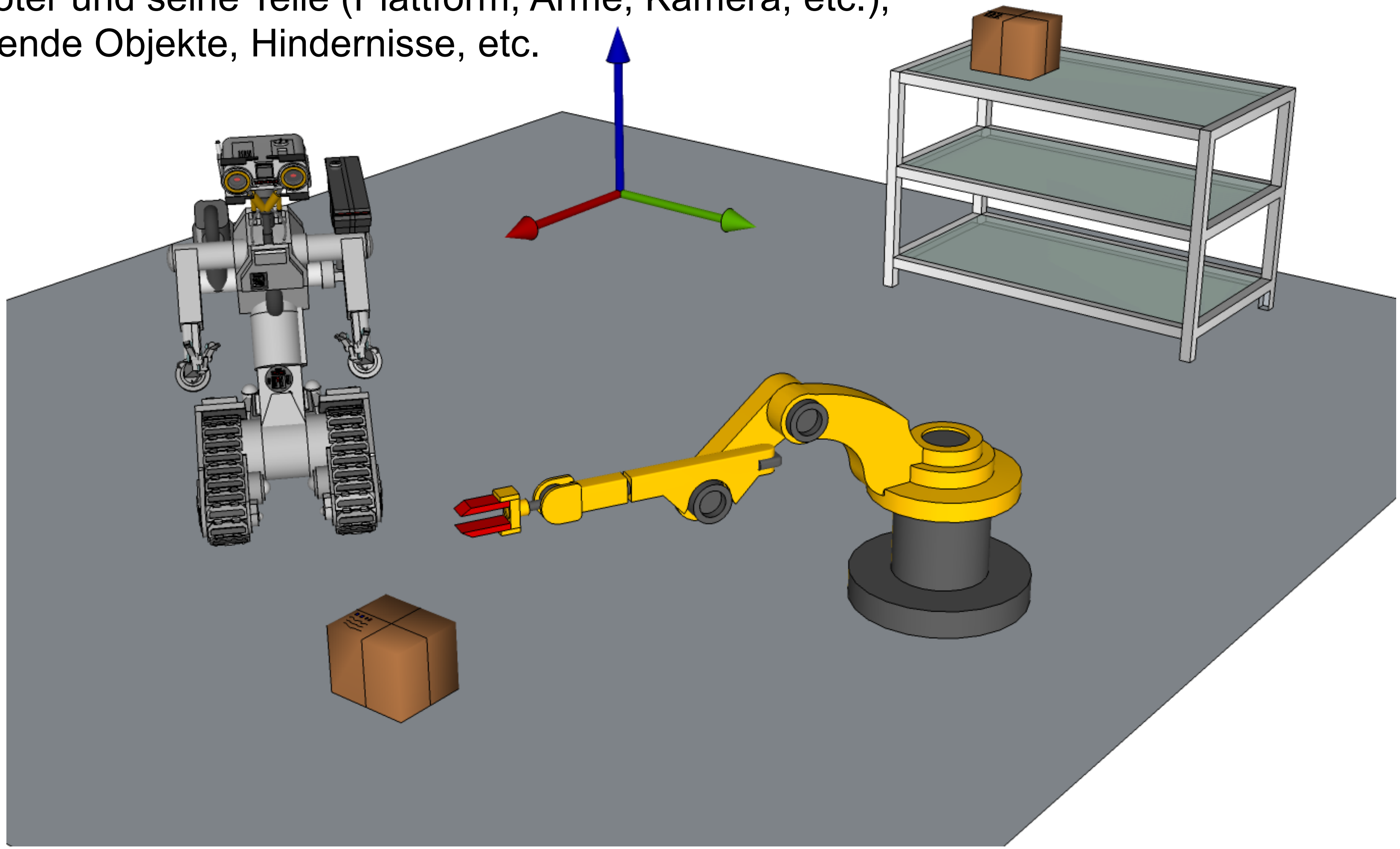
Position und Orientierung

- Grundlagen
  Koordinatensysteme, Punkte und Körper,
  Position und Orientierung
- Transformationen
  Rotation, Translation, homogene Koordinaten,
  Transformationsmatrizen
- 3D-Rotationen und Eulerwinkel
- Bemerkungen
- Roboterkinematik am Beispiel Puma 560
- Weitere Darstellungsarten für Rotationen
  Drehvektoren und Quaternionen
- Geodätische Koordinatensysteme

Position und Orientierung in Robotik-Anwendungen

- In Robotikanwendungen gibt es eine Vielzahl von Objekten, deren Position und Orientierung (Pose) in einem raumfesten Koordinatensystem beschrieben werden müssen
- Objekte: Roboter und seine Teile (Plattform, Arme, Kamera, etc.), zu manipulierende Objekte, Hindernisse, etc.

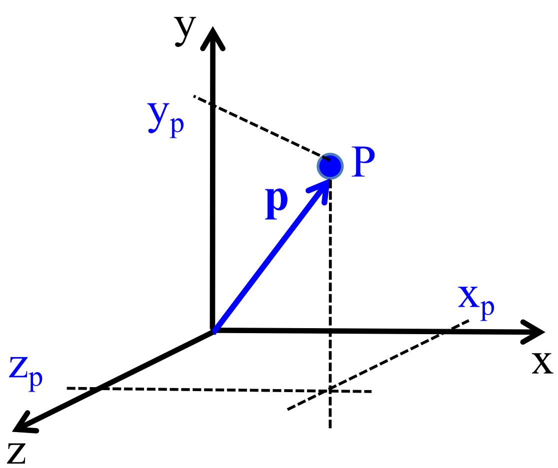


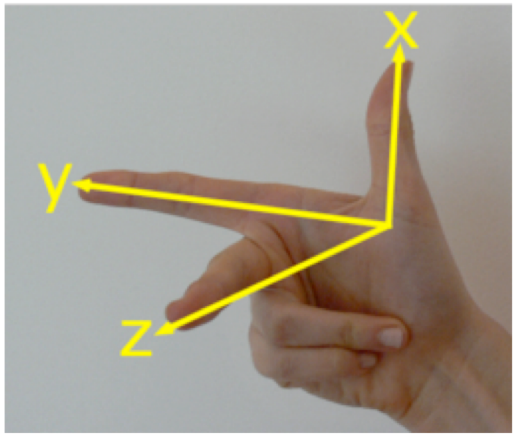
Koordinatensysteme und Punkte

- Ein Punkt P wird dargestellt als Ortsvektor **p** in einem kartesischen Koordinatensystem (KS):

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

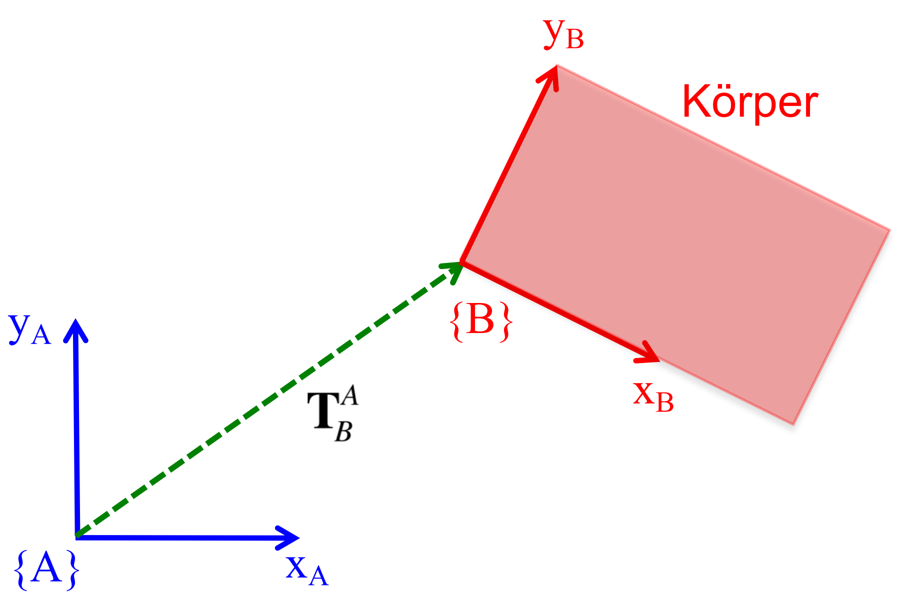
- Ein kartesisches KS besteht aus rechtwinkligen Achsen, die im 3D-Fall ein rechtshändiges KS bilden.





Position und Orientierung von Körpern

- Körper werden mit einem körperfesten KS B versehen.
- Position und Orientierung (Pose) eines Körpers bzgl. eines Bezugs-KS A wird dann beschrieben durch eine Transformation, die das KS A in das KS B überführt.



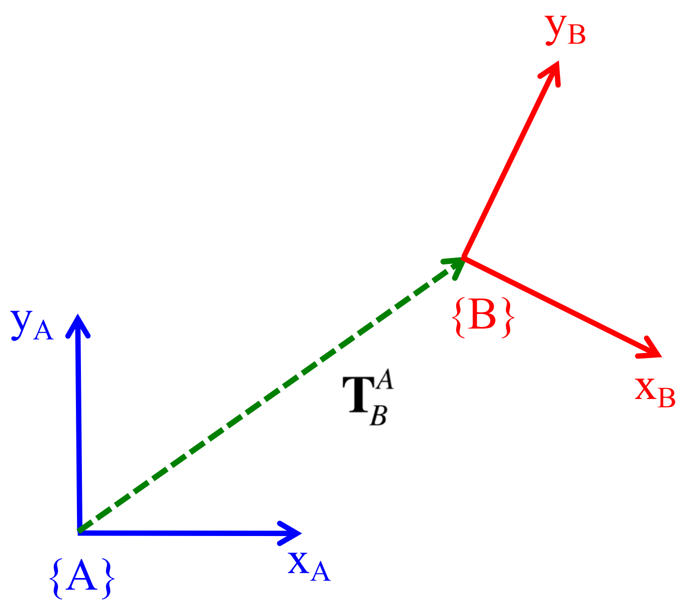
Die Transformation

$$\mathbf{T}_B^A$$

führt das KS A in KS B über.

Transformationen

- Transformation ist zusammengesetzt aus
  - Translation:
    wie ist Ursprung von B gegenüber Ursprung von A verschoben.
  - Rotation:
    wie ist B gegenüber A rotiert.



- Translation wird durch Vektor beschrieben.

- Verschiedene Darstellungen für Rotation:

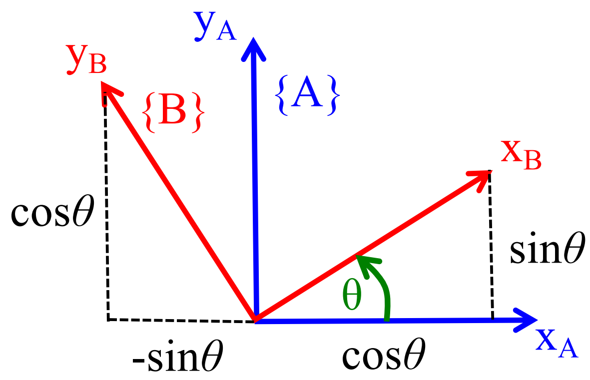
2D	3D
2D-Rotationsmatrix	3D-Rotationsmatrix
Drehwinkel	3 Eulerwinkel
	Drehachse und Drehwinkel
	Quaternionen

- Rotationsmatrix und Translation lassen sich zu einer Transformationsmatrix zusammenfassen. Einfache Rechenregeln für Transformationsmatrizen.

2D-Rotationsmatrix

- Entsteht das 2D-KS B aus dem 2D-KS A durch eine Drehung um den Winkel θ (gegen den Uhrzeigersinn), so lässt sich die Transformation als eine 2D-Rotationsmatrix darstellen:

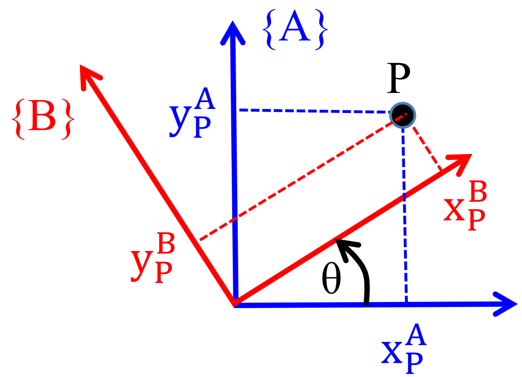
$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



- Die Spaltenvektoren von $\mathbf{T}_B^A$ bilden das KS von B ausgedrückt bzgl. des KS A.

