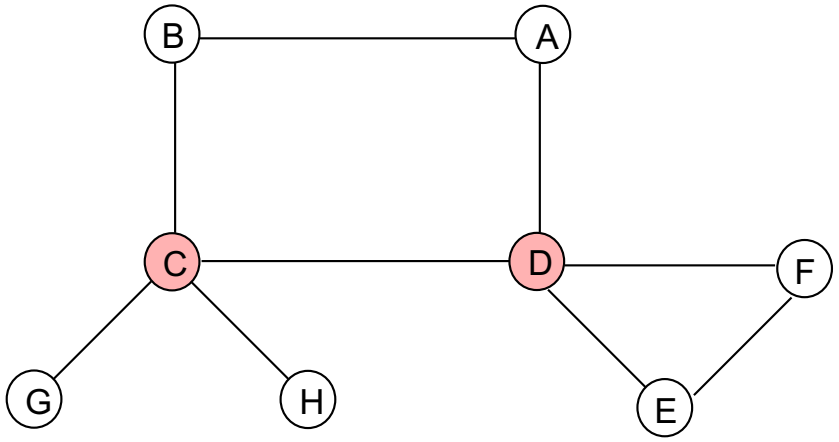
12. Zweifach zusammenhängende Graphen

- Artikulationspunkte,
  zweifach zusammenhängende Graphen
- Tiefensuchwald mit Rückwärtskanten
- Algorithmus zur Berechnung der
  Artikulationspunkte

Artikulationspunkt

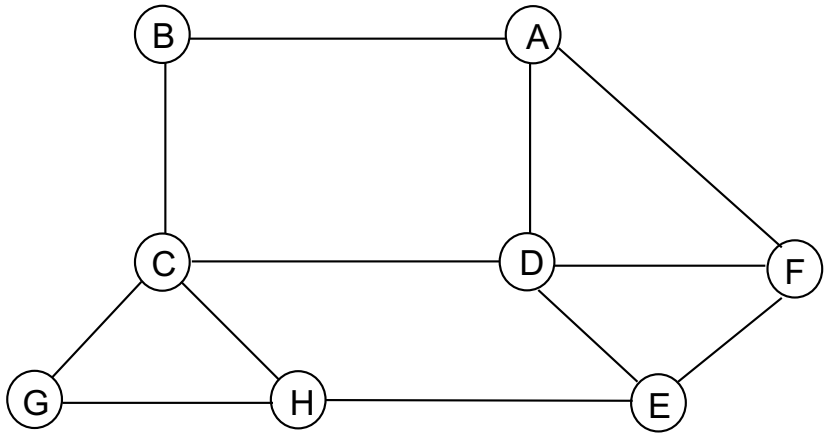
- Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend (engl. connected), falls es für jeden Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten gibt.
- Eine Zusammenhangskomponente eines ungerichteten Graphen G ist ein maximal zusammenhängender Teilgraph.
- Ein Knoten heißt Artikulationspunkt (Artikulation med. = Gelenk; engl. articulation point), wenn sein Wegfall die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.



- Ein ungerichteter und zusammenhängender Graph G mit den Artikulationspunkten C und D.
- G \ {C} zerfällt in 3 Zusammenhangskomponenten
- G \ {D} zerfällt in 2 Zusammenhangskomponenten.

