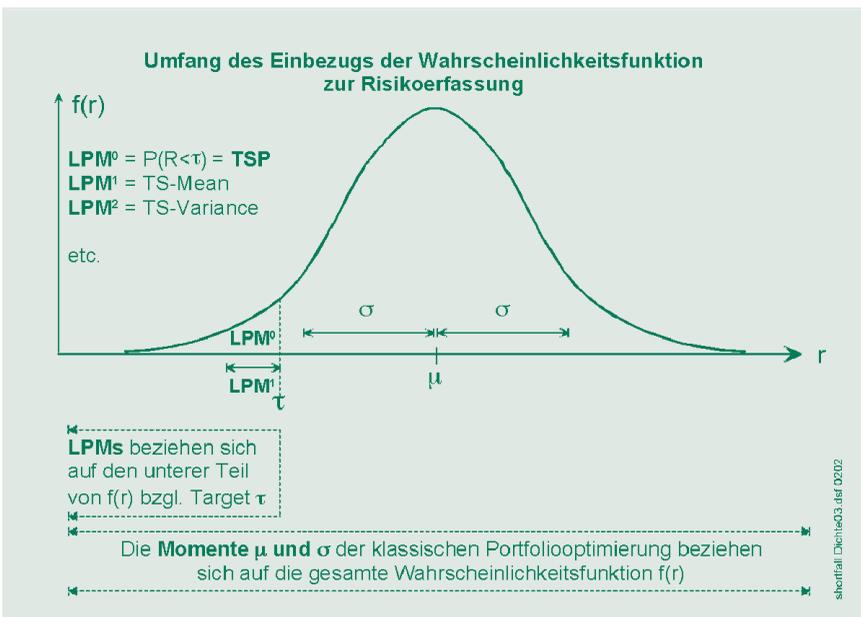


Abb. 2: Bezugsbasis klassischer- und LPM-Risikokriterien

Maximiere

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ mit } x_i \geq 0, (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i r_{it} \leq (1 - \delta_{tk}) M + \tau_k, (t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i r_{it} \geq \tau_k + \varepsilon - \delta_{tk} M, (t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, m)$$

$$1/T \sum_{t=1}^T \delta_{tk} \leq \alpha_k, (k = 1, \dots, m)$$

mit

- n: Anzahl Aktien
 m: Anzahl Targets
 T: Anzahl Renditezeiträume mit
 x_i : Gewicht der Aktie i ($i=1, \dots, n$) im Portfolio
 μ_i : Renditeerwartungswert der Aktie i ($i=1, \dots, n$)
 r_{it} : historische Rendite der Aktie i ($i=1, \dots, n$) im Zeitintervall t ($t=1, \dots, T$)
 δ_{tk} : binäre Variable ($t=1, \dots, T$) ($k=1, \dots, m$)
 ε : sehr kleine Zahl
 M: sehr große Zahl
 α_k : TSP k ($k=1, \dots, m$) mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$
 τ_k : Target k ($k=1, \dots, m$) mit $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$.

3.1 Nutzentheorie

Das Mean-TSP-Vektor Portfolio Modell impliziert einen Investor, dessen Nutzenfunktion $u(R)$ den Nutzenerwartungswert⁷ $E(u(R)) = \mu - g_1 \alpha_1 - g_2 \alpha_2 - \dots - g_m \alpha_m$ besitzt. Der Faktor g_k drückt eine individuelle Reduktion des Nutzens des Investors bei Unterschreitung des Targets τ_k ($k = 1, \dots, m$) aus. Dieser kann auch als individueller Aufschlag bei Überschreiten einer Wunschrendite eingesetzt werden. Die zugrundeliegende Nutzenfunktion verletzt das sog. Bernoulliprinzip bzgl. der Existenz der Sicherheitsäquivalente an den Stellen τ_1 bis τ_m . Dieser entscheidungstheoretische Makel wird jedoch durch weitere Vorteile für die praktische Anwendung kompensiert. Im Gegensatz zu den klassischen Modellen, bei denen das Risikoverhalten (risikoscheu) modellimplizit ist, wird beim Mean-TSP-Vektor-Modell durch die TSPs und die Faktoren g_k ($k=1, \dots, m$) eines Investors das Risikoverhalten (z.B. risikoscheu, risikoneutral oder risikofreudig) individuell variiert.

3.2 Mean-TSP-Portfolios im μ - σ -Raum

Um den Verlauf der Mean-TSP-effizienten Portfolios im μ - σ -Raum zu untersuchen, wurden anhand von empirischen Daten Berechnungen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen den Verlauf der Mean-TSP-effizienten Linie und geben Hinweise auf die Rechenzeiten⁸, den Umfang von Mean-TSP-Portfolios und die Performance.

