Aufgabe 2.1

Die Abbildung zeigt drei 3D-KS'e A, B und C.

a) Geben Sie die folgenden homogenen Transformationsmatrizen an:

$$\mathbf{T}_B^A, \mathbf{T}_C^B, \mathbf{T}_C^A$$

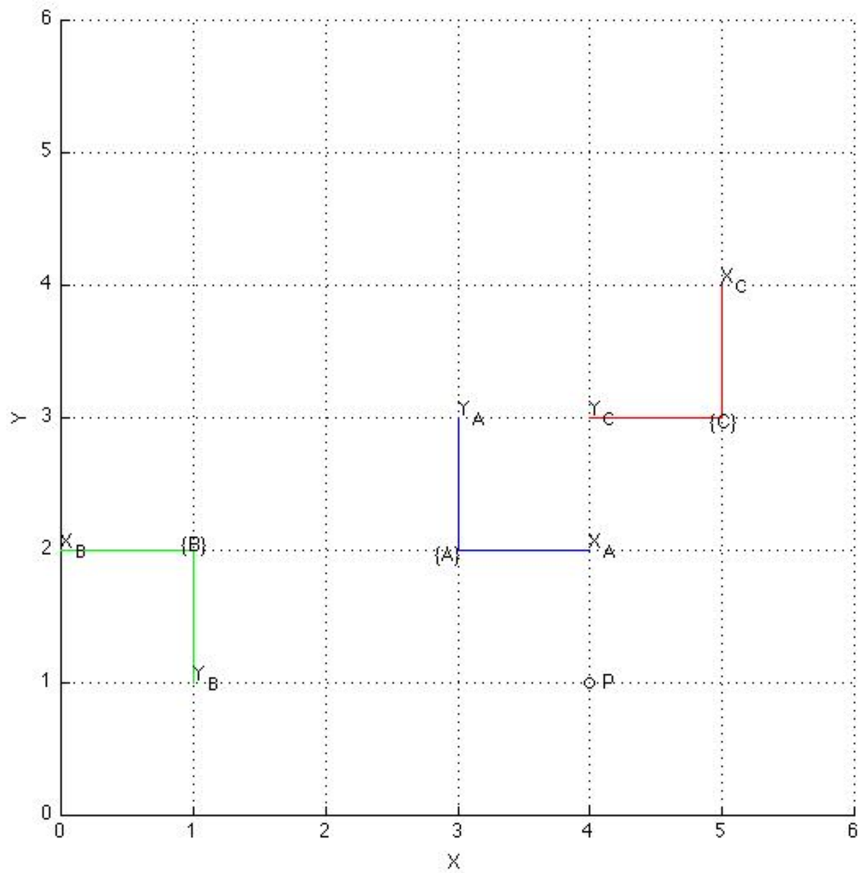
b) Prüfen Sie durch Nachrechnen:

$$\mathbf{T}_C^A = \mathbf{T}_B^A \; \mathbf{T}_C^B$$

c) Prüfen Sie durch Nachrechnen:

$$\mathbf{T}_A^C = (\mathbf{T}_C^A)^{-1}$$

d) Führen Sie für den Punkt P einen Koordinatenwechsel von B nach A durch.



Die z-Achsen sind nicht eingezeichnet und ragen aus dem Bild heraus.

Aufgabe 2.2

Gegeben seien ein raumfestes, globales KS O und zwei transformierte KSe A und B, wobei B um $\theta = 30°$ gedreht ist.
Die KS'e seien 2-dimensional.

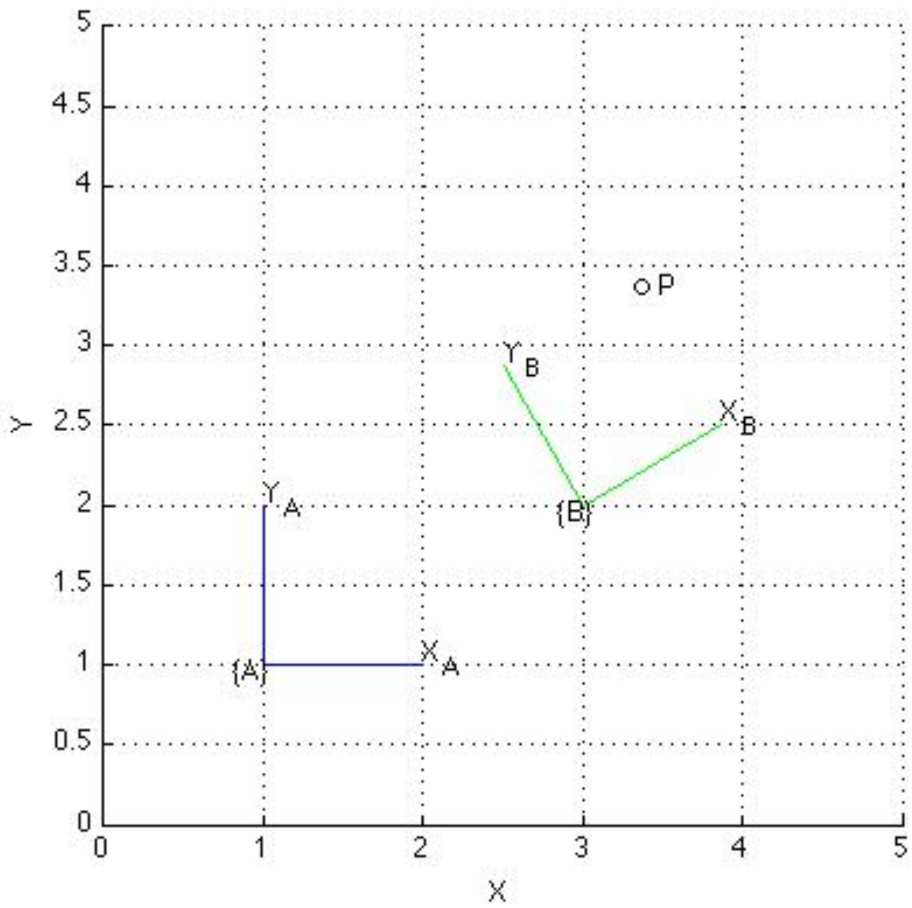
a) Geben Sie die homogenen Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_A^O$ und $\mathbf{T}_B^O$ an.

b) Führen Sie für den Punkt P mit $\mathbf{p}^B = (1,1)$ einen Koordinaten-transformation nach O durch.

c) Wie lässt sich $\mathbf{T}_B^A$ aus $\mathbf{T}_A^O$ und $\mathbf{T}_B^O$ bestimmen?

d) Bestimmen Sie $\mathbf{p}^A$.

e) Was ergibt sich durch $\mathbf{T}_B^A \mathbf{p}^A$?



