6. Prioritätslisten (Priority Queues)

- Definition und Anwendungen
- Binäre Heaps
- Anwendung: HeapSort
- Index-Heaps mit change- und remove-Operation
- Binomiale Heaps mit merge-Operation

Prioritätslisten

- Eine Prioritätsliste speichert eine Liste von Elementen mit Prioritäten, für die eine lineare Ordnung (z.B. Vergleichsoperation auf Zahlen) definiert ist.
- Folgende Operationen werden effizient unterstützt:
  - deleteMax() : löscht das Element mit größter Priorität
  - insert(x): fügt ein neues Element mit Priorität x ein.
  - build(x[ ]): Aufbau einer Prioritätsliste aus einem Feld von Elementen.
- Ebenfalls möglich: deleteMin statt deleteMax (einfach realisierbar durch geeignete Anpassung der Vergleichsoperation)
- Gleiche Prioritäten dürfen mehrfach vorkommen.
- In der Literatur wird manchmal auch von Schlüsseln statt Prioritäten gesprochen.

Evtl. weitere Operationen

- Elemente mit einer eindeutigen Nummerierung versehen und folgenden Operationen:
  - change(i, x):
    ändert beim Element mit Nummer i die Priorität auf x.
  - remove(i):
    löscht das Element mit Nummer i
- Verschmelzung von 2 Prioritätslisten:
  - prioList1.merge(prioList2):

Anwendungen

- Grundlegend für Greedy-Algorithmen (gierige Algorithmen):
  - Löse ein Problem, indem mit einer einfachen Teillösung begonnen und diese schrittweise erweitert wird.
  - Wähle dabei immer den bestmöglichen Schritt (höchste Priorität) ohne Berücksichtigung zukünftiger Schritte:
    „Nimm immer das größte Stück zuerst“
  - zahlreiche Beispiele für Greedy-Algorithmen:
    Dijkstra-Algorithmuns, Prim-Algorithmus,
    Kruskal-Algorithmus, Datenkompression mit dem Huffman-Verfahren, etc.
- HeapSort:
  Lösche aus einer Folge das jeweils größte Element und speichere es in die sortierte Folge ab.
- Scheduler in Betriebssystemen:
  Elemente der Prioritätsliste sind Jobs.
  Für schnelle Antwortzeiten erhalten kurze Jobs hohe Proritäten.

Analyse naheliegender Implementierungen (1)

Datenstruktur	deleteMax()	insert(x)	build(x[ ])	merge(prioList)
verkettete Liste (unsortiert)	O(n)	O(1)	O(n)	O(1)
sortierte, verkettete Liste	O(1)	O(n)	O(n log n)	O(n)
Ausgeglichener Suchbaum	O(log n)	O(log n)	O(n log n)	O(n log n)

- Alle Komplexitätsangaben für Prioritätslisten mit n Elementen.
- build bei sortierter Liste mit schnellem Sortierverfahren.
- Verkettete Liste mit Zeiger auf letztem Knoten,
  so dass bei unsortierter Liste merge in O(1).

Analyse naheliegender Implementierungen (2)

Datenstruktur	change(i, x)	remove(i)
verkettete Liste mit effizienter Suchstruktur für Nummerierung	O(log n)	O(log n)
sortierte, verkettete Liste mit effizienter Suchstruktur für Nummerierung	O(n)	O(log n)
Ausgeglichener Suchbaum mit effizienter Suchstruktur für Nummerierung	O(log n)	O(log n)

- Nummer i zur eindeutigen Identifizierung.
- Um bei change(i, x) bzw. remove(i) das Element mit Nummer i effizient (d.h. O(log n)) finden zu können, wird zusätzlich eine schnelle Suchstruktur für die Nummer als Schlüssel benötigt.
- change(i, x) bei sortierter Liste erfordert ein teures Umordnen in O(n).