Als **Datenbasis** wurden die 86 größten japanischen Aktien ausgewählt, die im Zeitraum vom 5. September 1988 bis zum 1. November 1999 durchgehend an der Börse in Tokyo notiert waren. Zu diesem Zeitraum wurden auf der Basis von den 135 dividenden- und kapitalbereinigten Kursen zu jedem Monat gleitend Jahresrenditen berechnet. Die Anzahl T der dadurch zur Verfügung stehenden Jahresrenditen beträgt 123.

Zum Target von $\tau = -5$, konnten Portfolios zu $\alpha = 0.11$ bis $\alpha = 0.23$ gefunden werden (vgl. Abb. 5). Die Wahr-

scheinlichkeit, höchstens -5% Rendite zu erzielen ist minimal ca. 11% . Das Portfolio mit dem höchsten Renditeerwartungswert, bestehend aus einer Aktie, besitzt ein α von 23% . Dieses Portfolio liegt auf der durch Quadratpunkte angedeuteten Mean-Variance-effizienten Linie.

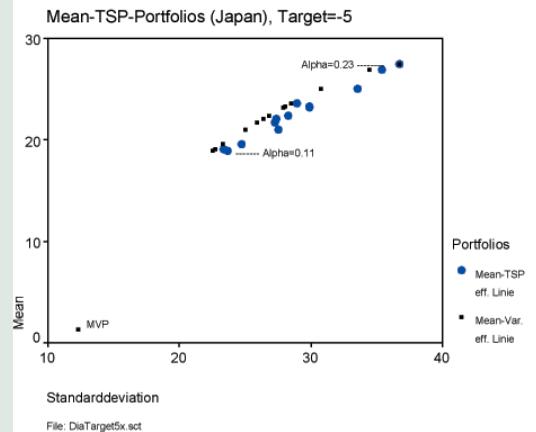


Abb. 5: Mean-TSP-Portfolios

Die durchschnittliche Erhöhung der Standardabweichung ist bei den Mean-TSP-Portfolios ca. 6% (vgl. Abb. 5). Bei Mean-Absolute-Deviation-Portfolios wird die Erhöhung der Standardabweichung im Vergleich zu den effizienten Mean-Variance-Portfolios auf über 10% geschätzt⁹.

Die Auswirkung der Bündelung von vier TSPs zu einem TSP-Vektor auf das resultierende Portfolio ist in Abb. 6 dargestellt. Die effizienten Portfolios zu den einzelnen TSPs sind durch Dreiecke gekennzeichnet, das TSP-Vektor-Portfolio durch einen dicken Punkt. Die vier Elemente des Vektors $[\tau, \alpha]$ sind: $[0, 0.25]$, $[-5, 0.20]$, $[-10, 0.10]$, und $[-20, 0.02]$. Zudem wurden in der unteren Portfoliogruppe der Anteil einer einzelnen Aktie auf maximal 10% des Investitionsbudget beschränkt.

Das Mean-TSP-Vektor-Portfolio ist nicht (wie bei stetigen und normalverteilten Renditen) identisch mit einem der Portfolios, die nur eine TSP berücksichtigen (vgl. Abb. 6 und P_0 in Abb. 4). Offensichtlich bewirkt die Verwendung eines TSP-Vektors auch eine Reduktion der Varianz.

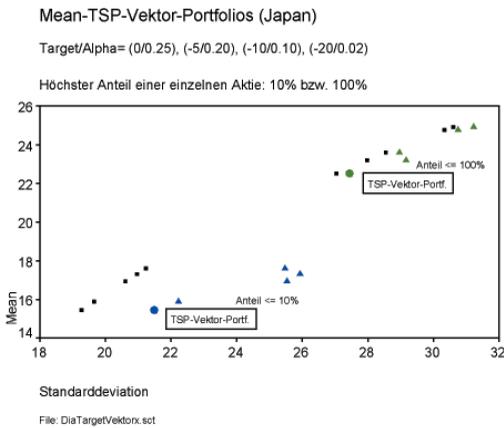


Abb. 6: Mean-TSP-Vektor-Portfolios

gen notwendig, die Anzahl der Aktien im Portfolio zu erhöhen. Die Einführung eines Limits für einzelne Aktien auf einen maximalen Anteil des Investitionsbudgets von p entspricht zwar teilweise der naiven Diversifikation, erzwingt aber ein Portfolio mit mindestens $1/p$ Aktien. Erfahrungsgemäß wird diese Anzahl $1/p$ um 5-10 Aktien überschritten.

Eine interessante Alternative zur Erweiterung der Aktienanzahl im Portfolio ist die Integration der TSP-Vektor-Restriktionen in andere lineare Portfolioansätze¹¹.