Aufgabe 2.3

Gegeben sei eine 3D-Rotationsmatrix:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix, die sich im yaw-pitch-roll-Drehsystem ergibt (s. S. 2-21):

$$\mathbf{R}(zy'x'', \psi, \theta, \phi)$$

$$= \mathbf{R}(z, \psi)^{*}\mathbf{R}(y, \theta)^{*}\mathbf{R}(x, \phi)$$

$$= \begin{pmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\varphi - S\psi C\varphi & C\psi S\theta C\varphi + S\psi S\varphi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\varphi + C\psi C\varphi & S\psi S\theta C\varphi - C\psi S\varphi \\ -S\theta & C\theta S\varphi & C\theta C\varphi \end{pmatrix}$$

mit C = cos
und S = sin

Geben Sie die drei Euler-Drehwinkel ψ, θ, ϕ an.

Aufgabe 2.4

Ein Roboter befindet sich im KS O
an der Position (x_R, y_R) mit der Ausrichtung θ.

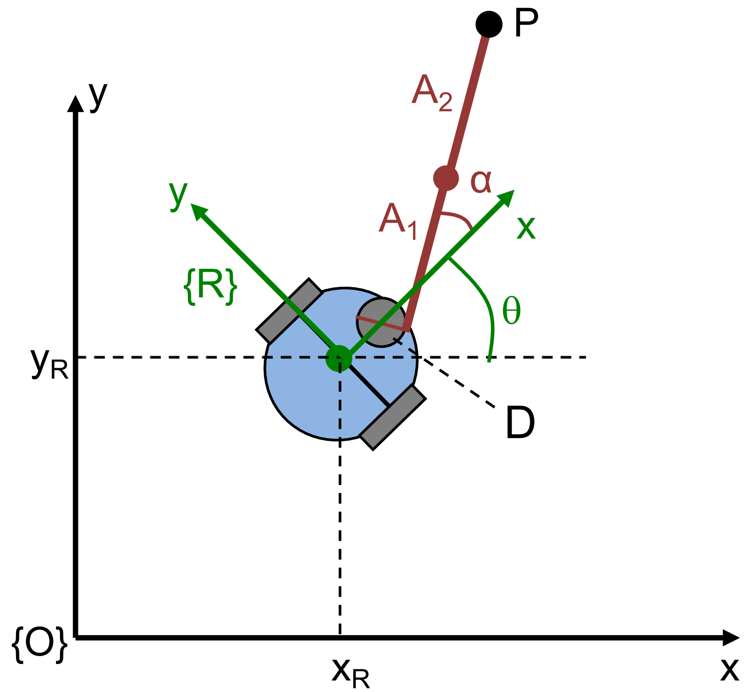
Der Roboter hat die Länge l und die Höhe h (ohne Räder). Der Radius der Räder ist r.

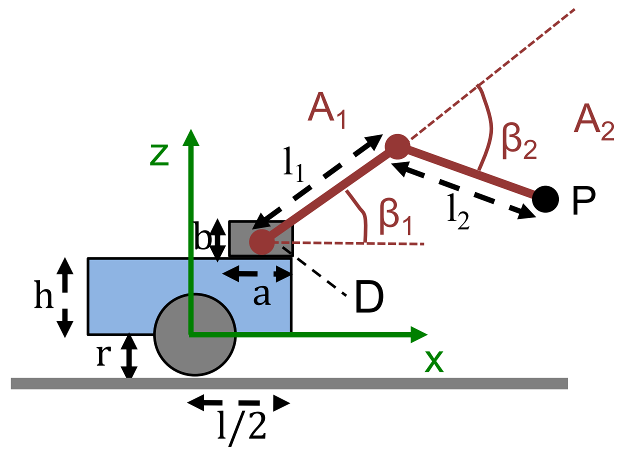
Ein Roboterarm ist über einen Drehteller D auf dem Roboter fixiert. Der Roboterarm ist in z-Richtung um α geschwenkt.
D hat den Durchmesser a und die Höhe b.

Der Roboterarm besteht aus den Teilen A_1 und A_2 mit den Längen l_1 und l_2.
Die Arme sind jeweils um β_1 bzw. β_2 geneigt.
A_1 ist auf dem Drehteller D seitlich drehbar gelagert.

Legen Sie KS'e für den Roboterarm nach der DH-Konvention fest.

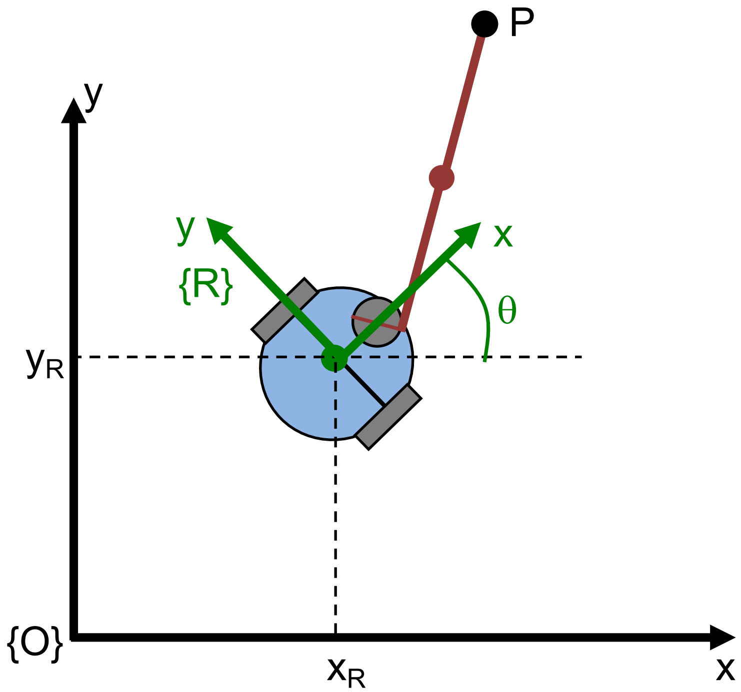
Geben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ an, mit der die Position $\mathbf{p}^0 = (x_p, y_p, z_p)$ der Armspitze P im globalen KS O berechnet werden kann.