- Koordinatentransformation:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P^B \\ y_P^B \end{pmatrix}$$



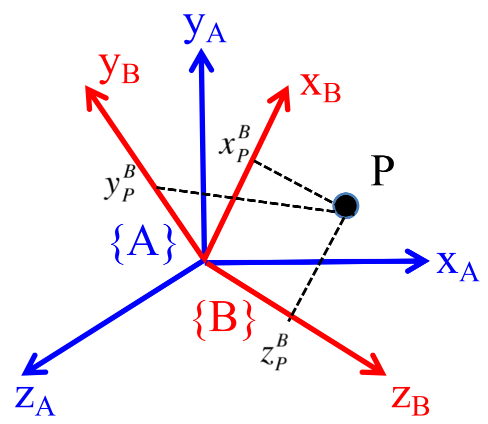
$\mathbf{p}^A$: Darstellung des Punkts P im KS A

$\mathbf{p}^B$: Darstellung des Punkts P im KS B

3D-Rotationsmatrizen

- Entsteht das 3D-KS B aus dem 3D-KS A durch eine beliebige Drehung, so lässt sich die Transformation als eine 3D-Rotationsmatrix darstellen:

$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$



- Die Spaltenvektoren von **R** bilden die Einheitsvektoren von B ausgedrückt bzgl. des KS A.

- Koordinatentransformation:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^B = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P^B \\ y_P^B \\ z_P^B \end{pmatrix}$$

$\mathbf{p}^A$: Darstellung des Punkts P im KS A

$\mathbf{p}^B$: Darstellung des Punkts P im KS B

Eigenschaften von Rotationsmatrizen

- Rotationsmatrizen R sind orthonormal; d.h. die Spaltenvektoren haben die Einheitsnorm und sind orthogonal zueinander:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

- Die Spaltenvektoren bilden ein rechtshändiges System:

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

- Die Menge der Rotationsmatrizen bilden eine (i.a. nicht-kommutative) Gruppe mit

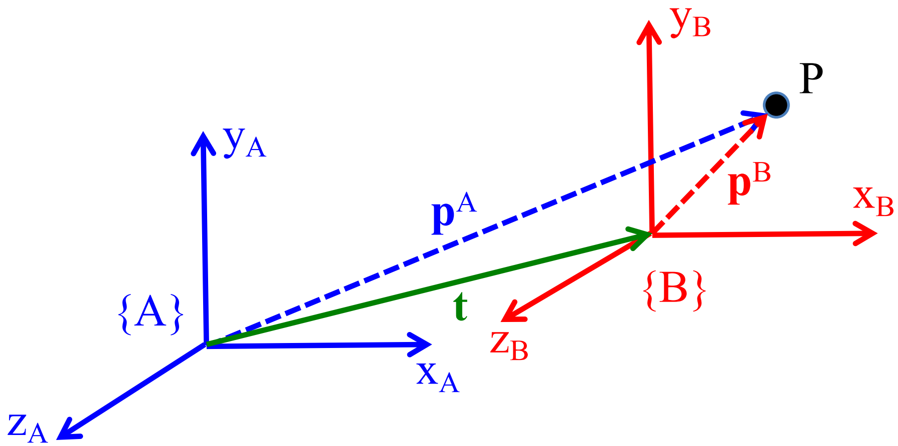
$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

- Wird auch SO(2) (2D) bzw. SO(3) (3D) genannt (special orthogonal group)

Translation von Koordinatensysteme

- Entsteht das KS B aus dem KS A durch eine Translation (Verschiebung) um den Vektor **t**, dann gilt für die Koordinatentransformation:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{p}^B + \mathbf{t}$$



Homogene 3D-Translationsmatrix

- Wir führen homogene Koordinaten ein:

$$\mathbf{p} = (x, y, z)^T \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}} = (x, y, z, 1)^T$$

- Damit lässt sich die Translation als Matrix schreiben

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{p}^B + \mathbf{t}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3*3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^B \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^A = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3*3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^B$$

- Wir führen die Abk. $\mathbf{Tl(t)}$ für eine Translationsmatrix mit Translationsvektor $\mathbf{t}$ ein:

$$\mathbf{Tl}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3*3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

Homogene 3D-Rotationsmatrix

- Um auch Punkte mit homogenen Koordinaten rotieren zu können, erweitern wir Rotationsmatrizen $\mathbf{R}$ zu homogenen Rotationsmatrizen $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3*1} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

- Koordinatentransformation mit homogenen Koordinaten:

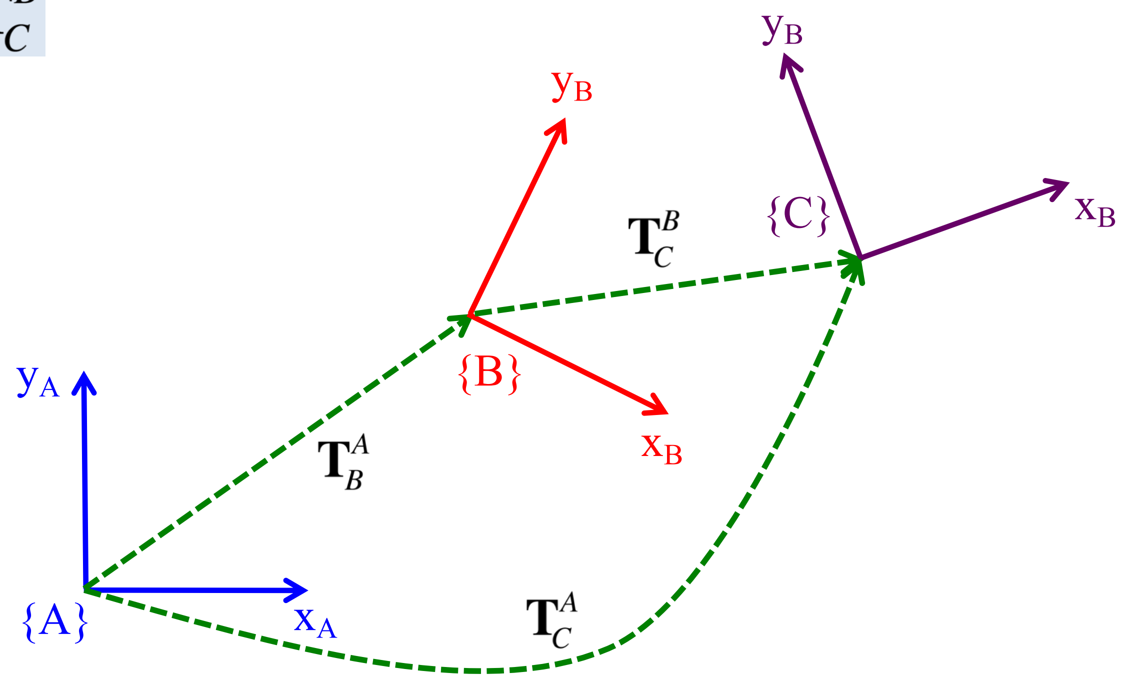
$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3*1} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{p}^B \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^A = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{p}}^B$$

Komposition von Transformationen

- Eine Kette von Transformationen lässt sich mittels Matrixmultiplikation zu einer Transformation zusammenfassen

$$\mathbf{T}_C^A = \mathbf{T}_B^A \mathbf{T}_C^B$$



Rotation und Translation in einer Transformationsmatrix (3D)

- Das KS B entsteht aus dem KS A durch eine Translation um den Vektor **t** und eine anschließende Rotation **R** des verschobenen KS.
- Wir führen zwei Einzelschritte ein:
  – KS C entsteht aus KS A durch Translation um **t**:

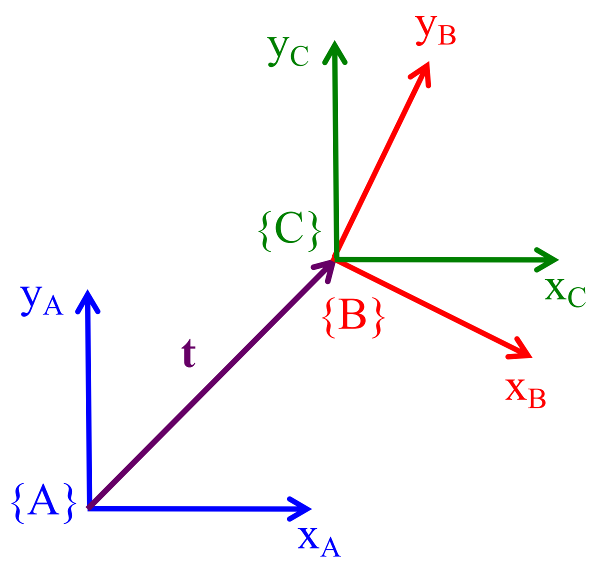
$$\mathbf{T}_C^A = \mathbf{Tl}(\mathbf{t})$$

  – KS B entsteht aus KS C durch Rotation **R**:

$$\mathbf{T}_B^C = \tilde{\mathbf{R}}$$

- Insgesamt

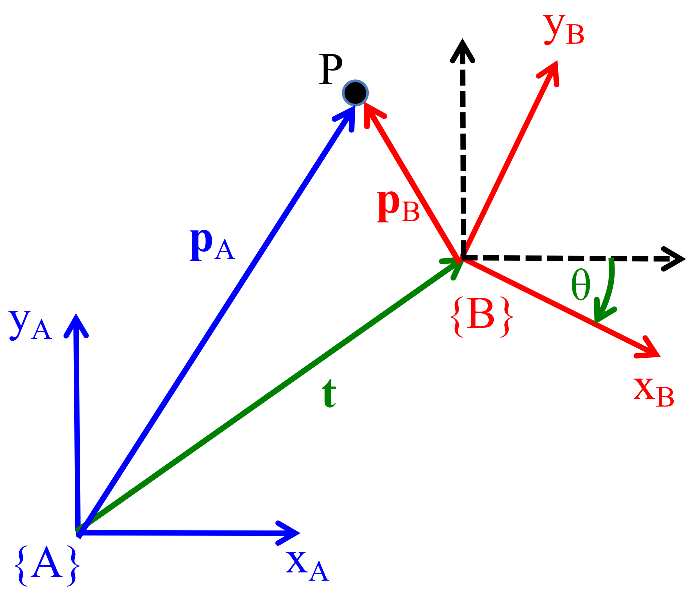
$$\begin{aligned}\mathbf{T}_B^A &= \mathbf{T}_C^A \, \mathbf{T}_B^C = \mathbf{Tl}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{R}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3*3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3*1} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



z-Achsen sind weggelassen.

Rotation und Translation in einer Transformationsmatrix (2D)

- Das KS B geht aus dem KS A durch eine Translation um den Vektor **t** und eine Drehung um Winkel θ des verschobenen KS hervor.



- Homogene Transformationmatrix:

$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{Tl}(\mathbf{t})\,\widetilde{\mathbf{R}}(\theta)$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\theta) & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*2} & 1 \end{pmatrix}$$

Homogene Transfomationsmatrizen

- Matrizen $\mathbf{T}$ der Bauart

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{R}$ eine Rotationsmatrix und $\mathbf{t}$ ein Translationsvektor ist, werden auch homogene Transformationsmatrizen genannt.