Ziel des Tests war, das Rendite- und Shortfall-Verhalten bei Verwendung von TSPs bzw. von Varianz als Risikomaß in einer Baisse als auch in einer Hausse zu vergleichen. Die Ergebnisse aus den zweimal 54 Portfoliooptimierungen sind in der Tab. 2 zusammengefasst.

Wie die Tabelle "Performance" zeigt, scheinen die Mean-TSP-Portfolios in der Baisse keinen Vorteil im Vergleich zu den Mean-Variance-Portfolios zu besitzen.

T=123	Targets	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00
	Alphas	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10 unzulässig
	CPU-Zeit (CPLEX 7.0)	1	1	7	11	11	12	17	22	22	26	41	62	20	50

T=266	Targets	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00	-5.00
	Alphas	0.25	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12 unzulässig
	CPU-Zeit (CPLEX 7.0)	1	4	7	92	527	1121	1866	3040	1300	3877	1325	955	2517	18828

Tab. 1: Rechenzeiten bei T=123 und T= 266

3.3 Die CPU-Rechenzeit

Die Rechenzeit (in Sek.) zur Bestimmung der Mean-TSP effizienten Portfolios ist wesentlich höher als bei klassischen Portfoliomodellen, da das diskrete lineare Modell mittels Branch& Bound Algorithmen gelöst wird. Ein starker Einflussfaktor auf die Rechenzeit ist der Datenumfang. Bei einer Erhöhung von T=123 zu T=266 erhöhte sich die Rechenzeit drastisch.

3.4 Aktienanzahl im Portfolio

Die Verwendung der TSP als Risikokriterium hat zur Folge, dass die Anzahl der Aktien im Portfolio i.d.R. zwischen 5-10 liegt. Diese Eigenschaft wurde auch beim Risikokriterium Skewness festgestellt. Will man diese beschränken bzw. maximieren, so benötigt man lediglich ein paar Aktien¹⁰. Diese Eigenschaft scheint nicht vom Umfang der Aktienanzahl abzuhängen, aus der die Aktien ausgewählt werden sollen.

Da meist rechtliche Bedingungen die Aktiengewichte in einem Aktienfonds limitieren, ist es für diese Anwendun-

3.5 Performance-Test

Für einen ersten Test der Performance wurden aus den Daten zu den 681 größten japanischen Aktien, zufällig 54 mal 50 Aktien ausgewählt aus denen jeweils ein Portfolio selektiert wurde. Im Gegensatz zu klassischen Performance-Tests wurden alle Portfolios zum selben Termin (31.Oktober 1997) berechnet. Die beiden darauf folgenden Jahre waren in der ersten Hälfte durch eine Baisse und in der zweiten durch eine Hausse gekennzeichnet. Um das Mean-TSP-Portfolio mit dem Mean-Variance-Portfolio zu vergleichen wurden die durchschnittlich erzielten Renditen dieser beiden Jahre verwendet.

In der Hausse erzielten die Mean-TSP-Portfolios mit 34.82% im Durchschnitt eine höhere Rendite als die Mean-Variance-Portfolios mit 32.77%.

Obwohl die Unterschiede bei dem Testumfang von 54 Portfolios je Modell nicht signifikant waren, sind sie doch wegen ihrer Plausibilität erwähnenswert. Es scheinen sowohl die TSP-Restriktionen als auch die Minimierung der Renditevarianz die Beschränkung von Risiken zu ermöglichen (vgl. Baisse). Bei stark steigenden Kursen dagegen kann sich die Minimierung der Varianz als Nachteil herausstellen, falls die Renditeverteilungen nicht normal- bzw. symmetrisch verteilt sind.

	Mean-TSP-Portfolios	Mean-Variance-Portfolios
Durchschnittlich erzielte Rendite:		
Baisse:	-10.85%	-10.78%
Haute:	+34.82%	+32.77%
gesamt:	+9.63%	+8.83%

Tab. 2: Performance

4. Zusammenfassung

Die TSP ist als deskriptives Kriterium, z.B. beim Asset-Liability-Management von Pensionsfonds bereits in der Praxis im Einsatz. Aufgrund der Rechenzeiten bietet sich darüber hinaus die Möglichkeit, TSP nicht nur zu kontrollieren, sondern direkt in die Portfoliooptimierung in der Form eines TSP-Vektors zu integrieren. Die Entwicklung immer schnellerer Rechner als auch die Verbesserung der Optimierungssoftware¹² wird dazu beitragen, auch größere Problemstellungen in Zukunft optimieren zu können. Die flexible nutzentheoretische Eigenschaft des TSP-Vektors, seine Kombinationsmöglichkeit mit anderen linearen Modellen, die Erfassung des von Investoren intuitiv empfundenen Risikos, die Möglichkeit auch bei schiefen Verteilungen adäquate Portfolios zu ermitteln und die scheinbar günstigen Performanceeigenschaften zeigen, dass es sich schon heute lohnt längere Rechenzeiten in Kauf zu nehmen. Für nichtinstitutionelle Investoren, die nicht mehr als 10 verschiedene Aktien kaufen wollen, bietet das Mean-TSP-Vektor-Modell durch die stets geringe Anzahl der Aktien im Portfolio einen zusätzlichen Vorteil, den kaum ein anderes Portfoliooptimierungsmodell bieten kann.