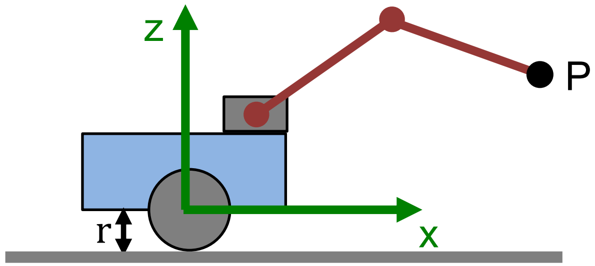




Seitenansicht mit $\alpha = 0°$

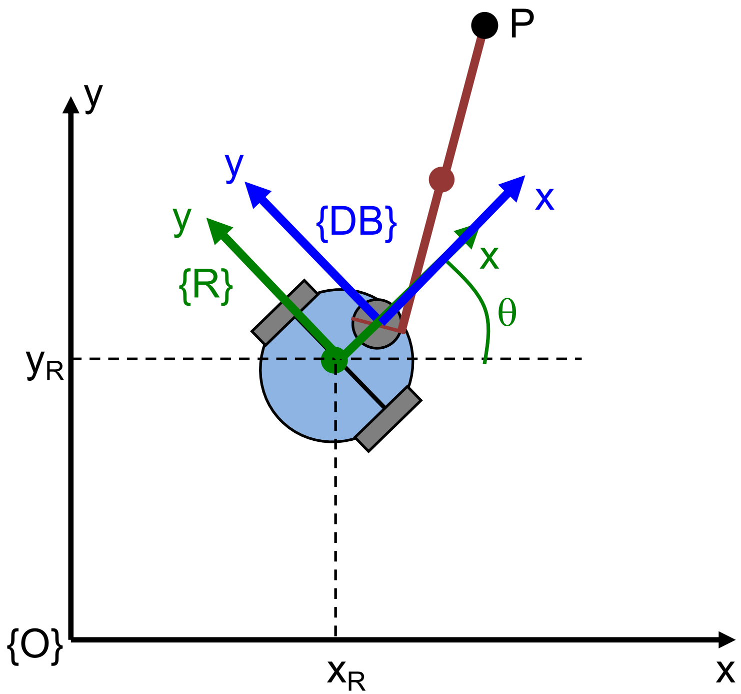
Aufgabe 2.4 – Lösung (1)

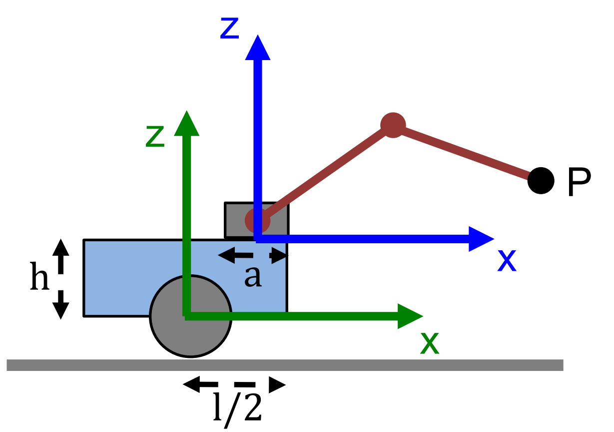




$$\mathbf{T}_\mathrm{R}^\mathrm{O} = \mathbf{Tl}((x_R, y_R, r)^\mathrm{T} * \tilde{\mathbf{R}}(z, \theta)$$

Aufgabe 2.4 – Lösung (2)

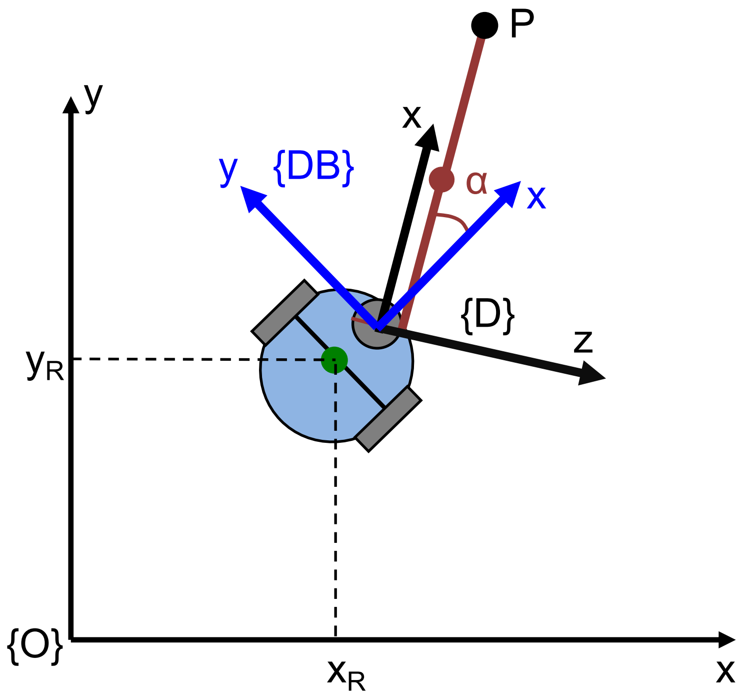


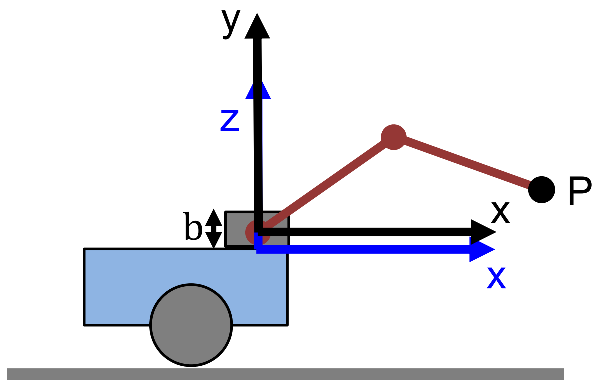


$$\mathbf{T}_{DB}^{R} = \mathbf{Tl}((l/2 - a/2, 0, h)^T)$$

DB = Drehtellerbasis (auf Roboter fixiert)