6. Prioritätslisten (Priority Queues)

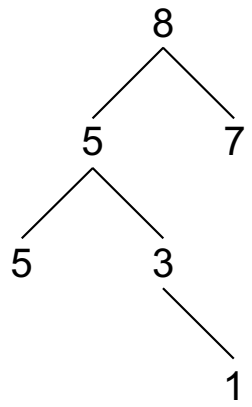
- Definition und Anwendungen
- Binäre Heaps
- Anwendung: HeapSort
- Index-Heaps mit change- und remove-Operation
- Binomiale Heaps mit merge-Operation

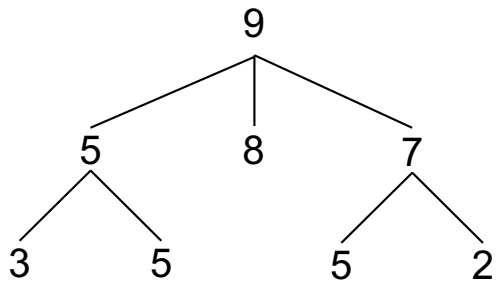
Heaps

- Ein Heap ist ein Baum, für den die sogenannte Heap-Ordnung gilt:

  Jeder Knoten ist größer als oder gleich seiner Kinder.

- Beispiele:

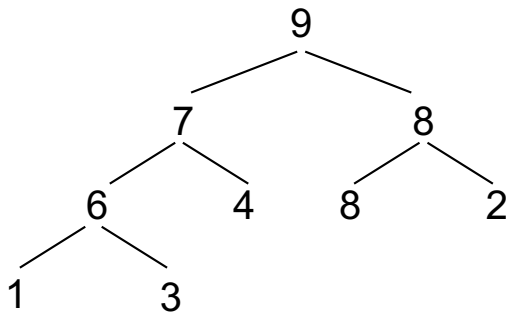




- Das größte Element steht grundsätzlich an der Wurzel.
- In der Praxis wird versucht, die Heaps möglichst balanziert zu halten.

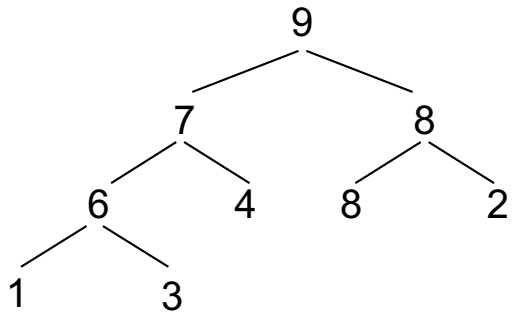
Binäre Heaps

- Ein binärer Heap ist ein vollständiger Binärbaum mit Heap-Ordnung.
- In einem vollständigen Binärbaum hat jeder Knoten maximal zwei Kinder und alle Ebenen sind vollständig gefüllt. Die letzte Ebene ist linksbündig gefüllt.
- Beispiel:



Binäre Heaps als Felder

- Ein binärer Heap lässt sich einfach als Feld implementieren, in dem die Elementen des Heaps ebenenweise in das Feld abgespeichert werden.

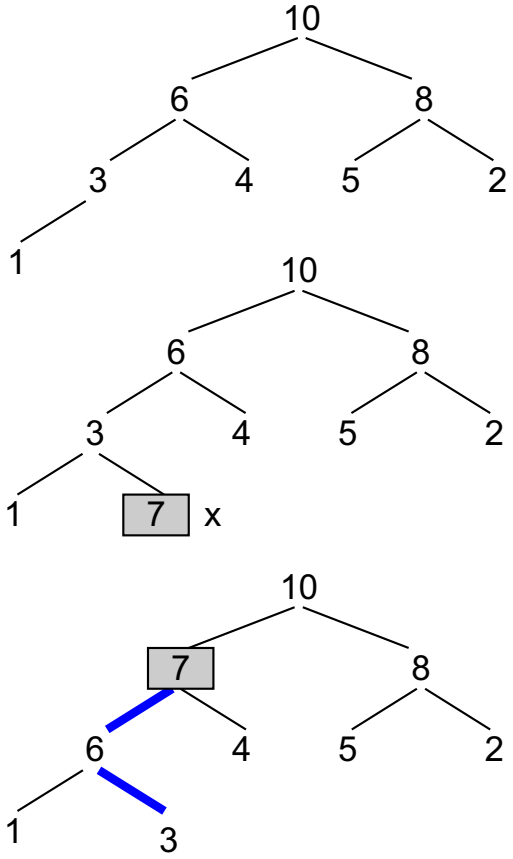


a	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
	9	7	8	6	4	8	2	1	3

- Die Implementierung als Feld gestattet eine effiziente Baumtraversierung - sowohl von der Wurzel als auch von den Blättern aus:
  - Wurzel ist a[0].
  - Die Kinder von a[i] sind a[2*i+1] und a[2*i+2].
  - Der Elternknoten zu a[i] ist a[(i-1)/2] (ganzzahlige Division)
- Die Höhe eines Heaps mit n Elementen ist $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Operation insert und upheap (1)