Literaturverzeichnis:

- Duvall, R., Quinn, J. L., (1981), Skewness preference in stable markets, *Journal of Financial Research*, Vol. 4, S. 249-263.
- Engesser, K., Schubert, L., (1997), Linear Models for Portfolio Optimisation and Alternative Measures of Risk, Vortrag auf der "1. Conference of the Swiss Society for Financial Market Research", Universität St. Gallen, 10. Oktober 1997.
- Feinstein, C. D., Thapa, M. N., (1993), A Reformation of a Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model, *Management Science*, Vol. 39, S. 1552-1553.
- Kane, A., (1982), Skewness preference and portfolio choice, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, S. 15-26.
- Kariya, T., Tsukuda, Y., Maru, J., (1989), Variation of Stock Prices of Tokyo Stock Exchange (in Japanese), Toyo Keizai Publishing Co..
- King, A. J., (1993), Asymmetric risk measure and tracking models for portfolio optimization under uncertainty, *Annals of Operations Research*, Vol. 45, S. 165-177.
- Konno, H., Gotoh J., (2000), Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis, *Management Science*, Vol. 46, No. 2, Febr., S. 289-301.
- Konno, H., Suzuki, T., Kobayashi, D., (1998), A branch and bound algorithm for solving mean-risk-skewness portfolio models, *Optim. Methods and Softwares*, vol. 10, S. 297-317.
- Konno, H., Shirakawa, H., Yamazaki, H., (1993), A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model, *Annals of Operations Research*, Vol. 45, S. 205-220.
- Konno, H., Yamazaki, H., (1991), Mean – Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Markets, *Management Science*, Vol. 37, May, S. 519-531.
- Markowitz, H., (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, S. 77-91.
- Schubert, L., (1994), Finanzportefeuilles mit Restriktionen, *Operations Research Proceedings*, Springer-Verlag, Berlin, S. 296-300.
- Schubert, L., (1996), Lower Partial Moments in Mean-Varianz-Portefeuilles, *Finanzmarkt und Portfolio Management*, Ausgabe 4, S. 496-509.
- Schubert, L., (2001), Lineare Portfoliooptimierung mit Target-Shortfall-Probability-Vektor, 1st Konstanz Culture Collection, FHK (vgl. http://www.iaf.fhk-konstanz.de/bericht_schubert_portfolio_2001.pdf).
- Sharpe, W. F., (1964), Capital Asset Prices: A Theorie of markets equilibriums under conditions of risk, *Journal of Finance*, Nr. 19, S. 425-442.
- Simkowitz, M. A., Beedles, W. L. (1978), Diversification in a three moment world, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, S. 927-941.
- Stone, B. K., (1973), A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem, *Journal of Financial and quantitative Analysis*, September, S. 621-636.

- 1 Auszug aus: Schubert, L., (2001)
- 2 vgl. Markowitz, H., (1952), Sharpe, W. F., (1964)
- 3 Konno, H., Gotoh, J., (2000), S. 289; Empirische Studie zur Tokyo Stock Exchange von Kariya, T., Tsukuda, Y., Maru, J., (1989).
- 4 vgl. King, A. J., (1993), Konno, H., u.a., (1993, 1998, 2000), Stone, B. K., (1973)
- 5 vgl. z.B. Schubert, L., (1996)
- 6 vgl. Engesser, K., Schubert, L., (1997) bzw. Erläuterungen in Schubert, L., (2001)
- 7 Beweis vgl. Schubert, L., (2001)
- 8 Die Berechnungen wurden mit einem PC (Pentium III 500 MHz / 256 MRAM) mit dem linearen gemischt ganzzahligen Optimizer CPLEX 6.5.1 und z.T. mit CPLEX 7.0 durchgeführt.
- 9 Konno, H. u.a. (1991) bzw. (1993), S. 211
- 10 vgl. Simkowitz, M.A., u.a. (1978), Duvall, R., u.a., (1981), Kane, A., (1982)
- 11 vgl. Konno, H. u.a., (1991), Feinstein, C. D., u.a., (1993)
- 12 Das Institut für Diskrete Mathematik an der Universität Darmstadt erforscht Möglichkeiten, um Problemstellungen mit TSP-Restriktionen schneller zu lösen.

<