Finanz-Portefeuilles mit Restriktionen

Leo Schubert, Konstanz

Zusammenfassung

Zu den klassischen Instrumenten des Risikomangements gehören heute die Portefeuille-Technik von Markowitz[3] bzw. von Sharpe[4]. Diese Techniken streben eine Aufteilung von Investitionskapital auf unterschiedliche Aktien (etc.) an, so daß eine vorgegebene bzw. erwartete Rendite mit minimalem Risiko erzielt wird. Dabei wird angenommen, daß Investoren sich ausschließlich an den Zielen Rentabilität und Sicherheit orientieren. In der Anlagepraxis lassen sich jedoch zunehmend Beispiele finden (z.B.: Öko.Bank, Öko-Invest, Umwelt-fond[2], Öko-Fond, ethische Geldanlagen[1]), in denen offensichtlich ökologische, ethische oder politsche Aspekte etc. bei Anlageentscheidungen eine Rolle spielen. Es wird deshalb versucht, die klassische Theorie durch diverse Beschränkungen der Aktienanteile im Portefeuille zu erweitern.

Die Portefeuille-Technik von Markowitz

Gegeben sei ein Kapital K und n Aktien A_i (i = 1, ..., n) mit den n durchschnittlichen Renditen r_i und der zugehörigen Covarianzmatrix COV. Das Kapital K soll so auf die n Aktien verteilt werden, daß das resultierende Aktienportefeuille eine vorgegebene erwartete Portefeuille-Rendite r_P bei minimalem Risiko (gemessen an der Varianz der Portefeuille-Rendite r_P) erwarten läßt.
Die Streuung von K auf die n Aktien sei durch die im Vektor x zusammengefaßten Anteile

$$x^T = (x_1, ..., x_n) \tag{1}$$

$$\text{mit } (x_1 + ... + x_n) = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0 \quad \text{für } (i = 1, ..., n)$$

beschrieben.
Das Ziel, minimales Risiko bzw. Varianz unter der Nebenbedingung, daß das Portefeuille die Rendite r_p erzielen soll, wird durch Minimierung der zugehörigen Lagrangefunktion

$$L(x,\lambda) = x^T \, COV \, x + \lambda \, (r_P - r^T x) \rightarrow \min \tag{2}$$

mit $r^T = (r_1, ..., r_n)$, x aus (1) und λ: Lagrangeparameter

erreicht.

Geht man vom minimal möglichen Varianzpunkt (MVP) aus und erhöht sukzessive r_P in der Lagrangefunktion, so erhält man jeweils eine optimale Aufteilung x des Kapitals K. Zur jeweiligen Portefeuille-Rendite r_P kann zudem die Portefeuille-Renditen-Varianz

$$var_P = x^T \, COV \, x$$

und die zugehörige Standardabweichung $stabw_P$ bestimmt werden. Die Standardabweichung ist ein klassisches Maß für die Volatilität bzw. für das Risiko.

Berücksichtigung ethischer u. a. Motive

Ethisch begründete Präferenzen eines Investors werden primär in der Form einer Anteilsvorgabe $x_i = c_i$ berücksichtigt. Werden Vorgaben $x_i = c_i$ für i = 1, ..., n gemacht, erübrigt sich mit (1) die Portefeuille-Technik-Anwendung, da auch kein Teil- bzw. Restbudgets verbleibt, das optimal gestreut werden muß.
Effizient wäre jedoch, den Anteil $x_i = c_i$ nicht starr für eine ethisch motivierte Anlage in die Aktie A_i vorzugeben, sondern, falls es aus Rentabilitäts- oder Risikogesichtspunkten sinnvoll ist, einen größeren Anteil als c_i dafür zuzulassen.
Eine mögliche Beschreibung eines derartigen Anlageverhalten könnte durch

$$x_i \geq c_i \quad \text{für } i = 1, ..., n \tag{3}$$

$$\text{mit } (c_1 + ... + c_n) < 1,\ c_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, ..., n$$

oder noch allgemeiner durch Vorgabe einer Rangordnung

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \quad \text{mit (1)} \tag{4}$$

gemäß der ethischen Wertschätzung der Aktien $A_1, ..., A_n$, erfolgen.