- Ein neues Element wird eingefügt, indem es an das Ende des Heaps abgespeichert wird.
- Im allgemeinen ist dann die Heap-Ordnung verletzt.
- Um die Heap-Ordnung wieder herzustellen, wird das neue Element nach oben verschoben (Upheap).



Heap zu Beginn.

Einfügen von 7 am Heap-Ende.

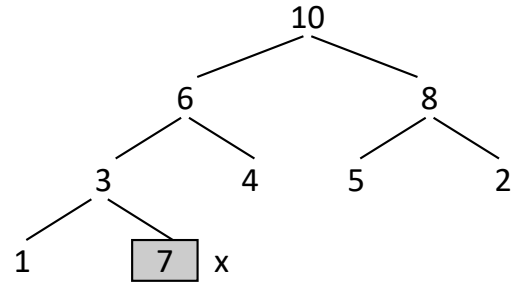
Upheap auf 7 durchführen, bis Heap-Ordnung wieder erfüllt ist.

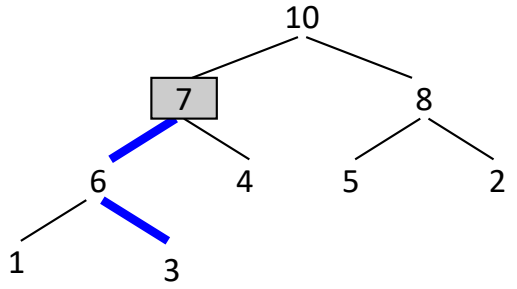
Operation insert und upheap (2)

```
private void upheap(int k) {
        int x = a[k];
        while (k > 0 && a[(k-1)/2] < x) {
                a[k] = a[(k-1)/2];
                k = (k-1)/2;
        }
        a[k] = x;
}

public void insert(int x) {
        a[n++] = x;
        upheap(n-1);
}

private int[ ] a = new int[N];    // Heap
private int n = 0;    // Anzahl Elemente im Heap
```





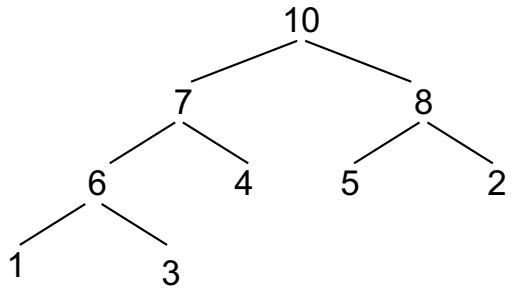
- Laufzeit von upheap und damit von insert: O(log n)

Operation delMax und downheap (1)

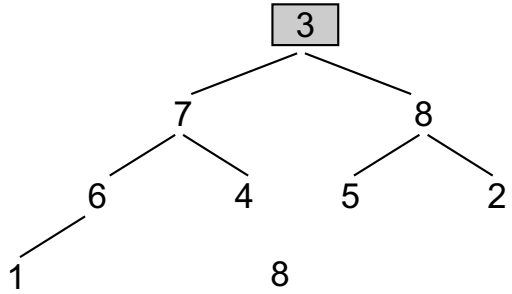
- Das größte Element a[0] kann einfach gelöscht werden, indem es durch das letzte Element des Heaps ersetzt wird:

  a[0] = a[n-1];

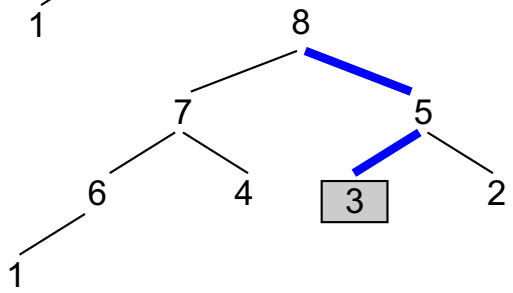
- Im allgemeinen ist dann die Heap-Ordnung verletzt.
- Um die Heaps-Ordnung wieder herzustellen, wird a[0] nach unten zum jeweils größerem Kind verschoben (Downheap).