Artikulationspunkte und zweifacher Zusammenhang

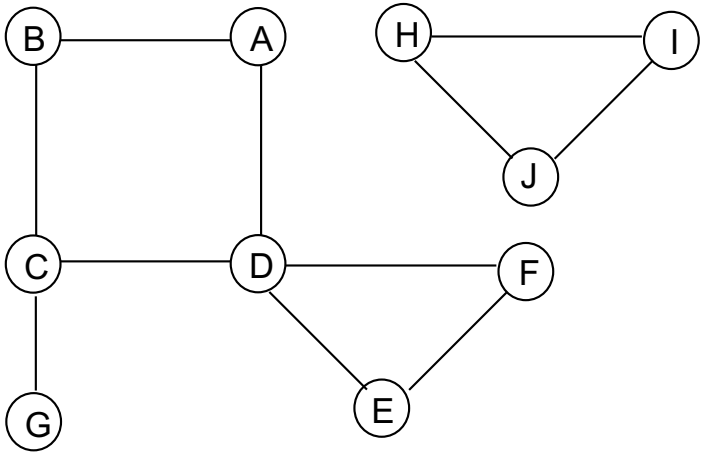
- Ein Graph heißt zweifach zusammenhängend (engl. biconnected), falls er zusammenhängend ist und keinen Artikulationspunkt besitzt.
- Ziel: Bestimme in einem ungerichteten Graphen alle Artikulationspunkte.
- Damit ist auch das Problem des zweifachen Zusammenhangs gelöst.



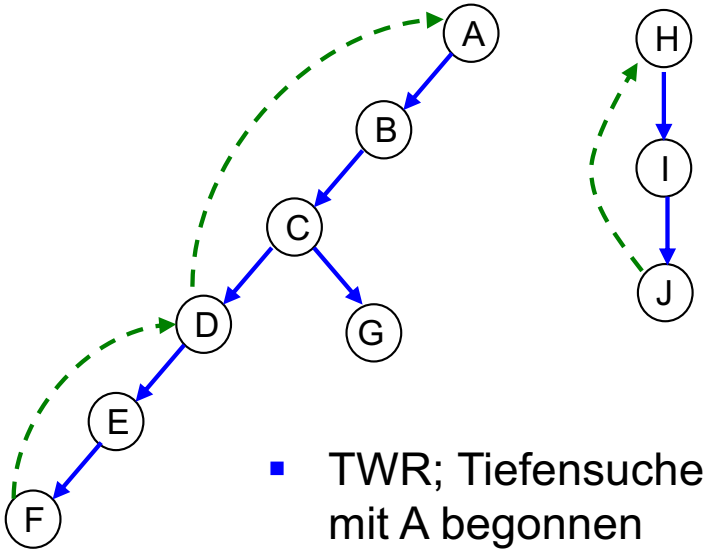
- Graph G ist zusammenhängend und hat keine Artikulationspunkte
- G ist daher zweifach zusammenhängend

Tiefensuchwald mit Rückwärtskanten (TWR)

- Stellt man die Tiefensuche für einen Graph G graphisch dar, ergibt sich ein Tiefensuchwald.
- Der Tiefensuchwald besteht aus Vorwärtskanten.
- Zusätzlich wird der Tiefensuchwald ergänzt um Rückwartskanten. Rückwartskanten sind Kanten, die einen Knoten mit einem bereits früher besuchten Knoten verbinden jedoch nicht den unmittelbar davor besuchten Knoten.
- Beachte: Anzahl der Kanten in G und TWR müssen gleich sein.



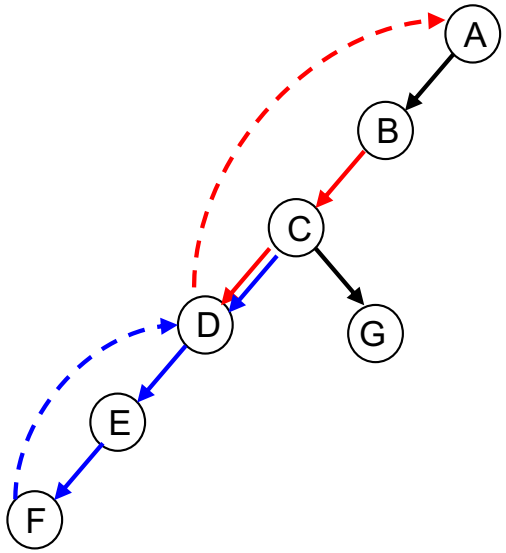
Graph G



- TWR; Tiefensuche wurde mit A begonnen
- Vorwärtskanten und Rückwärtskanten

Vorfahre und Rückwärtsweg

- Knoten v ist Vorfahre von w, falls es im TWR einen Weg von v nach w gibt, der nur aus Vorwärtskanten besteht.
- Ein Rückwärtsweg ist ein Weg in einem TWR mit einer beliebig langen (evtl. leeren) Folge von Vorwärtskanten und dann genau einer Rückwärtskante.