Als Lösungsansatz, um derartige ethisch begründete Restriktionen (vgl. (3) und (4)) in den Portefeuille-Ansatz zu integrieren, ist z.B. eine Erweiterung der Lagrangefunktion (2) um zusätzliche Nebenbedingungen möglich. Eine einfachere Vorgehensweise (auch hinsichtlich der Implementierung in bestehende Portefeuille-Software) stellt das im folgenden aufgezeigte Vorgehen dar.

Ausgangspunkt ist der für die Anteile $(x_1, ..., x_n)$ zulässige konvexe Bereich, der für Restriktion (3) bzw. (4) durch folgende Eckpunkte x^l (l = 1, ..., n) begrenzt wird:

$$x^{lT} = (x_1, ..., x_n) = (c_1, ..., c_{l-1}, max_l, c_{l+1}, ..., c_n) \tag{3a}$$

$$\text{mit } max_l = 1 - (c_1 + ... + c_{l-1} + c_{l+1} + ... + c_n) \text{ und (3)}$$

bzw.

$$x^{lT} = (x_1, ..., x_n) = (1/l, ... , 1/l, 0, ..., 0) \quad \text{mit (1)} \tag{4a}$$

In der Matrix

$$X^L = (x^1, ..., x^n) \tag{5}$$

seien die Vektoren bzw. Eckpunkte zu (3a) bzw. (4a) zusammengefaßt.

Abbildung 1-3a verdeutlicht zu n = 2, $c_1 = 0.3$ und $c_2 = 0.1$ gemäß (3a) den zulässigen Bereich für $x^T = (x_1, x_2)$; er wird durch die Eckpunkte $x^{1T} = (0.9, 0.1)$ und $x^{2T} = (0.3, 0.7)$ begrenzt .
In Abbildung 1-4a wird die Rangordnung $x_1 \geq x_2$ zugrundegelegt. Die Eckpunkte sind gemäß (4a) $x^{1T} = (1.0, 0.0)$ und $x^{2T} = (0.5, 0.5)$.