Aufgabe 2.4 – Lösung (3)

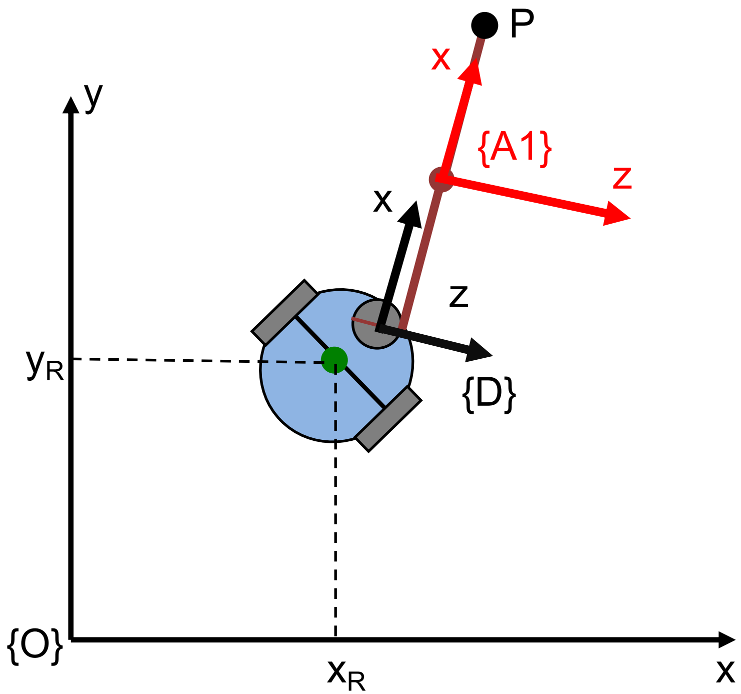


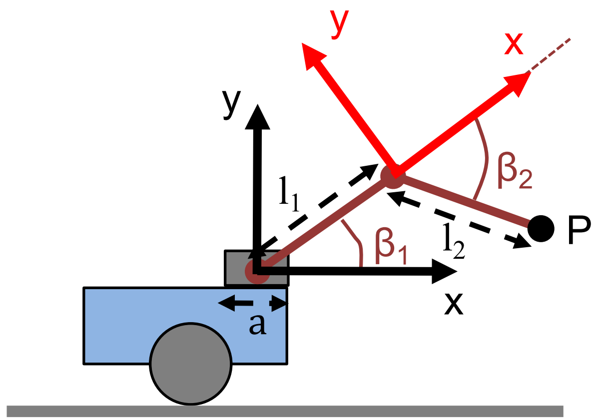


$$\mathbf{T}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DB}} = \mathbf{Tl}((0, 0, b/2)^{\mathrm{T}}) * \tilde{\mathbf{R}}(z,\alpha) * \tilde{\mathbf{R}}(x, 90°)$$

D = Drehteller

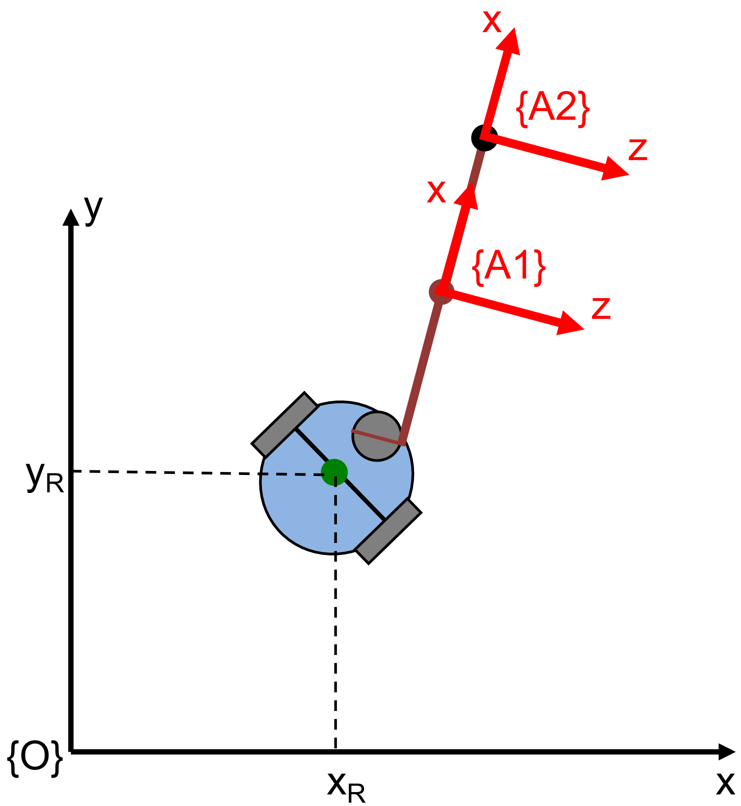
Aufgabe 2.4 – Lösung (4)

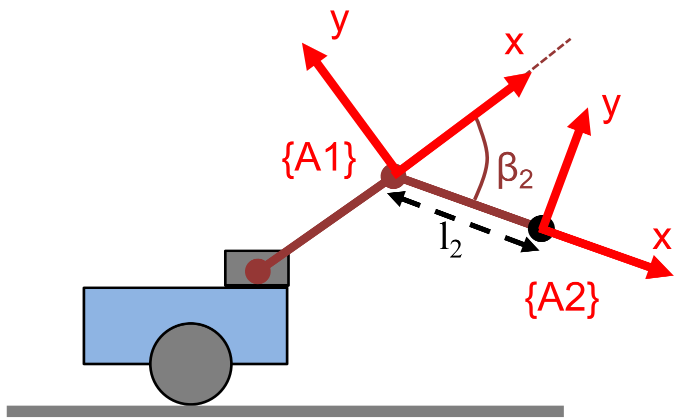




$$\mathbf{T}_{A1}^{D} = \mathbf{Tl}((0, 0, a/2)^T) * \tilde{\mathbf{R}}(z, \beta_1) * \mathbf{Tl}((l_1, 0, 0)^T)$$