Heap zu Beginn.



10 wird gelöscht und durch letztes Element 3 ersetzt.

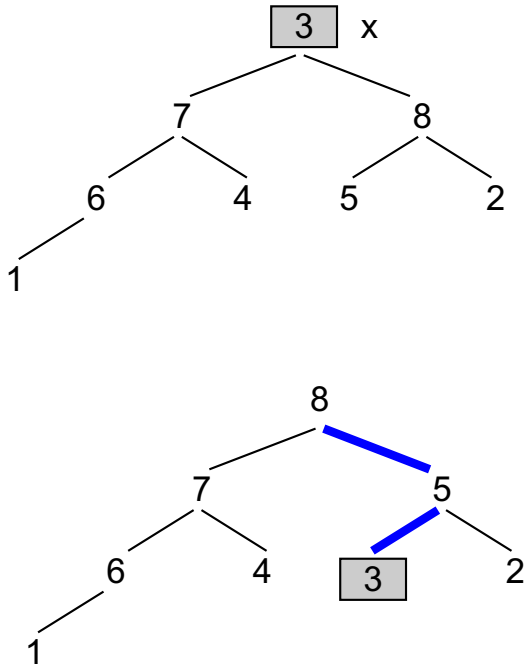


Downheap auf 3 anwenden, bis Heap-Ordnung erfüllt ist.

Operation delMax und downheap (2)

```
private void downheap(int k) {
        int x = a[k];
        while (2*k+1 < n) {  // a[k] hat Kind
                int j = 2*k+1; // a[j] ist linkes Kind von a[k]
                if (j+1 < n) // a[k] hat rechtes Kind
                        if (a[j+1] > a[j]) j++;
                // a[j] ist jetzt das groesste Kind
                if (x >= a[j])
                        break;   // Schleifenabbruch
                a[k] = a[j];
                k = j;
        }
        a[k] = x;
}

public int deleteMax() {
        int x = a[0];
        a[0] = a[--n];
        downheap(0);
        return x;
}
```



- Laufzeit von downheap und damit von deleteMax:
  O(log n)

Aufbau eines Heaps: Operation build

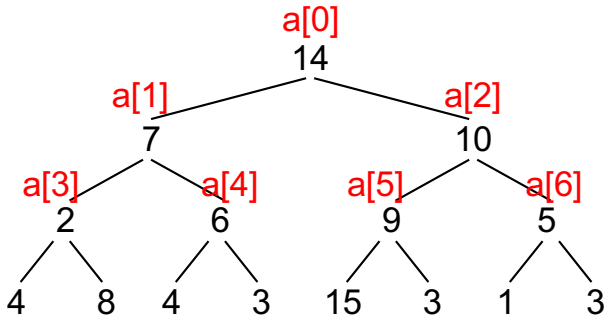
- Wende auf letzten Nicht-Blatt-Knoten (Index n/2 – 1; ganzzahlige Divisio)) bis zur Wurzel jeweils eine downheap-Operation an.
  Abwärtslaufende Zählschleife!

```
public void build(int[ ] x) {
        System.arraycopy(x, 0, a, 0, x.size);
        for (int i = n/2 - 1; i >= 0; i--)
                downheap(i);
}
```