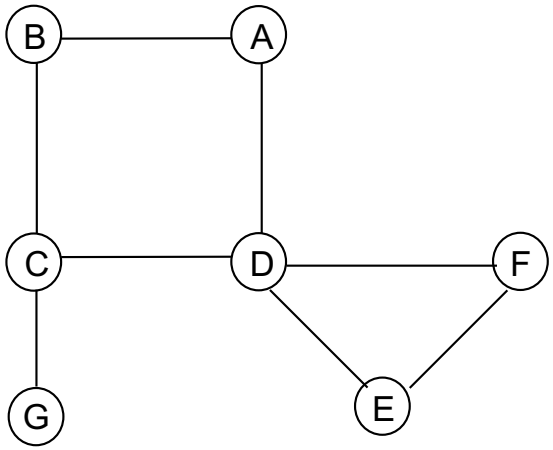
Beispiele:

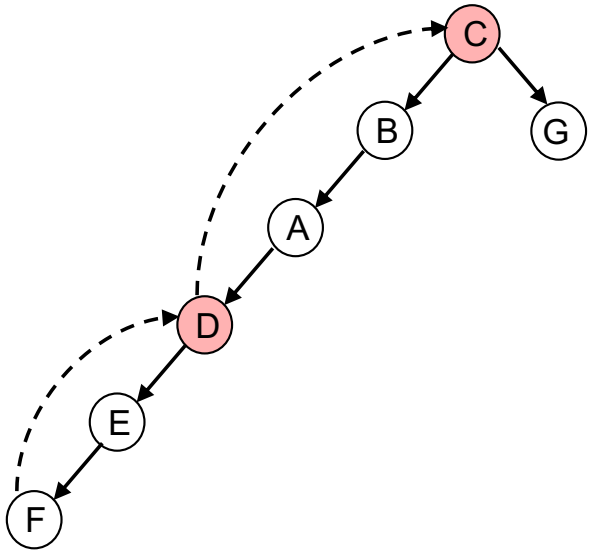
- C ist Vorfahre von D, E, F und G
- B – C – D – A ist ein Rückwärtsweg
- C – D – E – F – D ist ein Rückwärtsweg
- E – F – D – A ist kein Rückwärtsweg

Bestimmung von Artikulationspunkten

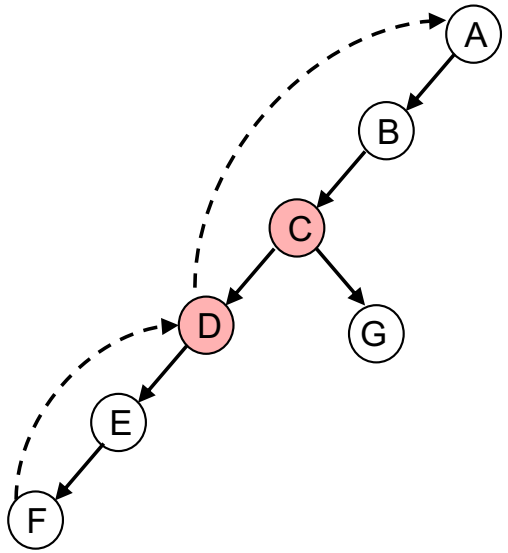
(W) Die Wurzel ist ein Artikulationspunkt,
wenn sie mehr als ein Kind hat.

(NW) Ein Knoten v ≠ Wurzel ist ein Artikulationspunkt, falls v im TWR ein Kind w hat,
so dass es von w keinen Rückwärtsweg zu einem Vorfahren von v gibt.