- Sie bilden eine nicht-kommutative Gruppe die auch SE(2) (2D) bzw. SE(3) (3D) genannt wird. (SE = special Euclidian group)

- Inverse der Transformationsmatrix (hier 3D):

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^t\mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{R}^T & -\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{t} + \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3*3} & \mathbf{0}_{3*1} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{4*4}$$

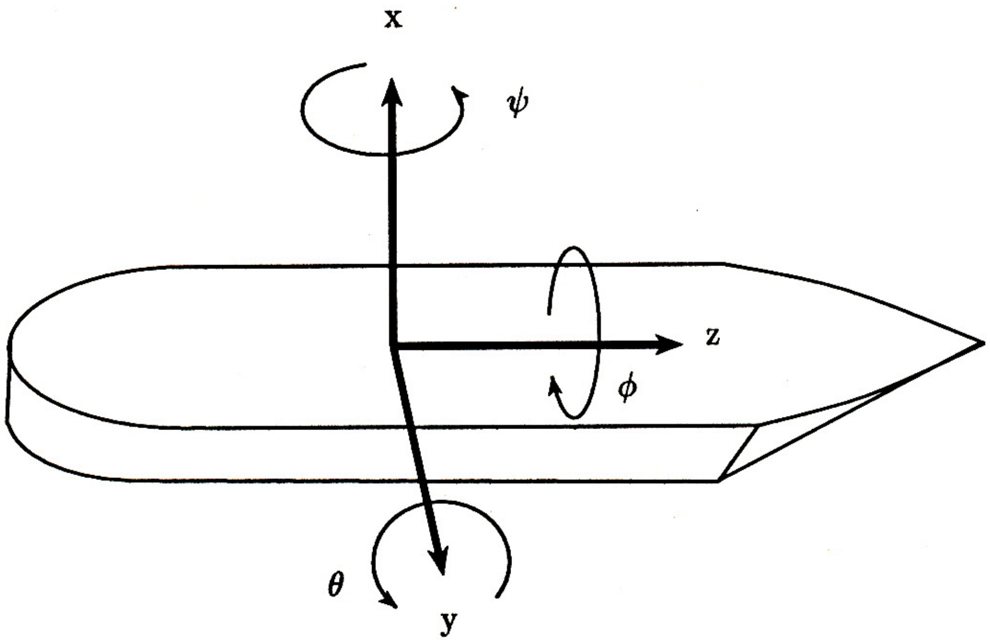
Position und Orientierung

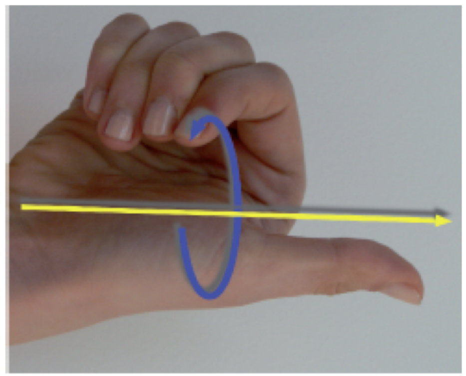
- Grundlagen
  - Koordinatensysteme, Punkte und Körper, Position und Orientierung
- Transformationen
  - Rotation, Translation, homogene Koordinaten, Transformationsmatrizen
- 3D-Rotationen und Eulerwinkel
- Bemerkungen
- Roboterkinematik am Beispiel Puma 560
- Weitere Darstellungsarten für Rotationen
  - Drehvektoren und Quaternionen
- Geodätische Koordinatensysteme

3D-Rotation

- Euler-Theorem:

  Eine beliebige Drehung (in 3D) lässt sich mit drei Drehwinkeln (Eulerwinkel) um 3 ausgewählte Achsen beschreiben. Dabei müssen zwei aufeinanderfolgende Achsen unterschiedlich sein.
- Die Drehung um eine Achse wird auch elementare Rotation genannt.
- Die Drehung ist immer in Richtung der Drehachse im mathematisch positiven Sinn (Rechte-Hand-Regel)



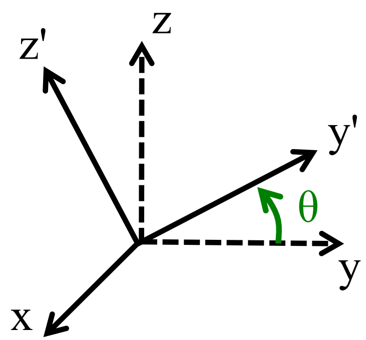


Elementare Rotationsmatrizen

- Die elementaren Rotationsmatrizen ergeben sich wie bei den 2D-Rotationsmatrizen.

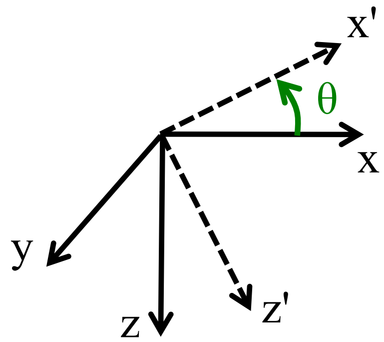
- Drehung um die x-Achse

$$\mathbf{R}(x,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



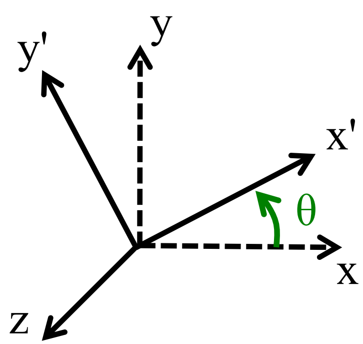
- Drehung um die y-Achse

$$\mathbf{R}(y,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



- Drehung um die z-Achse

$$\mathbf{R}(z,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



12 Euler-Drehsysteme

- Notation:

Start-KS:	xyz
KS nach 1. Rotation:	x'y'z'
KS nach 2. Rotation:	x''y''z''

- 6 Drehsysteme, wobei um 3 unterschiedliche Achsen gedreht wird.

  Beispiel zy'x'':
  Drehe um z-Achse,
  drehe dann um gedrehte y-Achse y'
  und drehe dann um gedrehte x-Achse x''.

- Weitere 6 Drehsysteme, wobei 1. und 3. Drehachse identisch sind.

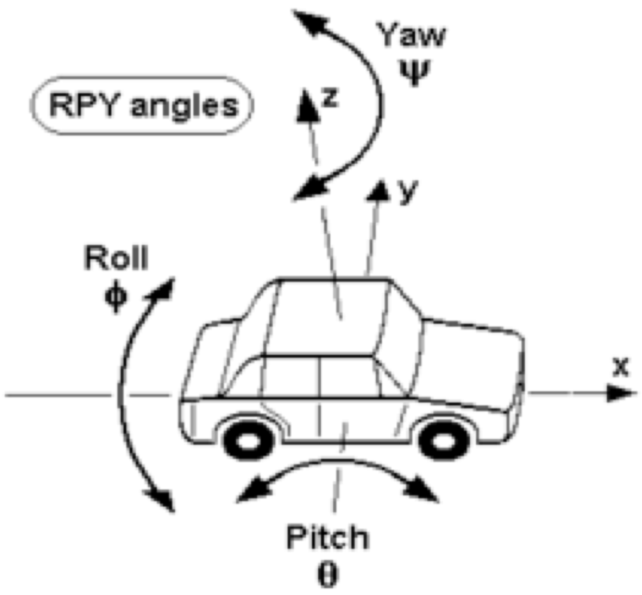
  Beispiel zx'z''

- Drehsysteme sind gleichwertig.
  Verwendung hängt vom Einsatzgebiet ab.

Beispiel: zy'x''-Drehsystem yaw-pitch-roll (1)

- drehe um z-Achse um Winkel ψ (gieren, schwenken, engl. yaw)
  drehe um y-Achse um Winkel θ (neigen, nicken, engl. pitch)
  drehe um x-Achse um Winkel Φ (rollen, schlingern, engl. roll)

$$\underbrace{\mathbf{R}(zy'x'',\psi,\theta,\phi)}_{\mathbf{T}_B^A} = \underbrace{\mathbf{R}(z,\psi)}_{\mathbf{T}_{C'}^A}{}^*\underbrace{\mathbf{R}(y,\theta)}_{\mathbf{T}_{C''}^{C'}}{}^*\underbrace{\mathbf{R}(x,\phi)}_{\mathbf{T}_B^{C''}}$$



Beispiel: zy'x''-Drehsystem yaw-pitch-roll (2)

- ausmultipliziert ergibt sich:

$$\mathbf{R}(zy'x'', \psi, \theta, \phi)$$

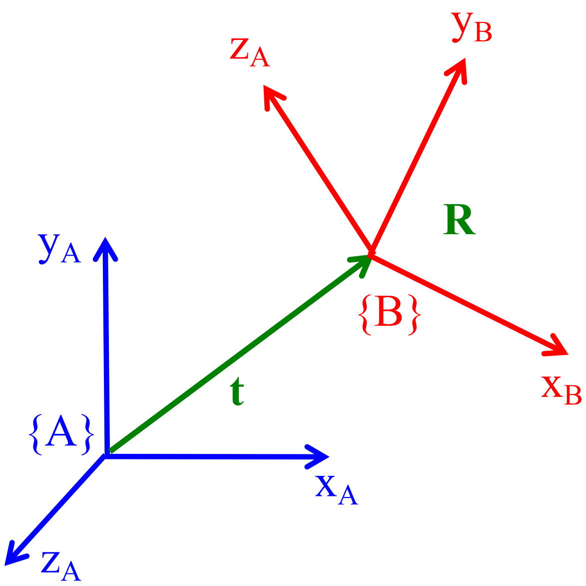
$$= \mathbf{R}(z, \psi)^{*}\mathbf{R}(y, \theta)^{*}\mathbf{R}(x, \phi)$$

$$= \begin{pmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\varphi - S\psi C\varphi & C\psi S\theta C\varphi + S\psi S\varphi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\varphi + C\psi C\varphi & S\psi S\theta C\varphi - C\psi S\varphi \\ -S\theta & C\theta S\varphi & C\theta C\varphi \end{pmatrix}$$

mit C = cos und S = sin

3D-Transformation

- Das KS B geht aus KS A hervor durch eine Translation mit dem Vektor **t** und durch eine Drehung des verschobenen KS um 3 Euler-Winkel ψ, θ, Φ in einem gegebenem Drehsystem.



- Homogene Transformationmatrix für zy'x"-Drehsystem:

$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{T}(zy'x'', \psi, \theta, \phi, \mathbf{t})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}(zy'x'', \psi, \theta, \phi) & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1*3} & 1 \end{pmatrix}$$

Position und Orientierung

- Grundlagen
  - Koordinatensysteme, Punkte und Körper,
  - Position und Orientierung
- Transformationen
  - Rotation, Translation, homogene Koordinaten,
  - Transformationsmatrizen
- 3D-Rotationen und Eulerwinkel
- Bemerkungen
- Roboterkinematik am Beispiel Puma 560
- Weitere Darstellungsarten für Rotationen
  - Drehvektoren und Quaternionen
- Geodätische Koordinatensysteme

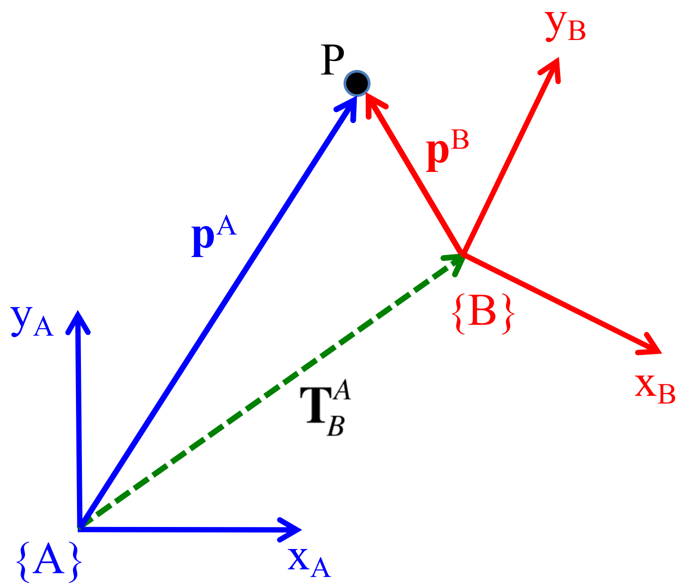
KS-Bezüge beachten bei Koordinatentransformation

- Die Darstellung eines Punktes P in einem KS B lässt sich durch Multiplikation mit einer Transformationsmatrix $\mathbf{T}_B^A$ in die Darstellung von P in KS A überführen (Koordinatentransformation):

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^B$$

$\mathbf{p}^A$: Darstellung des Punktes P im KS A

$\mathbf{p}^B$: Darstellung des Punktes P im KS B



- Merkhilfe Indexlöschung: tiefgestellter Index von **T** und darauffolgender hochgestellter Index lassen sich (in Gedanken) streichen:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{T}_{\cancel{B}}^A \mathbf{p}^{\cancel{B}}$$

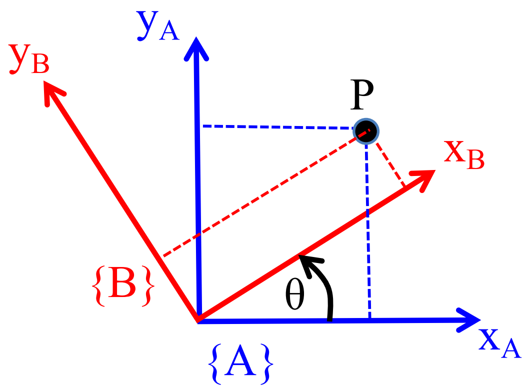
Koordinatentransformation vs. Rotation

- Eine Rotationsmatrix kann sowohl zum Wechsel des KS als auch zur Rotation eines Punktes eingesetzt werden. Also Vorsicht!
- KS B sei gegenüber KS A um Winkel θ gedreht:

$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

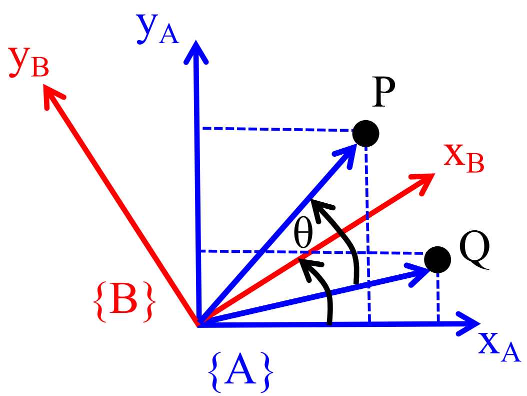
- Wechsel des KS von B nach A für einen Punkt P:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^B$$

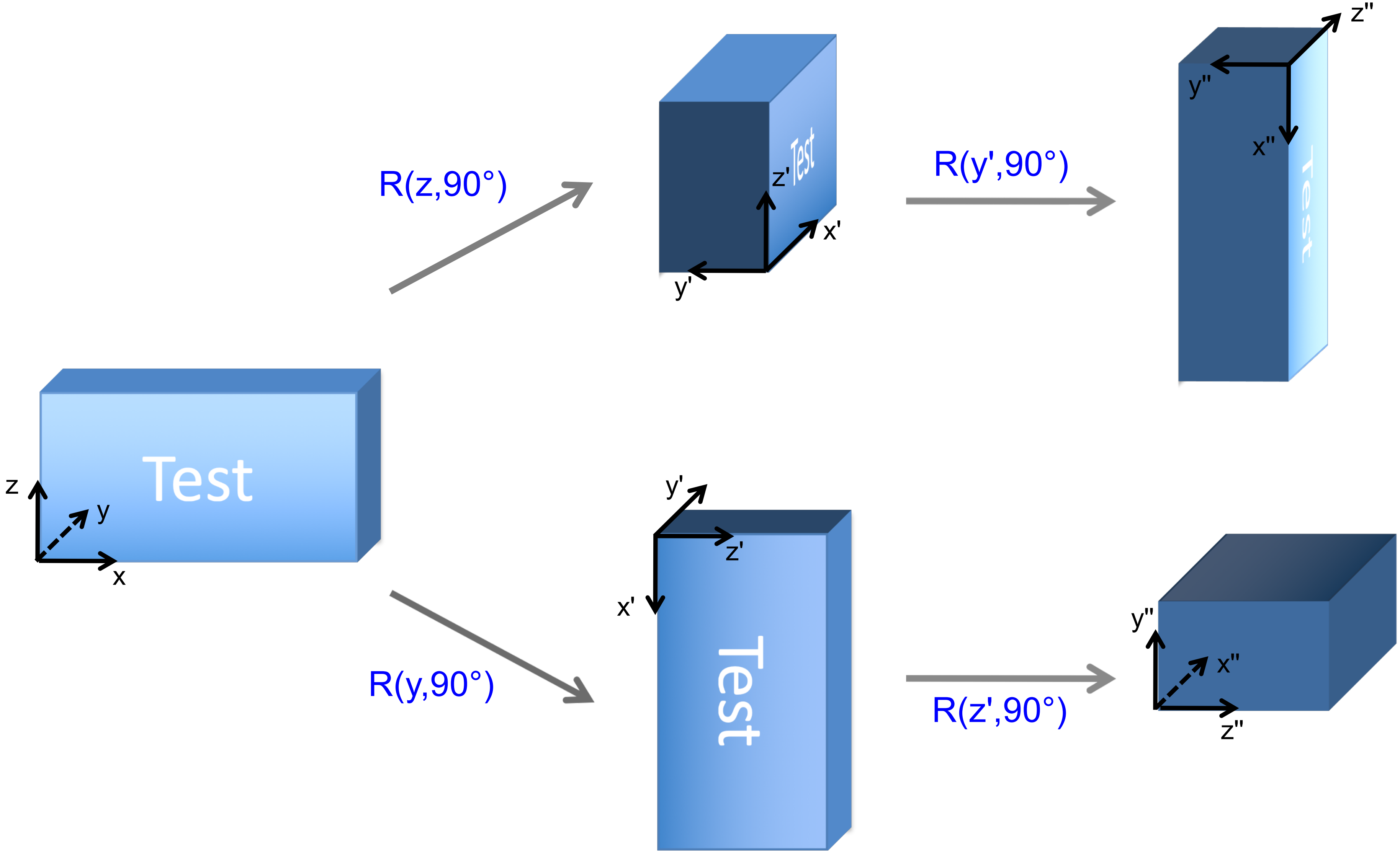


- Fasst man dagegen $\mathbf{p}^B$ als Vektor im KS A auf, dann erhält man ein Punkt Q mit $\mathbf{q}^A = \mathbf{p}^B$. Dann entsteht P durch Rotation des Punktes Q um den Winkel θ im KS A.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^A &= \mathbf{T}_B^A \mathbf{q}^A \\ &= \mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^B\end{aligned}$$

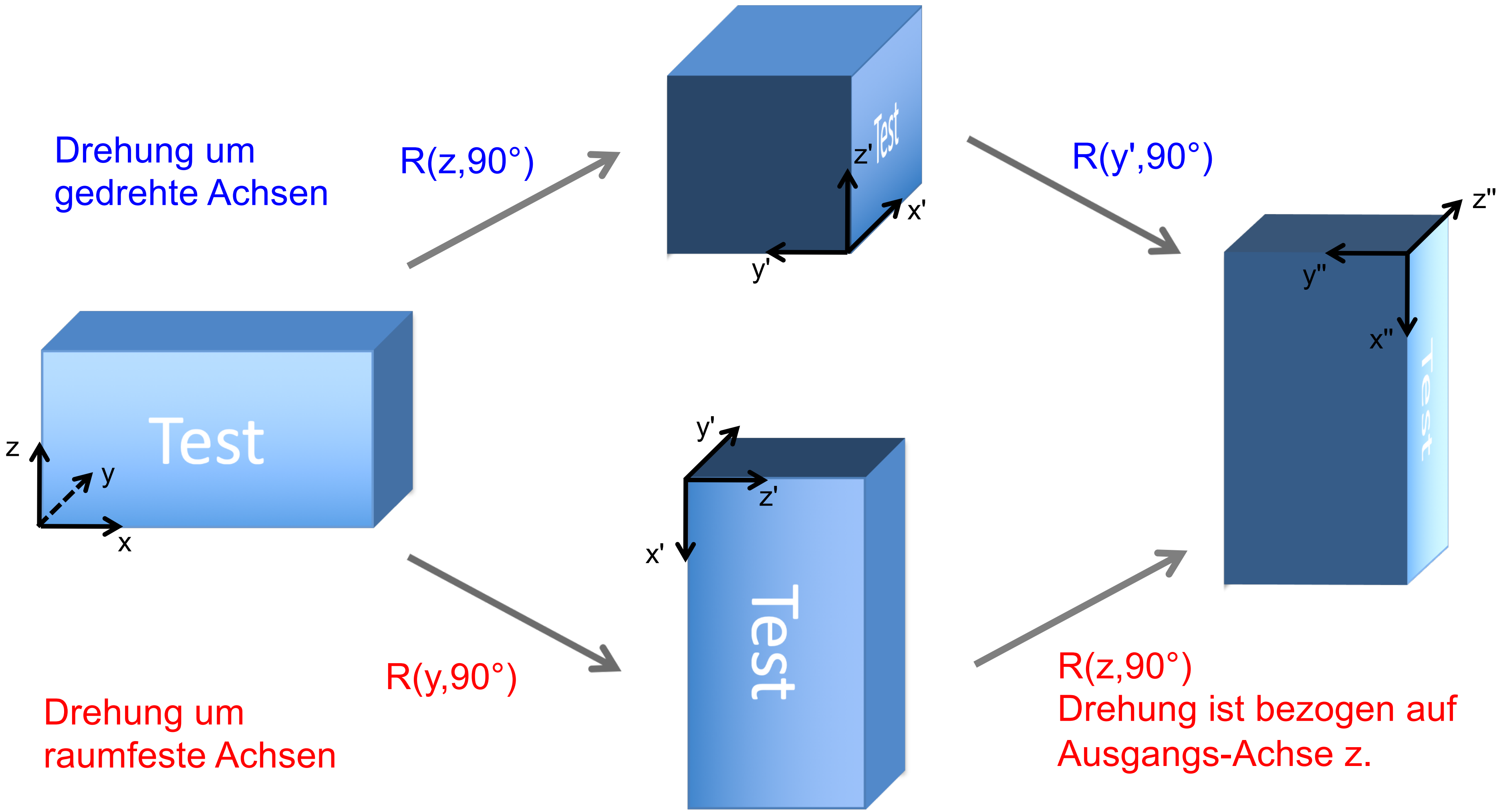


Rotationsmatrizen sind i.a. nicht kommutativ



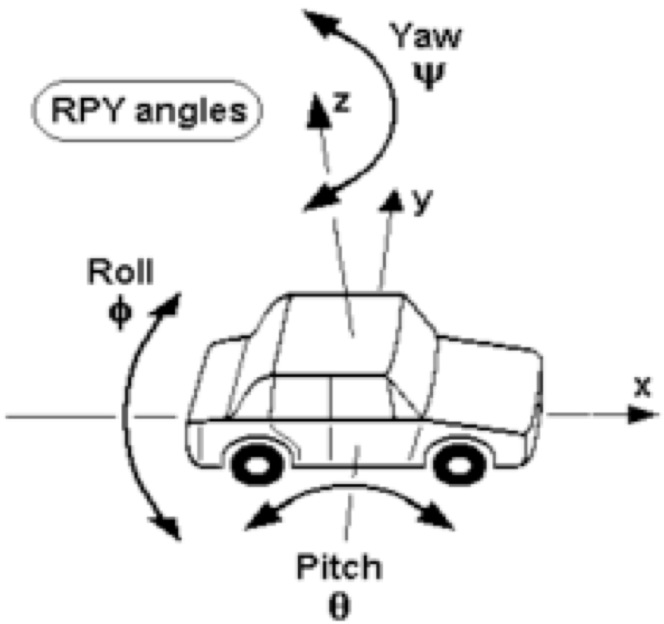
Drehung um raumfeste Achsen

- Drehung in einem Euler-Drehystem (Drehungen um gedrehte Achsen) entspricht Drehung um raumfeste Achsen (Drehungen sind bezogen auf Ausgangs-KS) in umgekehrter Reihenfolge.



Beispiel: xyz-Drehsystem yaw-pitch-roll

- xyz-Drehsystem mit raumfesten Achsen:
  - drehe um x-Achse um Φ,
  - dann um y-Achse um θ und
  - dann um z-Achse um ψ
- xyz-Drehsystem entspricht zy'x''-Drehsystem.