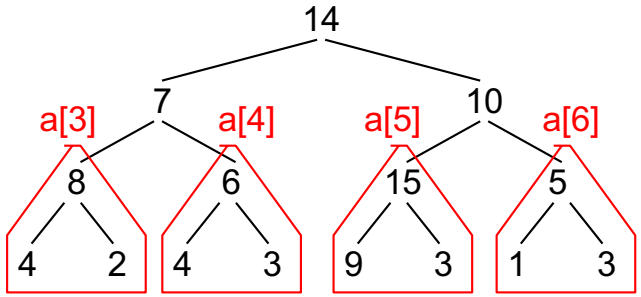
- Begründung, warum der letzte Nicht-Blatt-Knoten den Index n/2 – 1 hat:
  - Letzter Nicht-Blatt-Knoten muss Elternknoten des letzten Blattes sein.
  - Letztes Blatt hat Index n-1.
  - Elternknoten hat daher den Index (n-2)/2 = n/2 -1 (ganzzahlige Division)

Beispiel zu Aufbau eines Heaps (1)

- Ziel: Umbau von a = {14, 7, 10, 2, 6, 9, 5, 4, 8, 4, 3, 15, 3, 1, 3} in ein Heap.

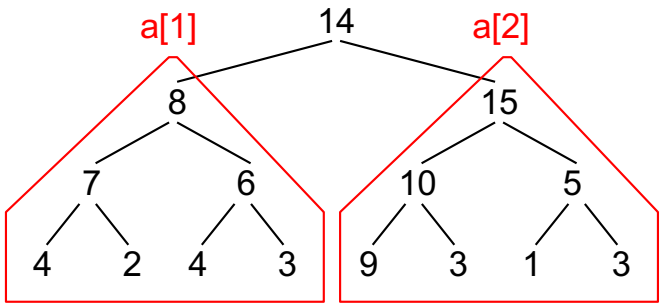


- Downheap angewandt auf Position i = 6, 5, 4 und 3:

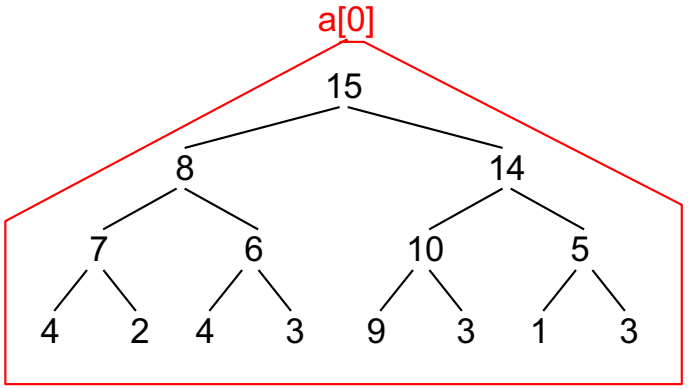


Beispiel zu Aufbau eines Heaps (2)

- Downheap angewandt auf Position i = 2 und 3:

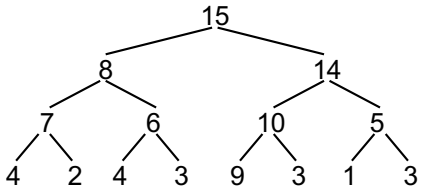


- Downheap angewandt auf Position i = 0:



Analyse des Aufbaus eines Heaps

- Wir nehmen einfacheitshalber an, dass $n = 2^k - 1$.
  Damit ist der Heap ein vollständiger Binärbaum, der auch in der untersten Schicht vollständig gefüllt ist.
  Die Höhe des Heaps ist k-1.



$n = 15 = 2^4 - 1$
Höhe = 3

- Folgende Downheaps werden ausgeführt:
  - (n+1)/4 mal Heaps der Höhe 1
  - (n+1)/8 mal Heaps der Höhe 2
  - (n+1)/16 mal Heaps der Höhe 3
  - …
  - $(n+1)/2^k = 1$ mal auf ein Heap der Höhe k-1

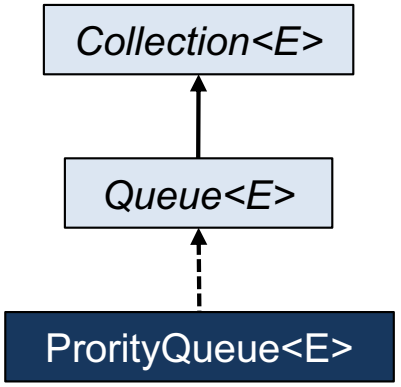
- Insgesamt ergibt sich damit folgende Laufzeit (c ist eine Konstante):

$$T(n) = (n+1) * (\underbrace{1/4 + 2/8 + 3/16 + \ldots + (k-1)/2^k}_{\rightarrow 1}) * c$$