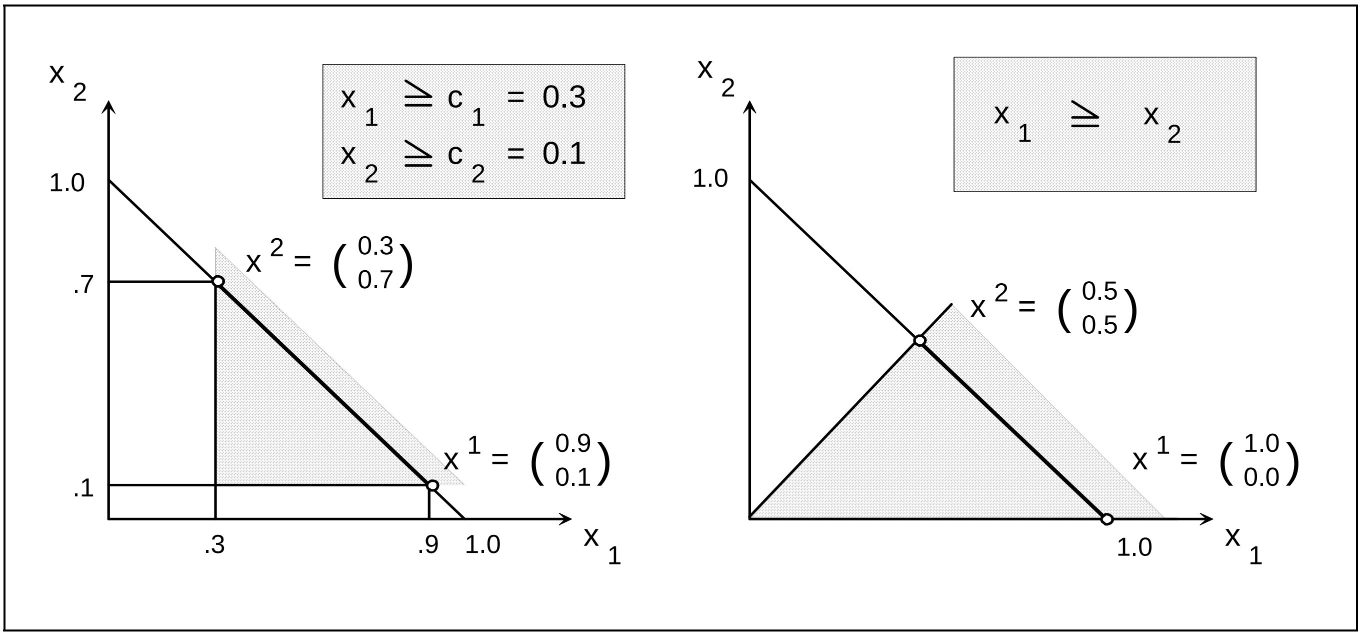

Abbildung 1-3a Abbildung 1-4a

Jeder dieser Eckpunkte x^{lT} (l = 1, ..., n) entspricht einem Portefeuille P^l (l = 1, .., n). Alle gemäß (3) und (4) möglichen Portefeuilles ergeben sich durch entsprechende Aufteilung des Kapitals K auf diese n Portefeuilles, deren durchschnittliche Renditen r^l (l = 1, .., n) und deren zugehörige Kovarianzmatrix COV^L sei.
Die Streuung von K auf Portefeuilles P^1 bis P^n sei nun durch die im Vektor y zusammengefaßten Anteile

$$y^T = (y_1, ..., y_n) \tag{6}$$

$$\text{mit } (y_1 + ... + y_n) = 1 \text{ und } y_l \geq 0 \text{ für } (l = 1, ..., n)$$

ausgedrückt.
Analog zu (2) ergibt die Minimierung der zugehörigen Lagrangefunktion

$$L(y,\lambda) = y^T\, COV^L\, y + \lambda\,(r_P - r^{LT}\, y) \rightarrow \min \tag{7}$$

mit $r^{LT} = (r^1, r^2, ..., r^n)$, y aus (6) und λ: Lagrangemultiplikator

die effizienten Portefeuilles, die den Restriktionen (3) bzw. (4) genügen (vgl. Anhang).

Um r^L und COV^L zu bestimmen, können einerseits direkt die Renditezeitreihenwerte der n Aktien mit den Gewichten aus x^l zu den Renditezeitreihenwerten des Portefeuilles P^l (l = 1, ..., n) kombiniert werden. Daraus lassen sich dann die im Vektor r^L zusammengefaßten durchschnittlichen Portefeuillerenditen r^l (l = 1, ..., n) und die zugehörige Kovarianzmatrix COV^L errechnen. Dies hat den Vorteil, daß lediglich eine Erweiterung der Renditenzeitreihendatenbank vorgenommen werden muß, ohne eine Veränderung bereits bestehender Portefeuille-Software.

Andererseits können die für die Lagrangefunktion (vgl. (7)) benötigten statistischen Größen direkt aus den evtl. aus (2) bereits vorliegenden Werten wie folgt ermittelt werden:

$r^L = r^T X^L$ (vgl. (3a) bzw. (4a) und (5)) (8)

$$COV^L = X^{LT}\ COV\ X^L \tag{9}$$

Abbildung 2 zeigt die möglichen Portefeuilles zu 3 Aktien A_1, A_2 und A_3 mit $x_1 \geq x_2 \geq x_3$.