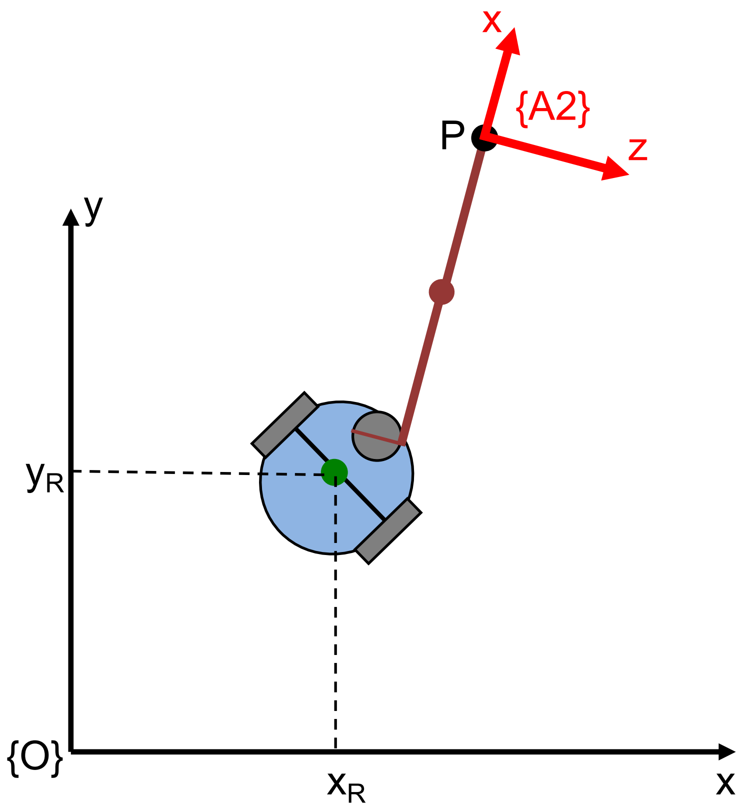
Aufgabe 2.4 – Lösung (5)

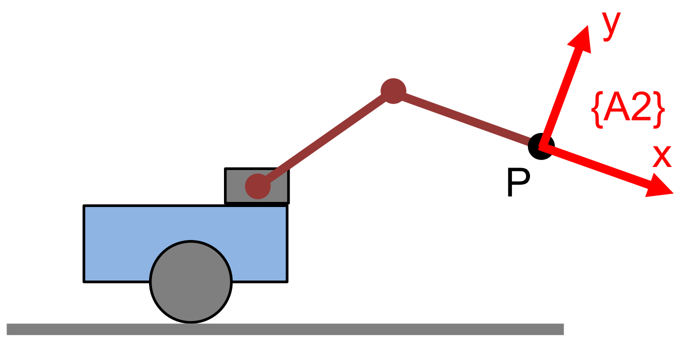




$$\mathbf{T}_{A2}^{A1} = \widetilde{\mathbf{R}}(z,\beta_2) * \mathbf{Tl}((l_2, 0, 0)^T)$$

Aufgabe 2.4 – Lösung (6)



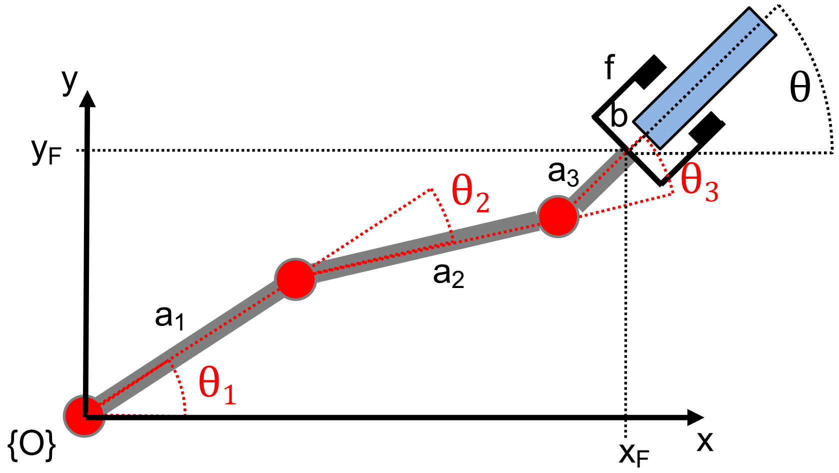


$$\tilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{O}} = \mathbf{T}_R^O * \mathbf{T}_{\mathrm{DB}}^{\mathrm{R}} * \mathbf{T}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DB}} * \mathbf{T}_{\mathrm{A1}}^{\mathrm{D}} * \mathbf{T}_{\mathrm{A2}}^{\mathrm{A1}} * \tilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{A2}}$$

$$mit\ \tilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{A2}} = (0,0,0,1)^T$$