- Damit: $T(n) = O(n)$

PriorityQueue aus der Java-Collection

- Klasse PriorityQueue aus der Java-API bietet Implementierung einer Prioritätsliste an.
- Vergleichsoperation als Konstruktor-Parameter.
- Operationen in O(log n):
  - offer zum Einfügen eines Elements
  - poll zum Löschen des Elements mit höchster (bzw. niedrigster) Priorität
  - peek zum Lesen des Elements mit höchster (bzw. niedrigster) Priorität
- ProrityQueue ist als binärer Heap realisiert.
- Keine effiziente change-Methode!
  Effiziente Implementierung mit Index-Heaps (nächster Abschnitt).

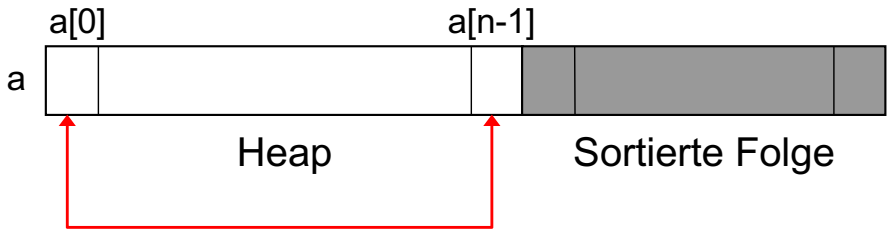


6. Prioritätslisten (Priority Queues)

- Definition und Anwendungen
- Binäre Heaps
- Anwendung: HeapSort
- Index-Heaps mit change- und remove-Operation
- Binomiale Heaps mit merge-Operation

Heapsort

Idee:



Implementierung:

```
public static void heapSort(int[ ] a) {

    // a in ein Heap umbauen (wie bei Operation build):
    for (int i = n/2 - 1; i >= 0; i--)
        downheap(a, n, i);

    // Heap abbauen und sortierte Folge aufbauen:
    while (n > 1)  {
        // Im Heap sind noch mehr als 1 Element
        int t = a[0]; a[0] = a[n-1]; a[n-1] = t;
        n--;
        downheap(a, n, 0);
    }
}
```

wie downheaps(i),
außer dass Heap a und Anzahl Elemente n im Heap als Parameter übergeben werden.

Laufzeit von HeapSort im Vergleich zu anderen Sortierverfahren

- Laufzeitanalyse von HeapSort: T(n) = O(n log n)
- Laufzeitmessungen (Zeiten in msec):

Sortierverfahren	**n = 20000**	**n= 40000**	**n = 60000**	**n = 80000**	**n = 100000**
quickSort	2.12	3.83	5.95	8.10	10.31
quickSort3Median	1.79	3.65	5.65	7.71	9.82
mergeSort	2.71	5.78	8.86	12.13	15.05
heapSort	2.39	5.10	8.04	11.09	14.25

- Messbedingungen:
  - Die CPU-Zeiten sind in msec angegeben und wurden auf einem IMac 2.8 GHz Intel Core 2 Duo und NetBeans 6.8 gemessen.
  - Die Zeitmessungen wurden für 30 zufällig initialisierte int-Felder mit den verschiedenen Sortierverfahren sortiert und anschließend die Zeiten gemittelt.

6. Prioritätslisten (Priority Queues)

- Definition und Anwendungen
- Binäre Heaps
- Anwendung: HeapSort
- Index-Heaps mit change- und remove-Operation
- Binomiale Heaps mit merge-Operation

Ziel: weitere Operationen change und remove

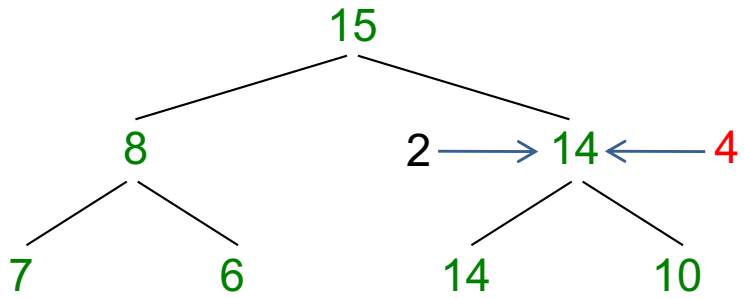
- Elemente haben nun einen Prioritätswert und eine Nummer (Index) 0,1, ..., n-1.