$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}(xyz, \phi, \theta, \psi) \\
&\quad = \mathbf{R}(z, \psi)^{*}\mathbf{R}(y, \theta)^{*}\mathbf{R}(x, \phi) \\
&\quad = \mathbf{R}(zy'x'', \psi, \theta, \phi)
\end{aligned}
$$

Position und Orientierung

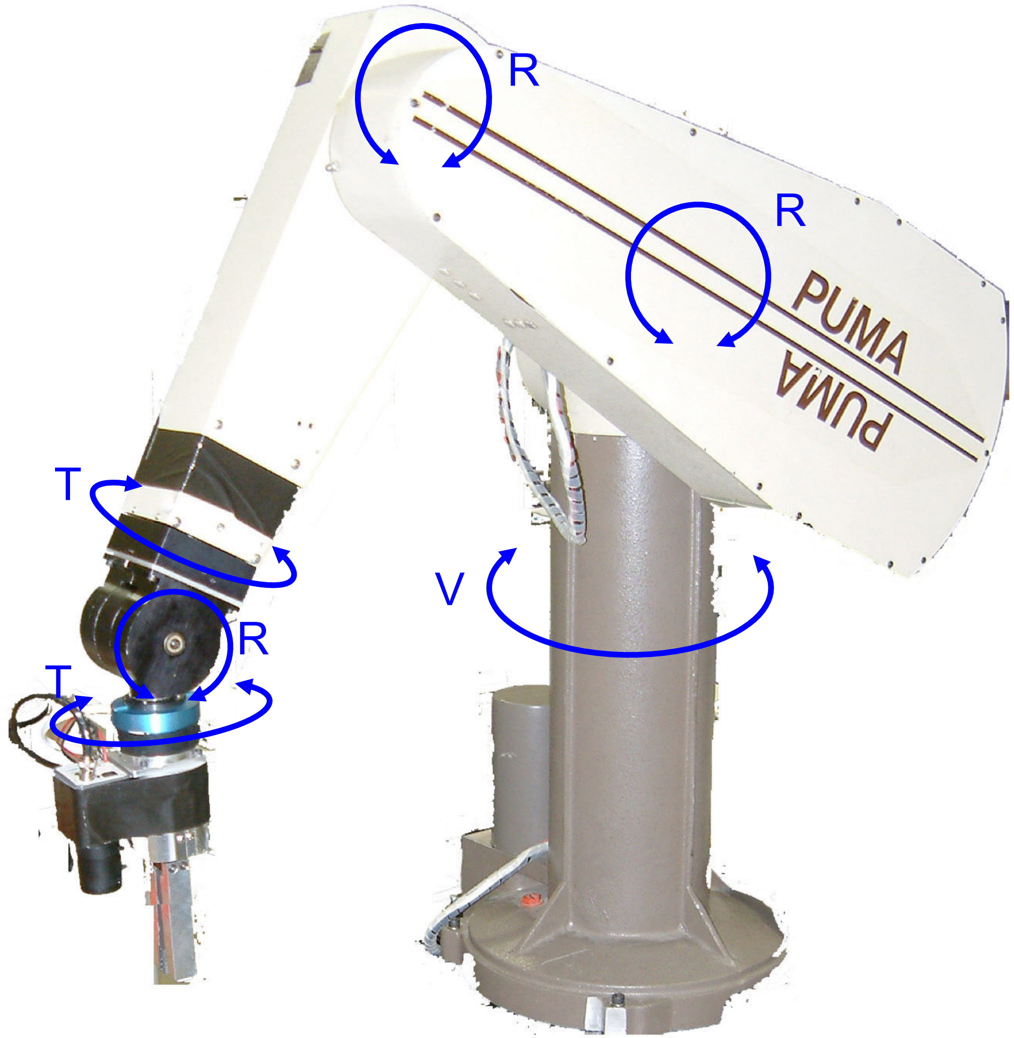
- Grundlagen
  Koordinatensysteme, Punkte und Körper,
  Position und Orientierung
- Transformationen
  Rotation, Translation, homogene Koordinaten,
  Transformationsmatrizen
- 3D-Rotationen und Eulerwinkel
- Bemerkungen
- Roboterkinematik am Beispiel Puma 560
- Weitere Darstellungsarten für Rotationen
  Drehvektoren und Quaternionen
- Geodätische Koordinatensysteme

Puma 560

- PUMA = programmable universal machine for assembly
- hat eine typische Struktur für ein 6 DOF-Gelenkarm-Roboter
- 6 Drehgelenke:

  $\underbrace{\text{VRR}}_{\text{Arm}} - \underbrace{\text{TRT}}_{\text{Handgelenk}}$

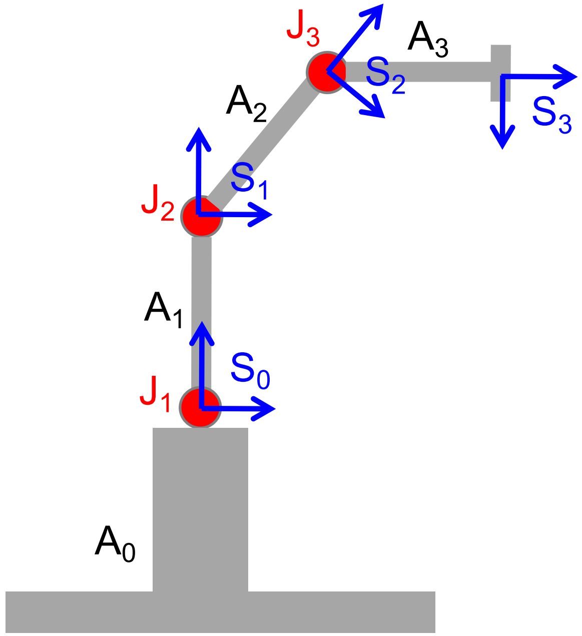
  V = Revolvergelenk
  R = Rotationsgelenk
  T = Torsionsgelenk
- Um ein Objekt zu greifen, wird mit dem Arm die Position und mit dem Handgelenk die Orientierung des Objekts eingestellt (6 DOF)



gruju.blogspot.com; 2016

Denavit-Hartenberg (DH) Konvention (1)

- KS'e werden meist nach der DH-Konvention festgelegt.
- Gelenke (joints) und Arme (links) sind nummeriert: $J_1, J_2, ..., J_n$ und $A_0, A_1, ..., A_n$.
- Gelenk J_i verbindet Arm A_{i-1} und A_i.
- Das KS S_i ist dem Arm A_i fest zugeordnet und liegt (für $i \le n-1$) im Drehgelenk J_{i+1}
- KS S_0 ist das ortsfeste Ausgangs-KS.
- Das letzte KS S_n ist meist auch gleichzeitig das Endeffektor-KS mit den Achsen nsa:
  - a = approach vector
  - s = sliding vector
  - n = normal vector

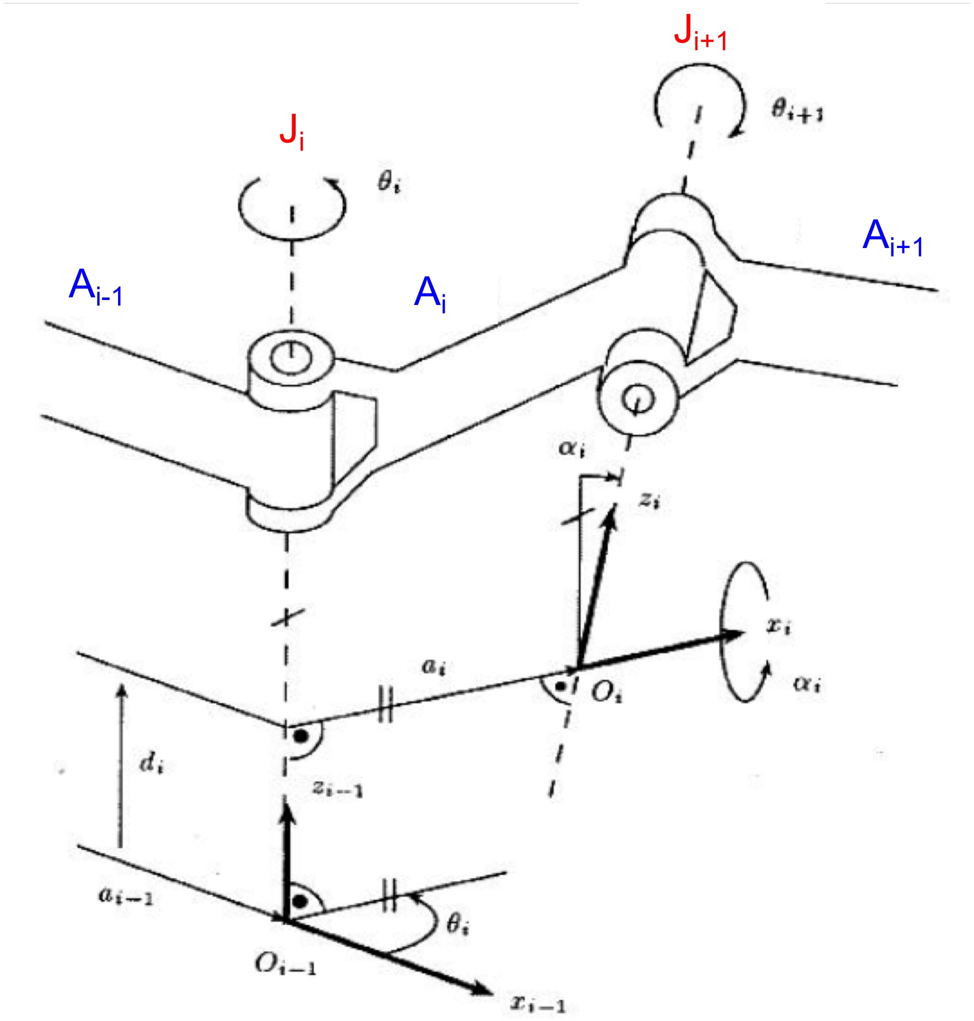


Roboterarm mit 3 Gelenken

Denavit-Hartenberg-Konvention (2)

Das KS S_i ist am Arm A_i fixiert, wobei:

- Die z_i-Achse wird entlang der Bewegungsachse des Gelenks J_{i+1} gelegt.
- Die x_i-Achse ist normal zur z_{i-1}-Achse und zeigt von ihr weg.
- Die y_i-Achse wird so festgelegt, dass KS S_i ein rechtshändiges KS ist.



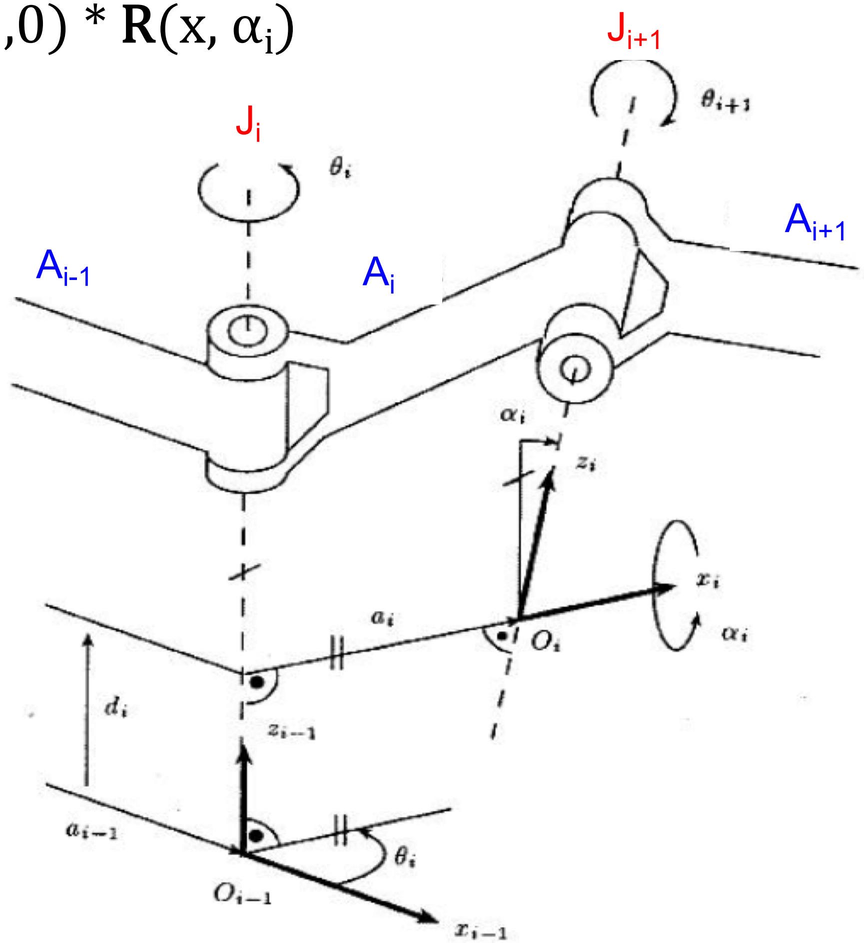
[aus Siegert, Bocionek, *Robotik: Programmierung intelligenter Roboter*, Springer 1996]

Denavit-Hartenberg-Konvention (3)

- Die Lage des KS S_i gegenüber S_{i-1} wird beschrieben durch 4 DH-Parameter θ_i, α_i, a_i und d_i und folgender Transformation:

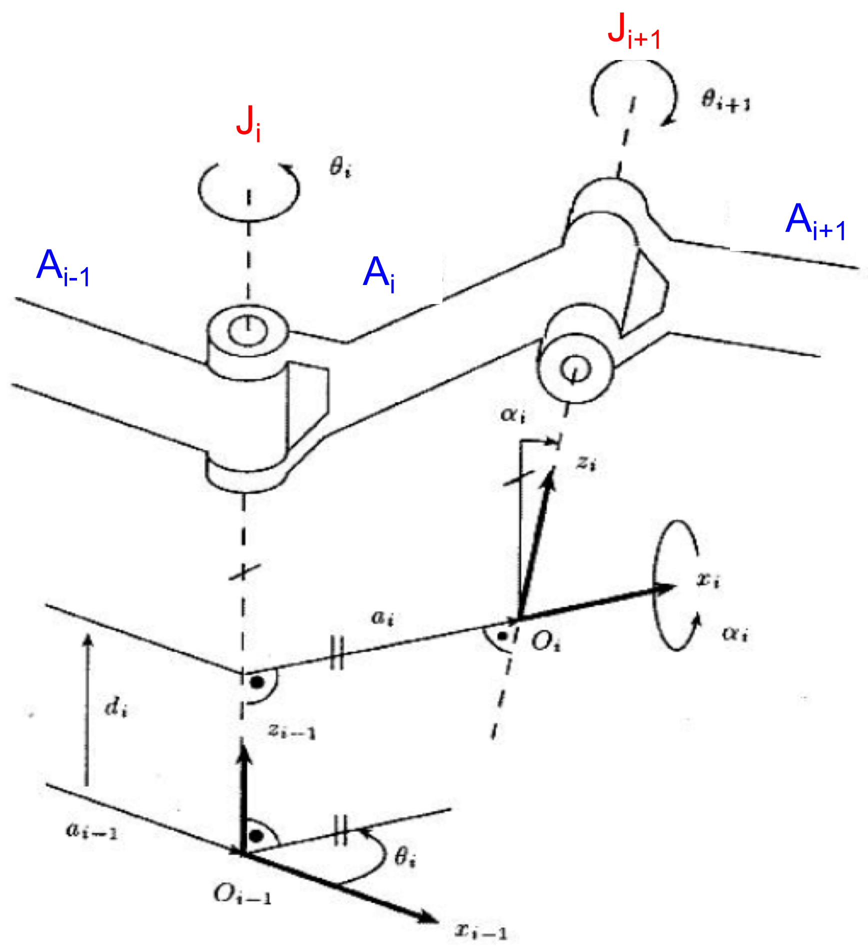
$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{Tl}(0,0,d_i) * \mathbf{R}(z, \theta_i) * \mathbf{Tl}(a_i,0,0) * \mathbf{R}(x, \alpha_i)$$

  - verschiebe entlang der z-Achse um d_i
  - drehe um z-Achse um θ_i
  - verschiebe entlang der neuen x-Achse um a_i
  - Drehung um die neue x-Achse um α_i

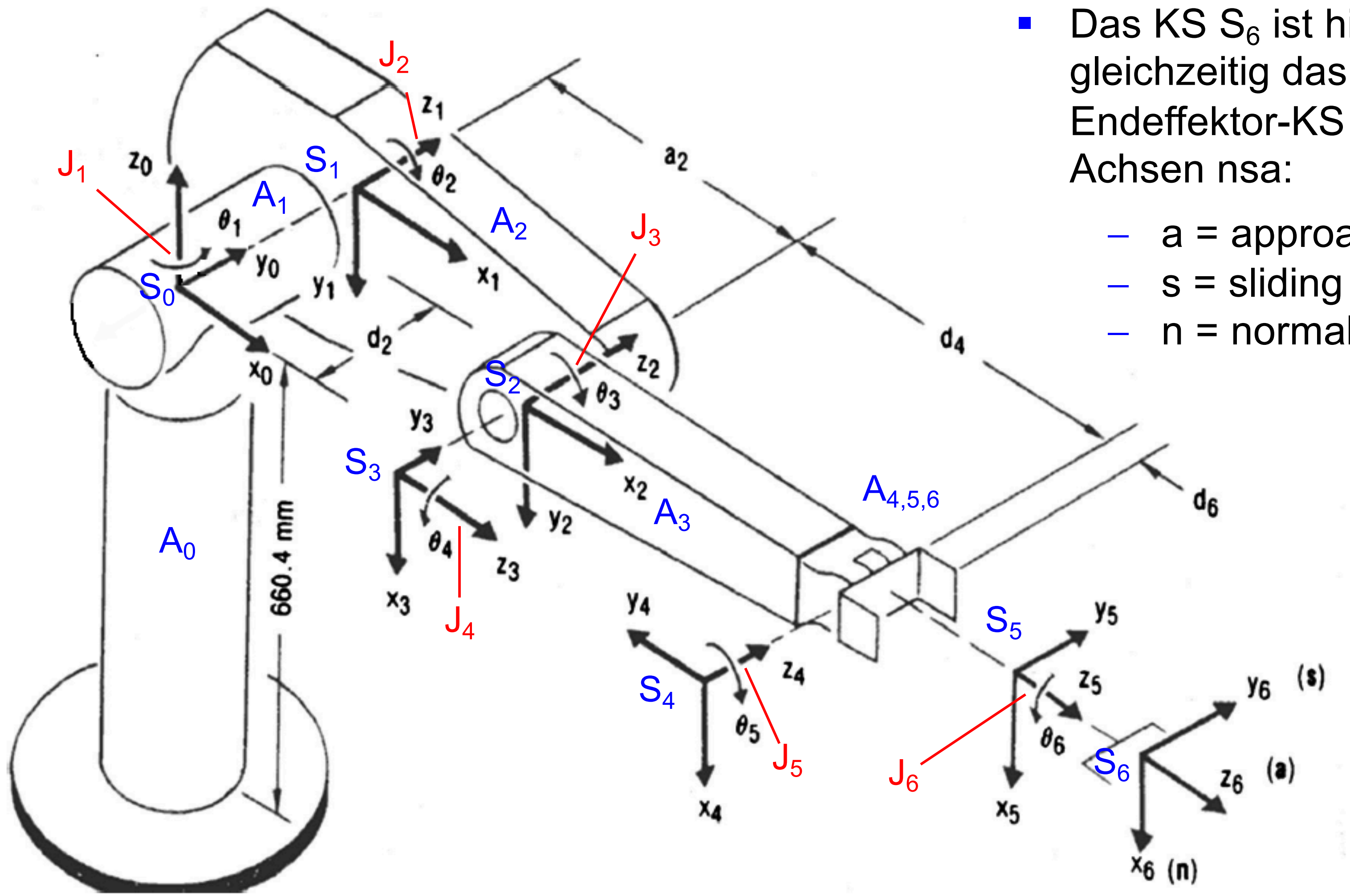


Denavit-Hartenberg-Konvention (4)

- θ_i ist der am Gelenk J_i eingestellte Drehwinkel und ist variabel.
- α_i ist der konstante Neigungswinkel zwischen den beiden Drehachsen.
- Die DH-Konvention legt das KS S_i für $1 \le i \le n-1$ eindeutig fest, sofern die Achsen z_i und z_{i-1} windschief zueinander sind.
- Die Lage der x,y-Achsen von S_0 können frei gewählt werden; beachte dass die z_0-Achse entlang der Bewegungsachse des Gelenks J_1 gelegt werden muss.
- Das KS S_n kann frei gewählt werden, sofern die x_n-Achse senkrecht zur z_{n-1}-Achse liegt.



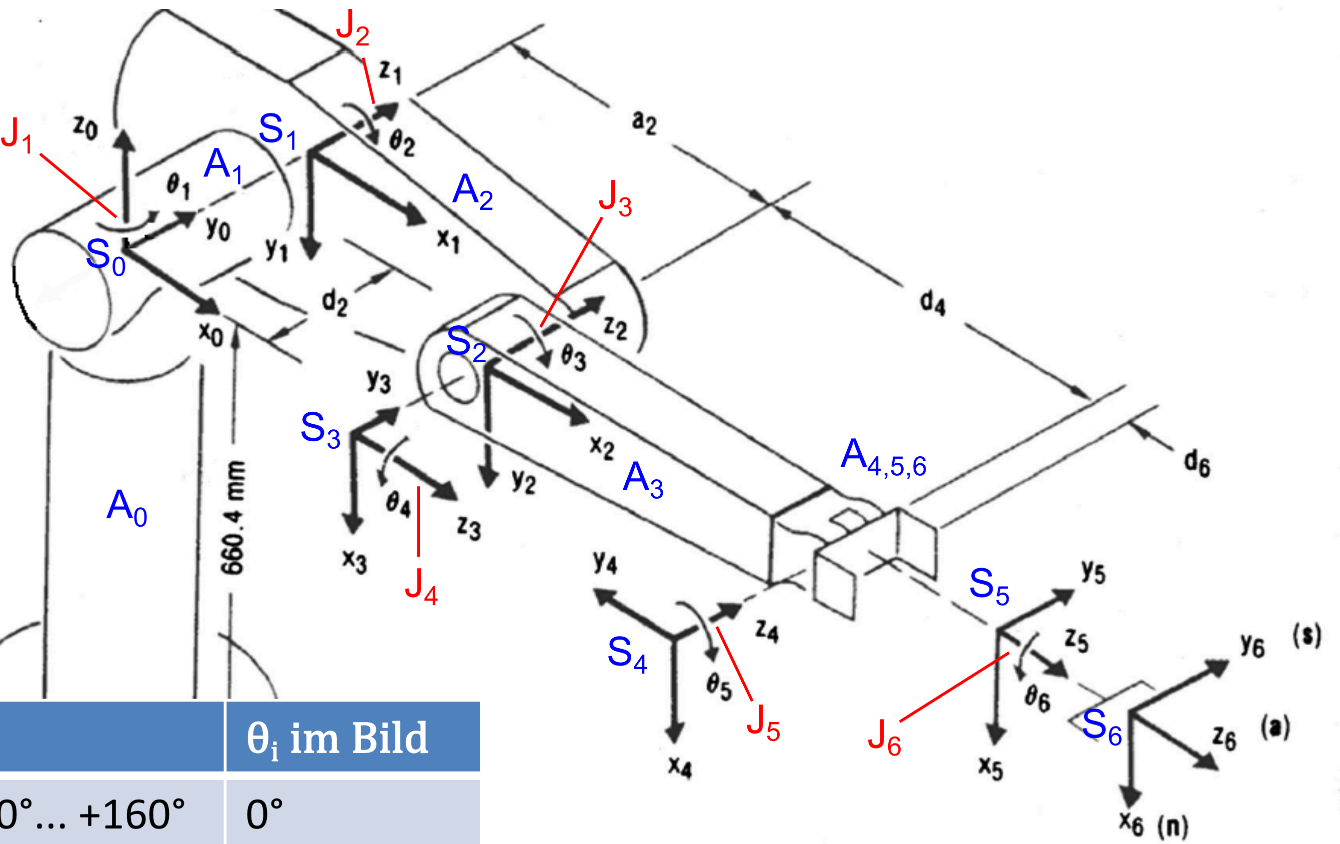
Koordinatensysteme nach DH-Konvention für Puma 560



[leicht verändert aus Fahmy und Gahny, Neuro-fuzzy inverse model control structure of robotic manipulators utilized for physiotherapy applications, 2013.]

- Das KS S_6 ist hier auch gleichzeitig das Endeffektor-KS mit den Achsen nsa:
  - a = approach vector
  - s = sliding vector
  - n = normal vector

DH-Parameter für Puma 560

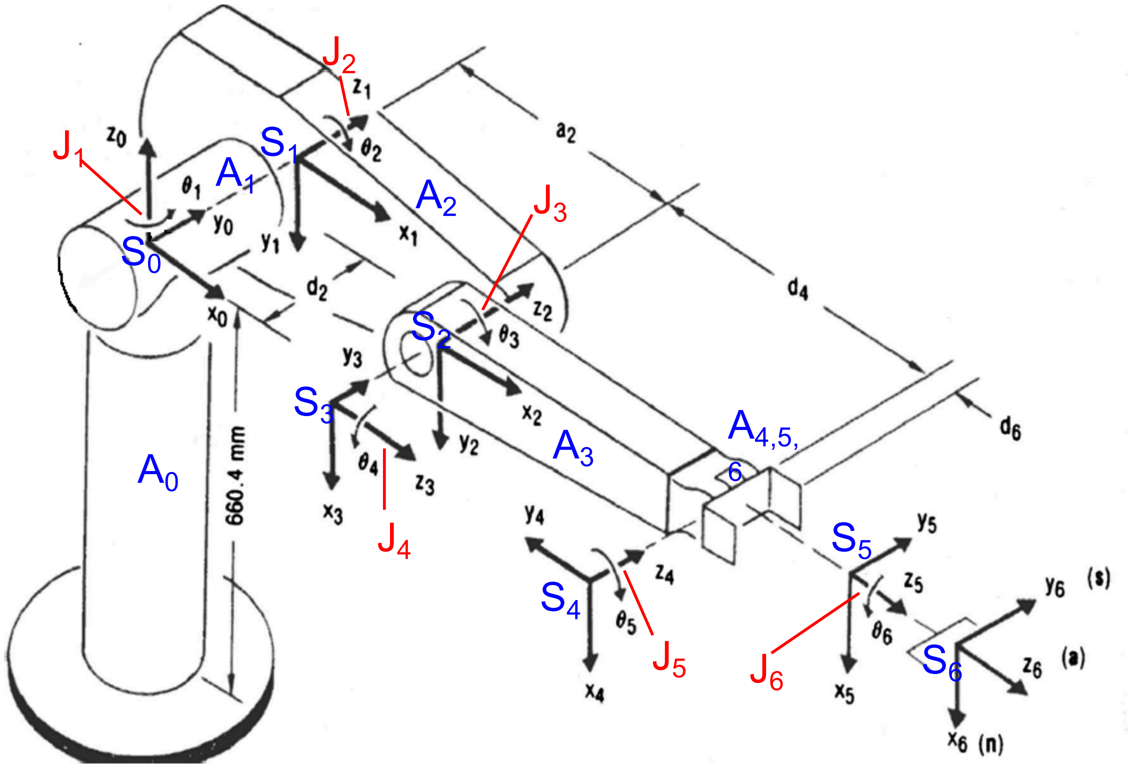


i	α_i	a_i [m]	d_i [m]	θ_i	θ_i im Bild
1	-90°	0	0	-160°... +160°	0°
2	0°	0.43	0.15	-225°... +45°	0°
3	90°	0	0	-45°... +225°	90°
4	-90°	0	0.43	-110°... +170°	0°
5	90°	0	0	-100°... +100°	0°
6	0°	0	0.06	-266°... +266°	0°