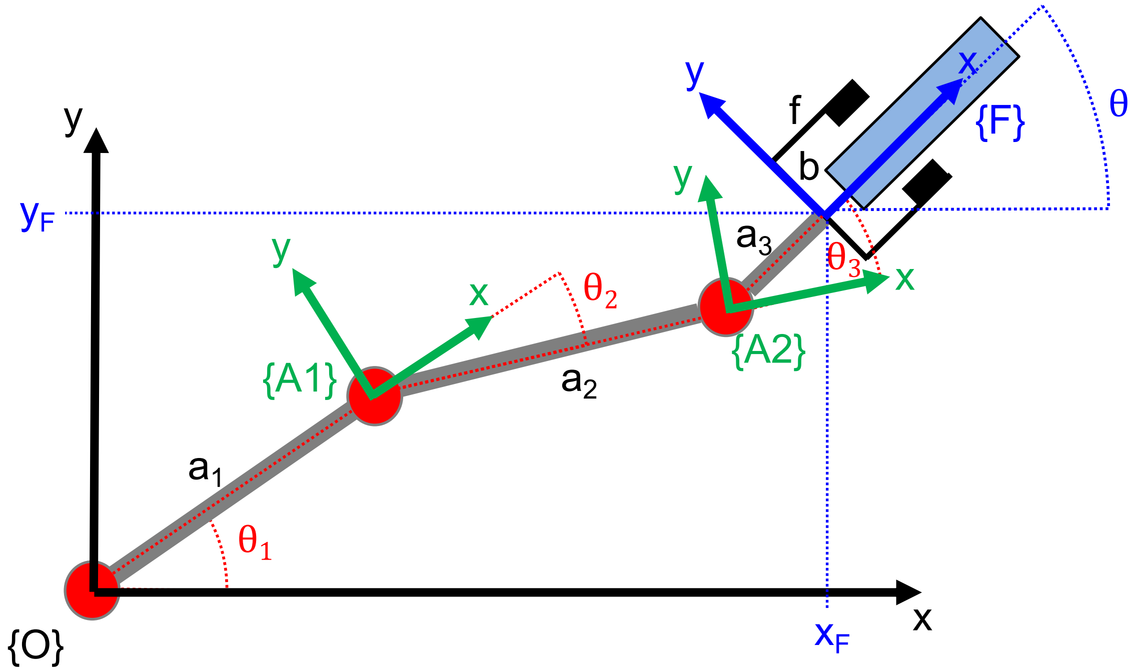
Aufgabe 2.5

- Die Abb. zeigt in der Draufsicht einen 3-DOF-Arm-Roboter mit einem Greifer und insgesamt 3 Drehgelenken (rot). Der erste Arm mit der Länge a_1 ist drehbar auf einem Tisch fixiert. Am zweiten Arm mit der Länge a_2 ist ein Greifer über ein Armstück der Länge a_3 montiert. Der Greifer besteht aus zwei Fingern der Länge f.



- Vorwärtskinematik:
  Führen Sie 2D-KS'e ein und schreiben Sie eine Funktion, die aus den Drehwinkeln der Gelenke θ_1, θ_2 und θ_3 die Position (x_F,y_F) und Ausrichtung θ des Greifers berechnet.
- Inverse Kinematik:
  Schreiben Sie eine Funktion, die aus der Position (x_F,y_F) und der Ausrichtung θ des Greifers die drei Drehwinkel der Gelenke berechnet.

Aufgabe 2.5 – Vorwärtskinematik (1)

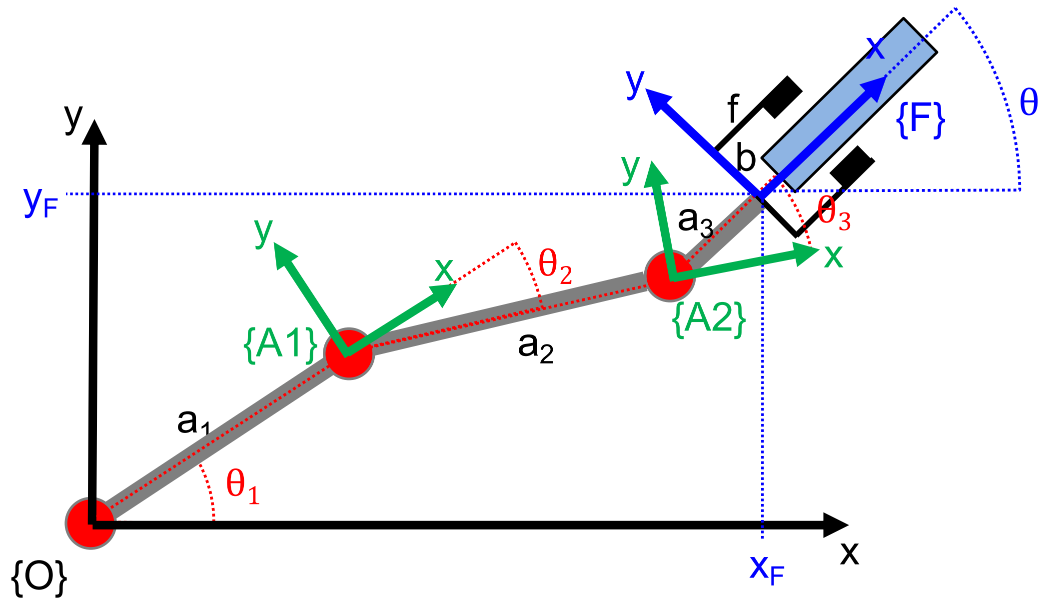


$$\mathbf{T}_{\mathrm{A1}}^{\mathrm{O}} = \tilde{\mathbf{R}}(\theta_1) * \mathbf{Tl}((a_1, 0)^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{A2}}^{\mathrm{A1}} = \tilde{\mathbf{R}}(\theta_2) * \mathbf{Tl}((a_2, 0)^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{A2}} = \tilde{\mathbf{R}}(\theta_3) * \mathbf{Tl}((a_3, 0)^{\mathrm{T}})$$

Aufgabe 2.5 – Vorwärtskinematik (2)



$$\mathbf{T}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{O}} = \mathbf{T}_{\mathrm{A1}}^{\mathrm{O}} * \mathbf{T}_{\mathrm{A2}}^{\mathrm{A1}} * \mathbf{T}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{A2}}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a} & b & \boxed{c} \\ \boxed{d} & e & \boxed{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ausrechnen!)}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\cos(\theta)} & -\sin(\theta) & \boxed{x_F} \\ \boxed{\sin(\theta)} & \cos(\theta) & \boxed{y_F} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\theta = \mathrm{atan2}(d, a)$$
$$x_F = c$$
$$y_F = f$$

Beachte: d und a sind vorzeichenbehaftet.

Es wird Winkel aus [0, 2 π) geliefert.