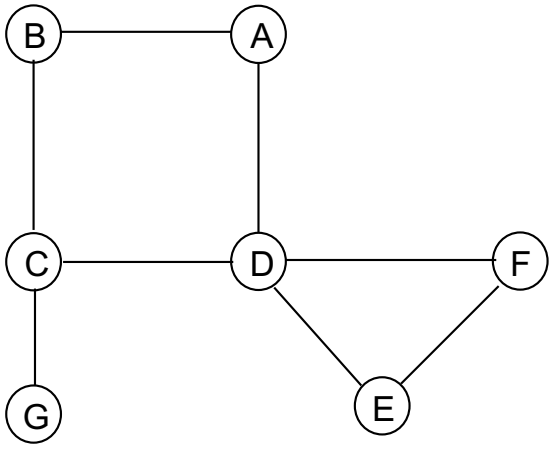
- TWR, der mit Knoten C beginnt
- C ist Artikulationspunkt wegen (W)
- D ist Artikulationspunkt wegen (NW)

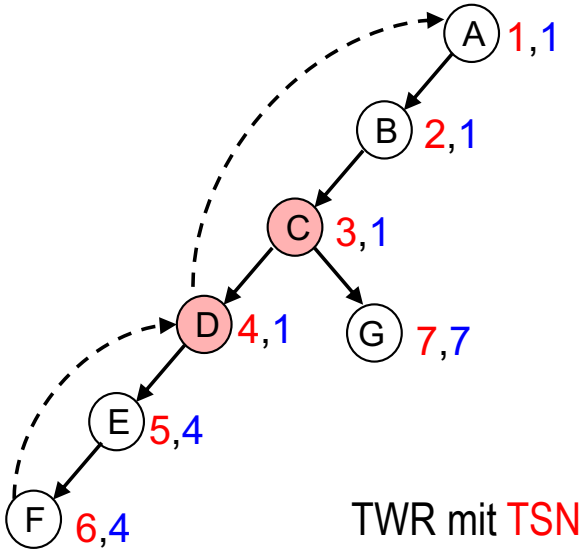


- TWR, der mit Knoten A beginnt
- C und D sind Artikulations-
punkte wegen Regel (NW)

Nummerierungen: TSNr und MinNr

- TSNr[v]: Besuchszeitpunkt für Knoten v bei der rek. Tiefensuche
- MinNr[v]: Minimum { TSNr[w] / w = v oder w ist von v über einen Rückwärtsweg erreichbar }
  Wie weit kommt man von v über einen Rückwärtsweg zurück?