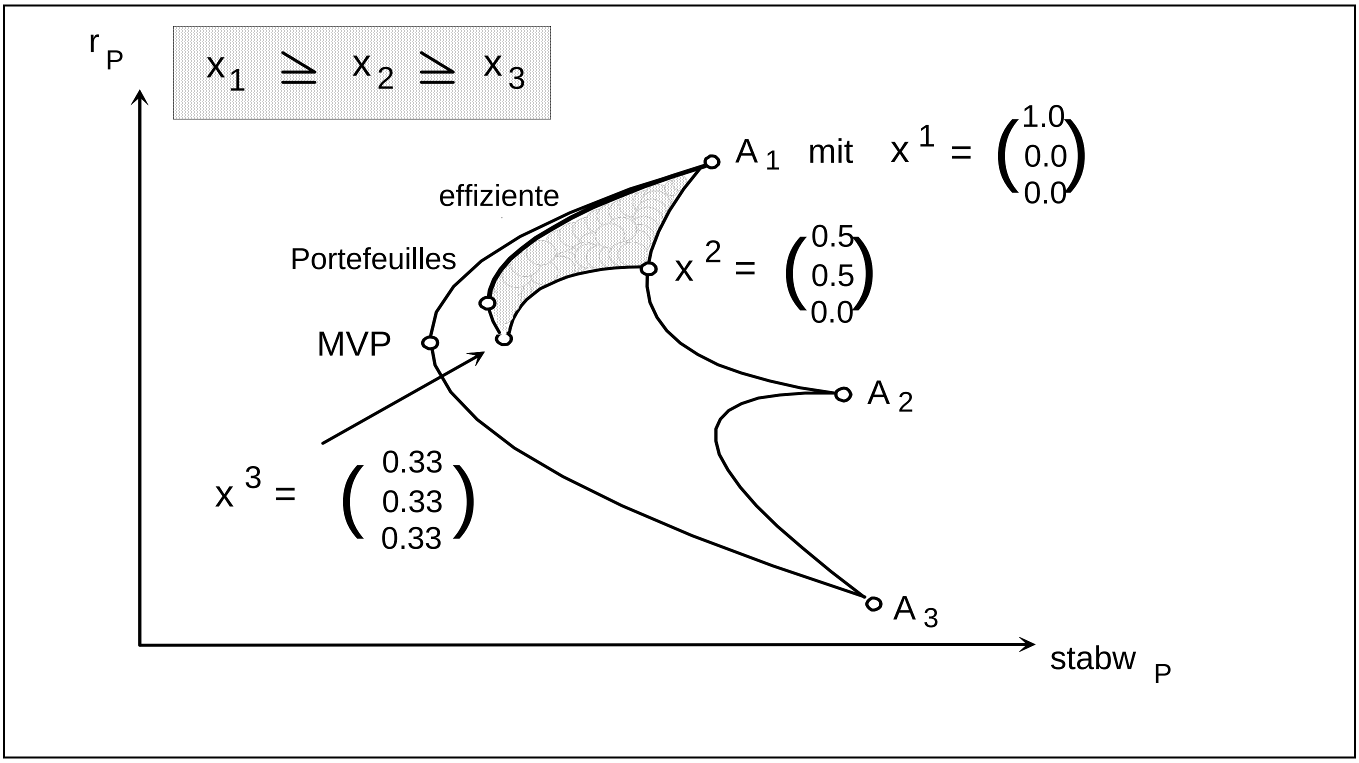

Abbildung 2

Das oben beschiebene Vorgehen ist problemlos auf entwickeltere Portefeuille-Ansätze[5)] übertragbar, da nicht die Algorithmen, sondern nur die Datenbasis angepaßt werden muß.

Anhang

Da der konvexe, linear beschränkte zulässige Bereich für die Anteile $x_1, ..., x_n$, der (3) und (4) genügt, durch die Eckpunkte x^l (l = 1, ..., n) aus (3a) bzw. (4a) aufgespannt wird, kann mit y (aus (6)) die Menge der möglichen Konvexkombinationen dargestellt werden:

$$(x^1, ..., x^n)\, y = X^L\, y$$

Setzt man $X^L y$ statt x in (2) ein, so erhält man

$$L(y,\lambda) = y^T X^{LT} COV\, X^L y + \lambda\, (r_P - r^T X^L y) \rightarrow \min$$

bzw. mit (8) und (9)

$$L(y,\lambda) = y^T COV^L y + \lambda\, (r_P - r^{LT} y) \rightarrow \min.$$

Literatur

1)Alternatives Branchenbuch, ALTOP-Verlag, München, 1993, S. 139
2)Homolka W.: Umweltfonds - Investieren in die Zukunft, Economica Verlag, Bonn 1990
3)Markowitz H. M.: "Portfolio Selection", Journal of Finance, December 1952
4)Sharpe W. F.: "Portfolio Analysis", Journal of Financial and Quantitative Analysis, June 1967
5)Leibowitz M. L., Henriksson R. D.: Portfolio Optimization with Shortfall Constraints, Financial Analysts Journal 45, S. 34 - 41