Beachte: Unbekannter Winkel mit atan2 berechnen

- Numerische Ungenauigkeiten bei

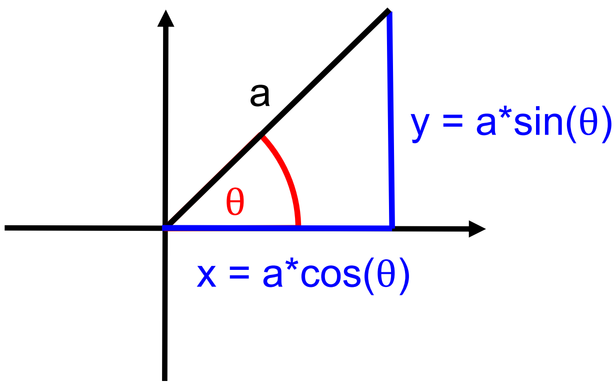
  $\theta = \arcsin(y/a)$ bzw. $\theta = \arccos(x/a)$

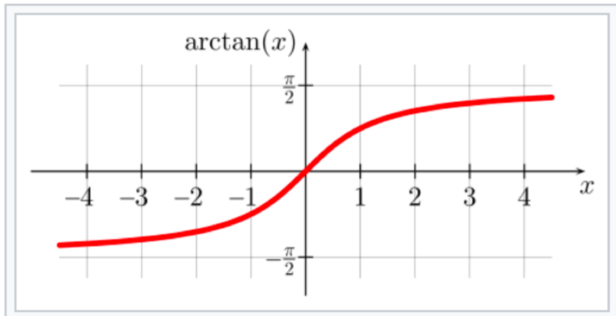
- Ableitungen von arcsin und arccos haben Singularitäten.

- Daher atan2 verwenden:

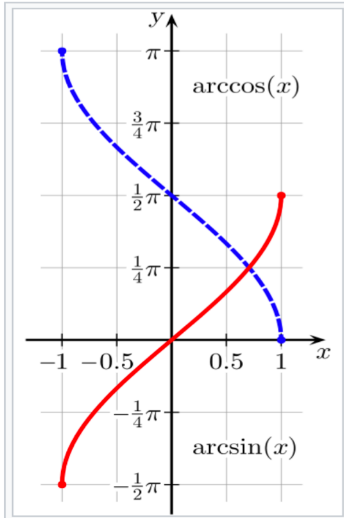
  $\boxed{\theta = \text{atan2}(y, x)}$

  x, y ist vorzeichenbehaftet. Winkel θ ist aus $[-\pi, +\pi]$.
  atan2(y, x) wird auf atan(y/x) zurückgeführt.



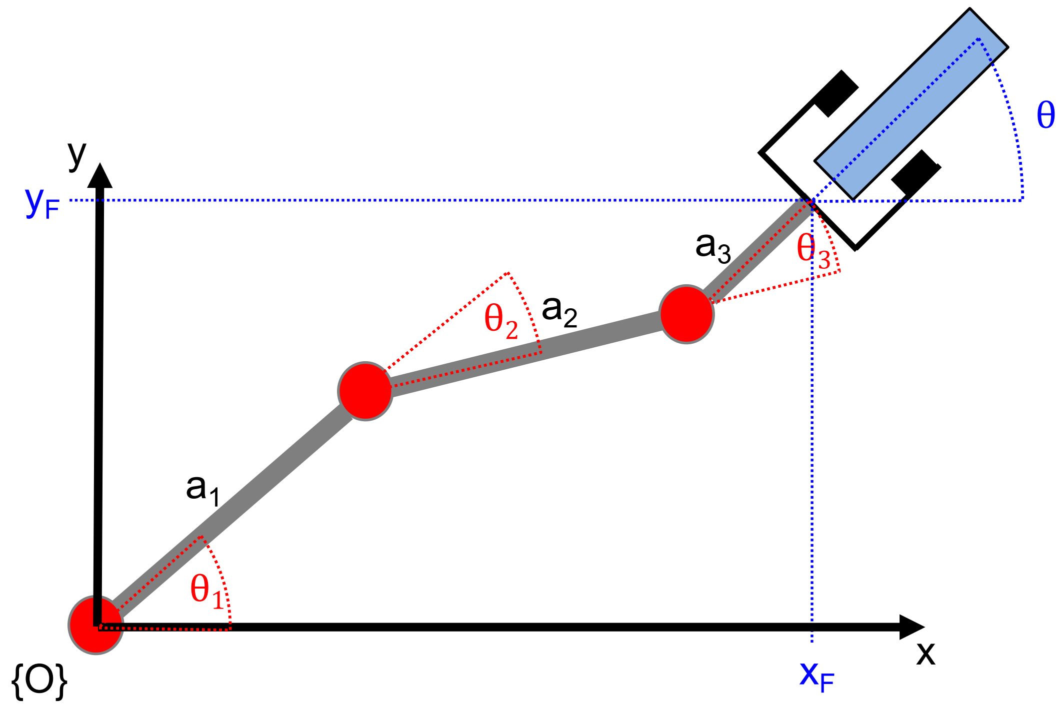


https://de.wikipedia.org/wiki



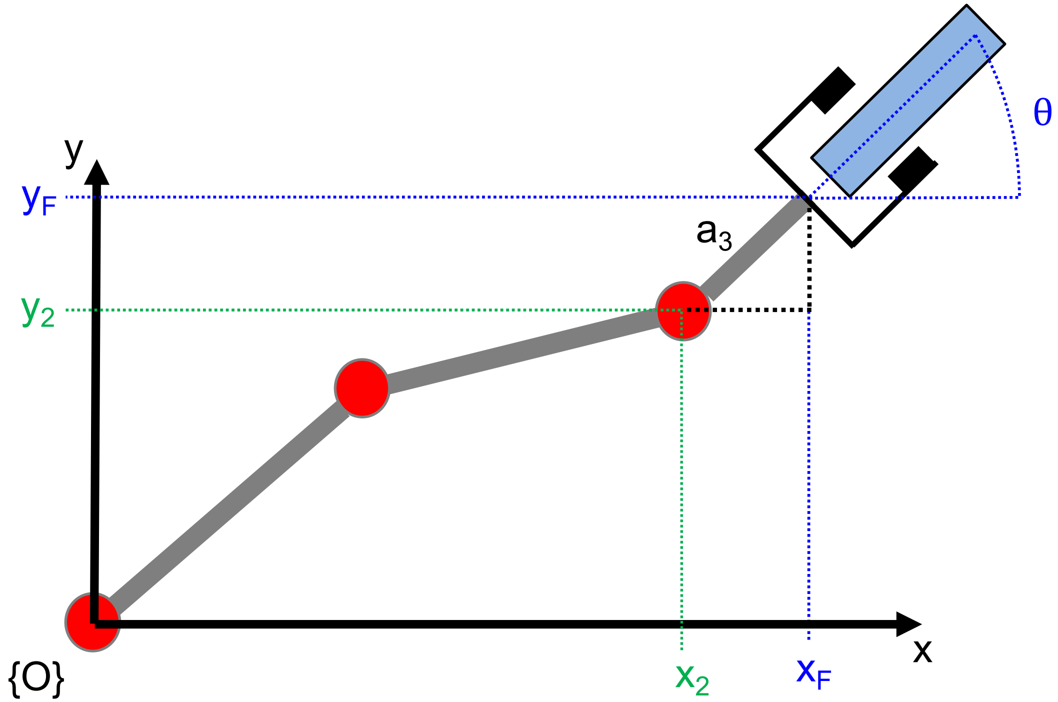
Arkussinus und Arkus-kosinus im kartesischen Koordinatensystem
arcsin (x)
arccos (x)