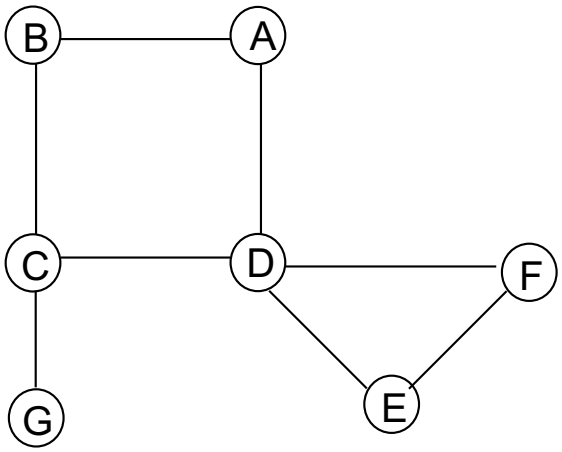
TWR mit TSNr und MinNr

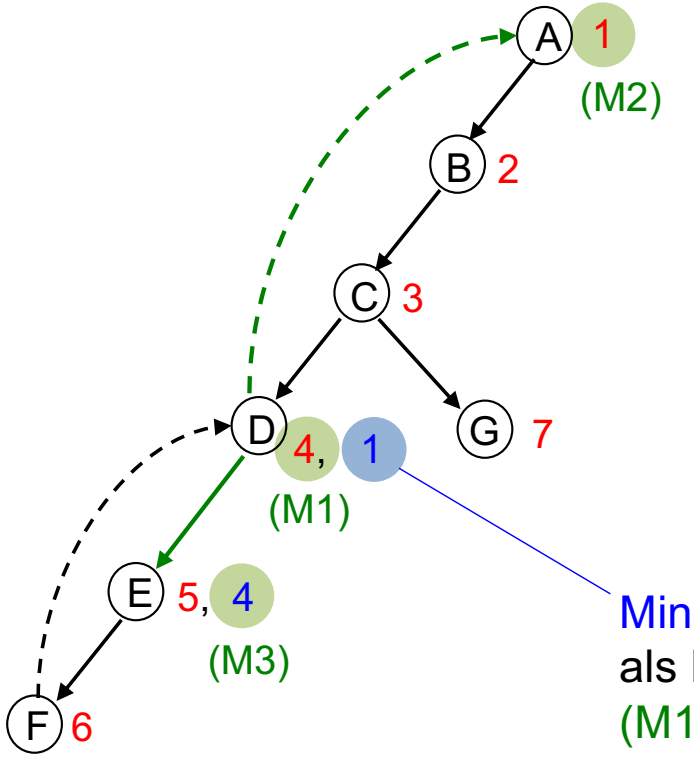
Damit lässt sich Regel (NW) neu formulieren:

(NW) Knoten v ≠ Wurzel ist genau dann ein Artikulationspunkt,
wenn v ein Kind w hat mit MinNr[w] ≥ TSNr[v] .

Berechnung von MinNr

- MinNr[v] = Minimum von
  - (M1) TSNr[v],
  - (M2) kleinster Wert von TSNr[w] für alle Rückwärtskanten (v,w)
  - (M3) kleinster Wert von MinNr[w] für alle Vorwärtskanten (v,w)





TWR mit TSNr und MinNr

MinNr[D] ergibt sich als Minimum aus (M1), (M2) und (M3)

Algorithmus zur Bestimmung von Artikulationspunkten (1)

```
Set<Vertex> visited;
int counter;
int[ ] TSNr;
int[ ] MinNr;
Vertex[ ] p;


public void findArtPoint(Graph g)  {
        visited = ∅;
        counter = 1;

        for (jeden Knoten v)
                if (! visited.contains(v) )
                        findArtPoint(g, v);
}


private void findArtPoint(Graph g, Vertex v)  {
        // s. nächste Seite
}
```

Globale Variablen:

- counter dient zum Hochzählen der Besuchszeitpunkte.
- TSNr und MinNr wie soeben beschrieben.
- p[v] speichert den im TWR zu v gehörenden Elternknoten ab.

- findArtPoint(g) gibt alle Artikulationspunkte des ungerichteten Graphen g aus.

- findArtPoint(g,v) startet eine rekursive Tiefensuche bei Knoten v.

- Beachte:
  Die Prüfung, ob eine Wurzel ein Artikulationspunkt ist (Regel (W)), wurde einfachheitshalber weggelassen, lässt sich aber einfach ergänzen.

Algorithmus zur Bestimmung von Artikulationspunkten (2)

```
Set<Vertex> visited;
int counter;
int[ ] TSNr[n];
int[ ] MinNr;
int[ ] p;

// ...

private void findArtPoint(Graph g, Vertex v)  {
        visited.add(v);
        TSNr[v] = counter++;
        MinNr[v] = TSNr[v];    // (M1)
        for (jeden Nachbarn w von v ) {
                if (! visited.contains(w)) {
                        p[w] = v;
                        findArtPoint(g, w);
                        if  (MinNr[w] >= TSNR[v])    println(v + "ist ein Artikulations-Punkt");
                        MinNr[v] = Minimum(MinNr[v], MinNr[w]);   // (M3)
                }
                else if (p[v] != w)   // (v,w) ist Rückwärtskante
                        MinNr[v] = Minimum(MinNr[v], TSNr[w]);    // (M2)
        }
}
```

- p[v] speichert den im TWR zu v gehörenden Elternknoten ab.

- Mit p[v] kann geprüft werden, ob (v,w) tatsächlich eine Rückwärtskante ist.