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{Tl}(0,0,d_i) * \mathbf{R}(z, \theta_i) * \mathbf{Tl}(a_i,0,0) * \mathbf{R}(x, \alpha_i)$$

Vorwärts- und Rückwärtskinematik

Vorwärtskinematik Puma 560



- Die Pose von KS S_6 bzgl. S_0 lässt sich beschreiben durch eine Verkettung von 6 Transformationen mit den Gelenkwinkeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$:

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_1^0\,\mathbf{T}_2^1\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_4^3\mathbf{T}_5^4\mathbf{T}_6^5 \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{Tl}(0,0,\mathrm{d_i}) * \mathbf{R}(\mathrm{z}, \theta_\mathrm{i}) * \mathbf{Tl}(\mathrm{a_i},0,0) * \mathbf{R}(\mathrm{x}, \alpha_\mathrm{i})$$

Rückwärtskinematik Puma 560 (1)

- Die Pose $\mathbf{T}$ des Endeffektor-KS S_6 bzgl. des ortsfesten Ausgangs-KS S_0 lässt sich beschreiben durch eine Verkettung von 6 Transformationen mit den Gelenkwinkeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_6^0 \\ &= \mathbf{T}_1^0\,\mathbf{T}_2^1\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_4^3\mathbf{T}_5^4\mathbf{T}_6^5 \\ &= f(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6)\end{aligned}$$

- Bei der Rückwärtskinematik ist die Pose $\mathbf{T}$ gegeben und die Gelenkwinkel θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6 müssen bestimmt werden.
- Gesucht ist also die Inverse von f.

Rückwärtskinematik Puma 560 (2)

- Probleme:
  - f ist i.a. nicht-linear.
  - Inverse von f ist eventuell nicht explizit darstellbar.
  - Lösung ist nicht eindeutig.
  - Es existiert keine Lösung.

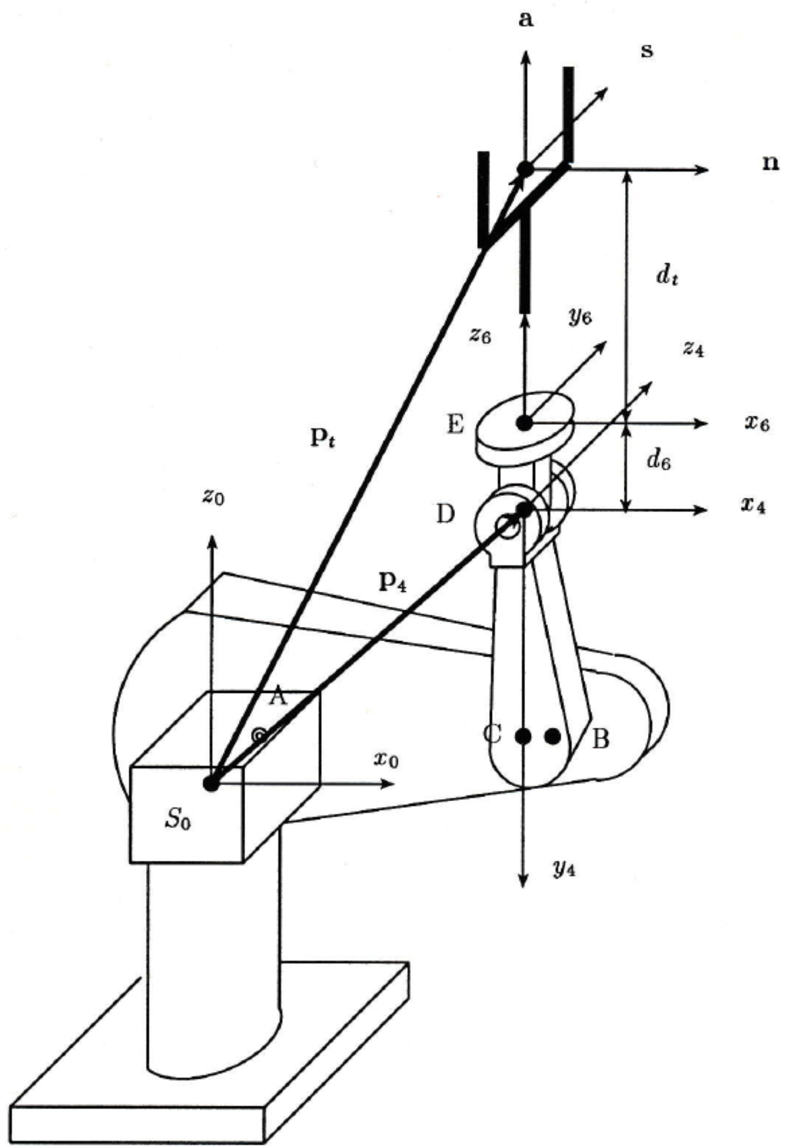
- Ansätze:
  - Explizite Lösung durch algebraische Umformungen.
  - Explizite Lösung durch geometrische Überlegungen.
  - Numerische Lösung.
    Z.B. Bestimmung der Nullstellen von

    $$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) - \mathbf{T} = 0$$

    mit einem Newton-Verfahren.

Rückwärtskinematik Puma 560 (3)

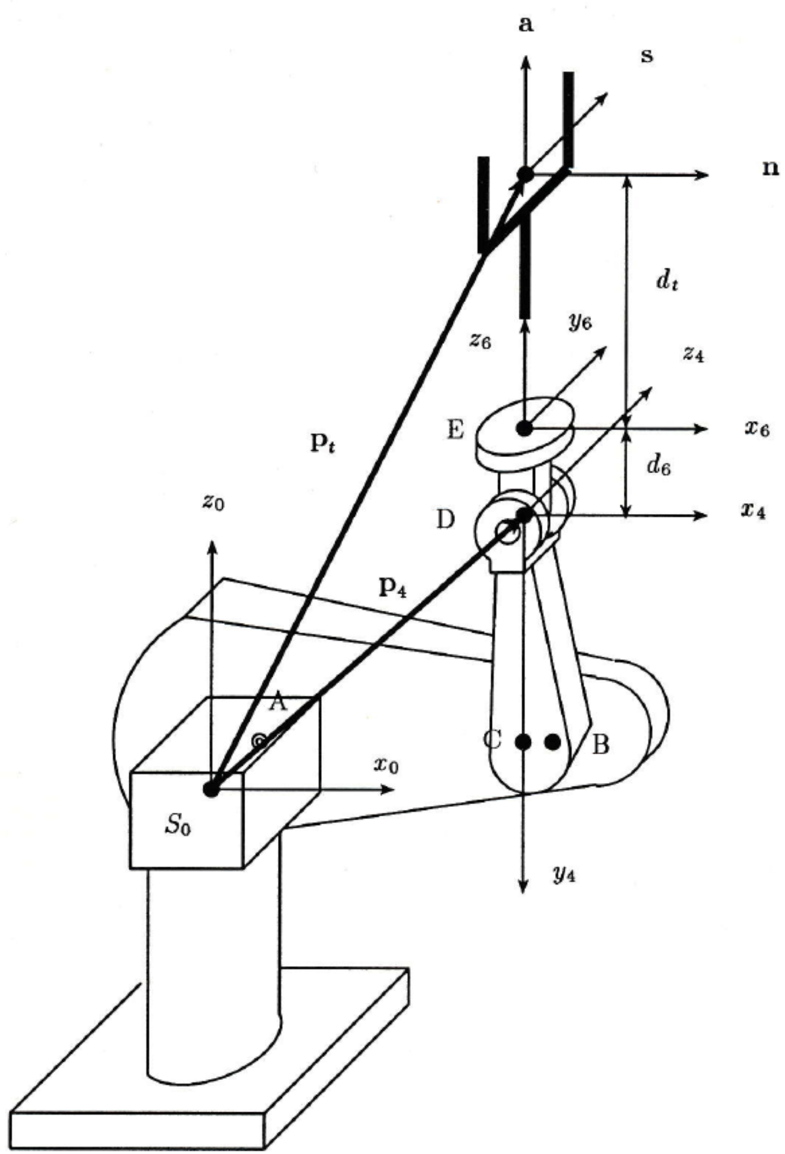
- Die Gelenkachsen des Puma 560 liegen entweder rechtwinklig oder parallel zueinander.
- Die drei Handgelenksachsen schneiden sich in einem Punkt. Daher ändern die Handgelenksachsen nur die Orientierung des Endeffektors (keine Translation). Wird auch Kugelgelenk (spherical wrist) genannt.
- Dadurch wird die Rückwärtsrechnung vereinfacht und eine Lösung durch geometrische Überlegung möglich.



[aus Siegert, Bocionek, *Robotik: Programmierung intelligenter Roboter*, Springer 1996]

Rückwärtskinematik Puma 560 (4)

- Vorgehensweise (Skizze):
  1. Gegeben ist die Wunsch-Pose $\mathbf{T}$ des Endeffektor-KS durch den Punkt $\mathbf{p_t}$ des KS-Ursprungs und
     der KS-Achsen **n**, **s**, **a**.
  2. Daraus lässt sich der Urspung $\mathbf{p_4}$ von KS S_4 einfach bestimmen.
  3. Aus dem Ursprung $\mathbf{p_4}$ von KS S_4 lassen sich die ersten drei Gelenkwinkel θ_1, θ_2, θ_3 durch Rückwärtsrechnung vergleichsweise einfach bestimmen (3-Arm-Roboterproblem).
  4. Bestimme dann die letzten drei Gelenkwinkel θ_4, θ_5, θ_6 durch algebraische Rückwärtsrechnung so, dass das Endeffektor-KS die gewünschte Orientierung **n**, **s**, **a** hat.



[aus Siegert, Bocionek, *Robotik: Programmierung intelligenter Roboter*, Springer 1996]

Position und Orientierung

- Grundlagen
  - Koordinatensysteme, Punkte und Körper, Position und Orientierung
- Transformationen
  - Rotation, Translation, homogene Koordinaten, Transformationsmatrizen
- 3D-Rotationen und Eulerwinkel
- Bemerkungen
- Roboterkinematik am Beispiel Puma 560
- Weitere Darstellungsarten für Rotationen
  - Drehvektoren und Quaternionen
- Geodätische Koordinatensysteme

Drehung um eine Drehachse

- Eine beliebige Drehung (in 3D) lässt sich auch als Drehung um einen Winkel θ um genau eine Achse – die Drehachse – beschreiben.
- Die Drehachse lässt sich durch einen Vektor $\mathbf{v}$ beschreiben, der in Richtung der Drehachse zeigt.
- Rotationsmatrizen $\mathbf{R}$ haben immer den reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und die beiden komplexen Eigenwerte $\lambda_{2,3} = \cos\theta \pm \mathrm{i}^*\sin\theta$.
- Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörende Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ beschreibt dann die Drehachse:

$$\mathbf{R}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$$

- Der Drehwinkel θ ergibt sich aus den komplexen Eigenwerten

$$\lambda_{2,3} = \cos\theta \pm \mathrm{i}^*\sin\theta.$$

Quaternionen (1)

- Quaternionen sind eine Verallgemeinerung von komplexen Zahlen und haben die Form:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= s + i * v_1 + j * v_2 + k * v_3 \\ &= s + (v_1, v_2, v_3) \\ &= s + \mathbf{v}\end{aligned}$$

Dabei sind s, v_1, v_2, v_3 reelle Zahlen und für i, j, k gilt:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- $\mathbf{q} = s + \mathbf{v} = s + (v_1, v_2, v_3)$ ist ein Einheitsquaternion, falls:

$$s^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

Quaternionen (2)

- Ein Einheitsquaternion $\mathrm{q} = \mathrm{s} + \mathbf{v}$ kann als eine Rotation mit Winkel θ um die Drehachse $\mathbf{n}$ verstanden werden, wobei folgender Zusammenhang besteht:

$$s = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \mathbf{n} * \sin\frac{\theta}{2} \quad \text{mit } \|\mathbf{n}\| = 1$$

- Quaternionen-Operationen sind im Vergleich zu Operationen mit Rotationsmatrizen rechentechnisch einfacher und numerisch stabiler.