Aufgabe 2.5 – Rückwärtskinematik (1)



Ziel: $(x_F, y_F, \theta) \rightarrow (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

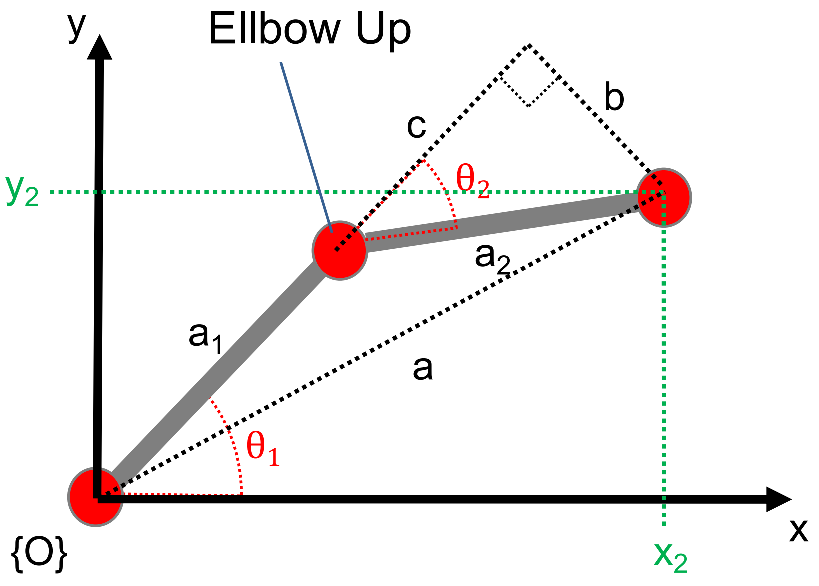
Aufgabe 2.5 – Rückwärtskinematik (2)



$$x_2 = x_F - a_3 * \cos(\theta)$$

$$y_2 = y_F - a_3 * \sin(\theta)$$

Aufgabe 2.5 – Rückwärtskinematik (3)



- Lösbarkeit:
  $a \leq a_1 + a_2$
- Eindeutigkeit:
  - Ellbow Up:
    $\varepsilon = 1$ (θ_2, $b < 0$, wie in Abb.)
  - Ellbow Down:
    $\varepsilon = -1$ (θ_2, $b > 0$)

Drei rechtwinklige Dreiecke:

$$(1) \quad a^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$(2) \quad a^2 = (a_1 + c)^2 + b^2$$

$$(3) \quad a_2^2 = c^2 + b^2$$

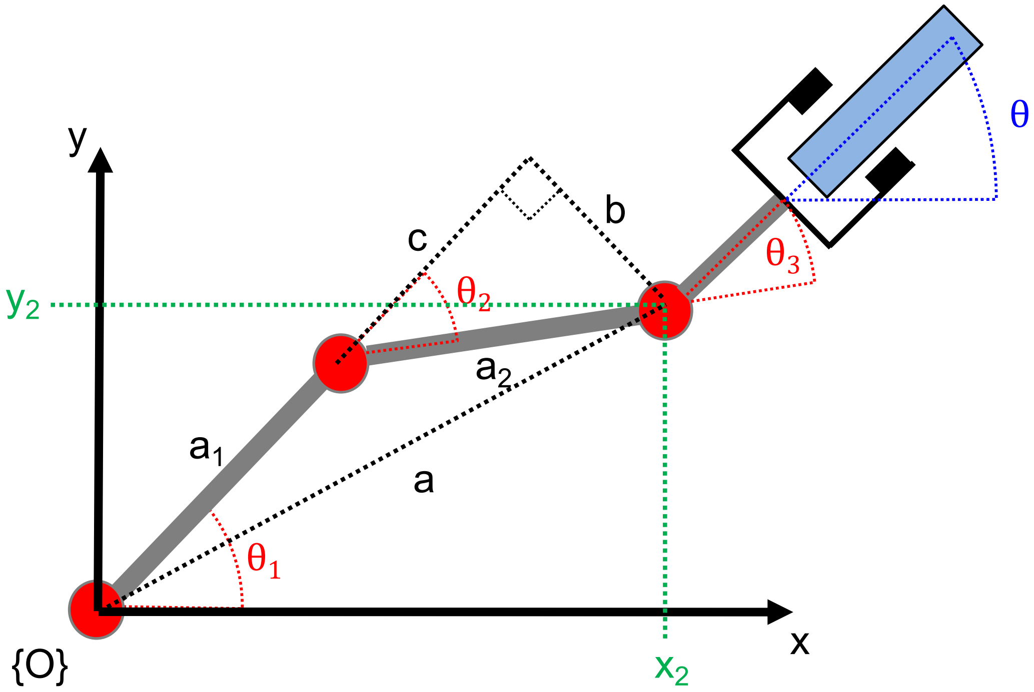
Damit:

$$(4) \quad a = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$(5) \quad c = \frac{a^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1}$$

$$(6) \quad b = \varepsilon * \sqrt{a_2^2 - c^2}$$

Aufgabe 2.5 – Rückwärtskinematik (4)



$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(b, c)$$

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(y_2, x_2) - \mathrm{atan2}(b, a_1 + c)$$

$$\theta_3 = \theta - \theta_1 - \theta_2$$