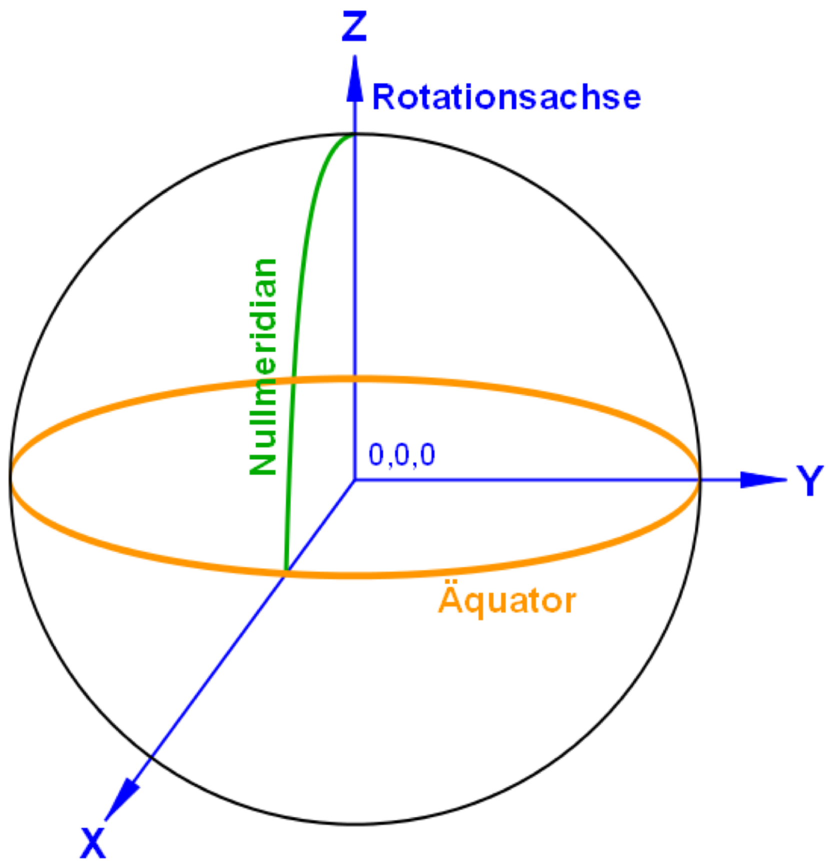
Operation	Rotationsmatrix R	Einheitsquaternion $\mathrm{q} = \mathrm{s} + \mathbf{v}$
Inverse	$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$	$\mathrm{q}^{-1} = \mathrm{s} - \mathbf{v}$
KS-Wechsel	$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$	$0 + \mathbf{x}' = \mathrm{q}\ (0+\mathbf{x})\ \mathrm{q}^{-1}$
Komposition	$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$	$\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2$

Geodätische Koordinatensysteme

- Für die Navigation im Outdoorbereich sind verschiedene geodätische Koordinatensysteme wichtig.

ECEF

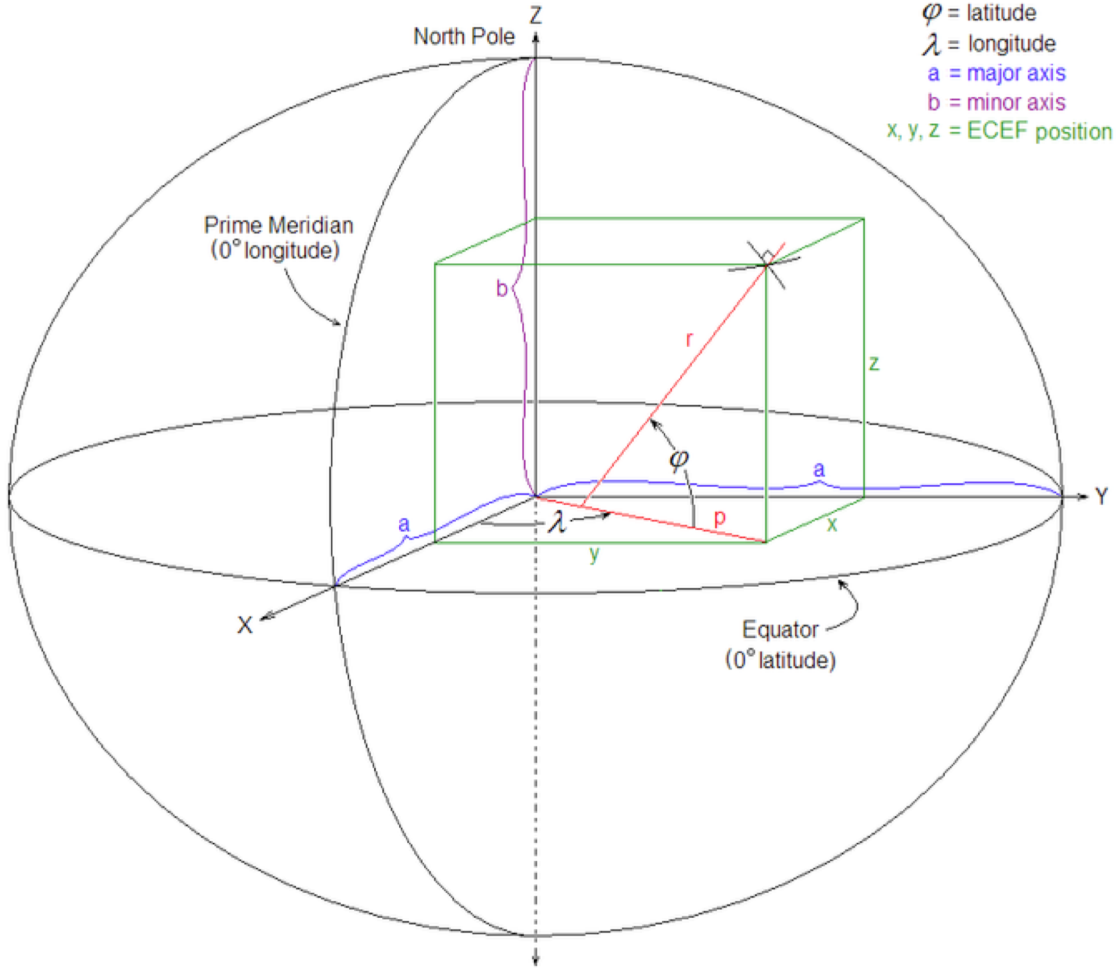
- ECEF (Earth-Centered Earth-Fixed) ist ein kartesisches KS, das im Mittelpunkt der Erde fixiert ist (also mit der Erde rotiert)
- Die z-Achse zeigt in Richtung Norden.
  Die x-Achse schneidet die Erde im Äquator beim Längengrad 0.
- Positionsbestimmung im GPS-System wird im ECEF-KS vorgenommen:
  aus den bekannten ECEF-Positionen von wenigstens 4 Satelliten und Entfernungsmessungen zu den Satelliten wird die unbekannte ECEF-Position eines GPS-Empfängers berechnet.



https://de.wikipedia.org/wiki/Geozentrisches_Koordinatensystem

WGS 84

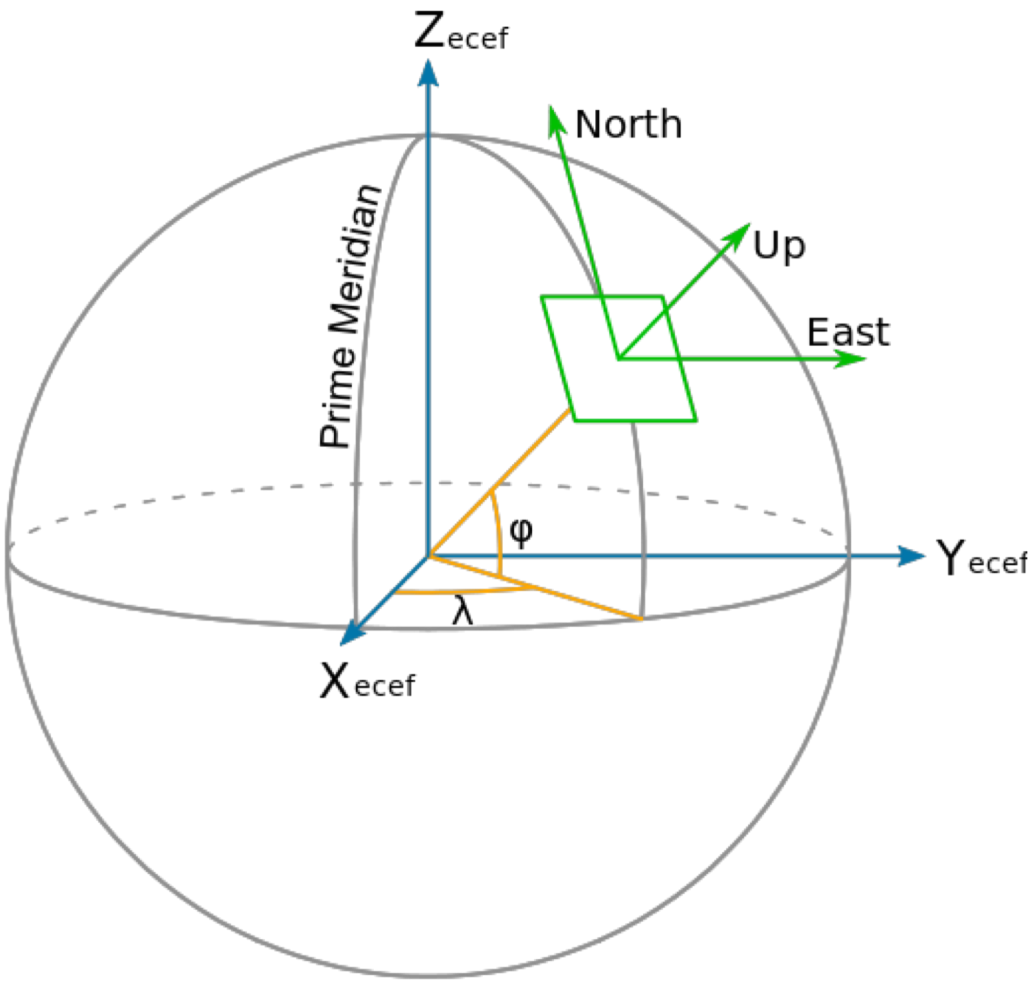
- WGS84 (World geodetic System) ist ein Standardmodell der Erde.
- Erde wird als Ellipsoid angenommen.
- Die Erdoberfläche ist in Längen- und Breitengrade eingeteilt.
- Eine Position wird beschrieben durch Angabe des Längengrads λ, des Breitengrads φ und der Höhe h (Abstand zur Ellipsoid-Oberfläche)
- Es gibt Formeln um aus ECEF-Koordinaten (x,y,z) die WGS84-Koordinaten (λ, φ, h) und umgekehrt zu berechnen.



http://en.wikipedia.org/wiki/ECEF

ENU

- ENU = East-North-Up
- Navigation in einem kleineren lokalen Bereich wird bequemerweise in einem kartesischen KS durchgeführt.
- Dabei ist der Ursprung an einer bestimmten Position fixiert.
- Die z-Achse (Up) steht senkrecht zur Oberfläche des Ellipsoids.
- Die x-Achse zeigt in Richtung Ost (East) und die y-Achse in Richtung Norden (North).
- ENU ist also gegenüber ECEF verschoben und rotiert und lässt daher mit einer Transformationsmatrix beschreiben.



http://en.wikipedia.org/wiki/North_east_down