- Bisherige Operationen (leichte Änderung bei insert und build) werden beibehalten:
  - deleteMax() : löscht das Element mit größter Priorität
  - insert(i, x): fügt neues Element mit Nummer i und Priorität x ein.
  - build(i[ ], x[ ]): Aufbau einer Prioritätsliste aus Feld von Elementen.

- Weitere Operationen:
  - change(i, x): Priorität des Elements mit Nummer i auf x setzen.
  - remove(i): Löschen des Elements mit Nummer i.

- Effiziente Lösung mit einem Index-Heap.

Einfacher Heap löst Problemstellung nicht effizient



Position p	0	1	2	3	4	5	6
heap[p]	15	8	14	7	6	14	10

Ein einfaches heap-Feld enthält direkt die Prioritätswerte.

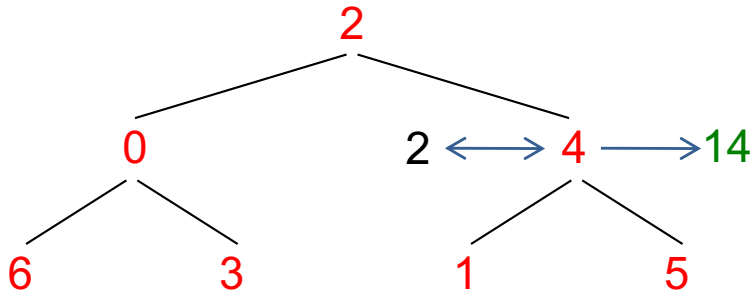
Nummer i	0	1	2	3	4	5	6
prio[i]	8	14	15	6	14	10	7

Das prio-Feld ordnet jeder Nummer den zugehörigen Proritätswert zu.

- Das Element mit Nummer 4 hat den Prioritätswert 14 und steht im Heap-Feld an der Position 2.
- Problem: wie kann beispielsweise bei Element mit Nummer 4 der Prioritätswert effizient von 14 auf 20 erhöht werden.

Index-Heap löst das Problemstellung effizient

- Das heap-Feld enthält nun die Nummern (Indizes) der Elemente statt den Prioritätswerten.
- Es wird nun zusätzlich ein pos-Feld benötigt, das für jede Nummer die Position des Elements im Heap angibt.



Position p	0	1	2	3	4	5	6
heap[p]	2	0	4	6	3	1	5

heap-Feld enthält Nummer statt Prioritätswert

Nummer i	0	1	2	3	4	5	6
prio[i]	8	14	15	6	14	10	7
pos[i]	1	5	0	4	2	6	3

Das prio-Feld ordnet jeder Nummer den zugehörigen Proritätswert zu.

Das Pos-Feld gibt für jede Nummer die Position im Heap-Feld an.

- Es gilt: pos[heap[p]] = p und heap[pos[i]] = i (pos ist die inverse Abbildung zu heap).

Operation insert

- Die Algorithmen für insert, deleteMax und build müssen leicht angepasst werden, wie am Beispiel insert zu sehen ist.
- Die Laufzeit von allen Operationen bleibt bei O(log n).

```
private void upheap(int k) {
        int x = heap[k];
        while (k > 0 && heap[(k-1)/2] < x) {
                heap[k] = heap[(k-1)/2];
                k = (k-1)/2;
        }
        heap[k] = x;
}

public void insert(int x) {
        heap[n++] = x;
        upheap(n-1);
}
```

Fügt Element mit Priorität x in den Heap ein

insert und upheap mit einfachem Binär-Heap

```
private void upheap(int k) {
        int i = heap[k];    // i ist hier eine Nummer
        while (k > 0 && < prio[heap[(k-1)/2]] < prio[i]) {
                heap[k] = heap[(k-1)/2];
                pos[heap[k]] = k;
                k = (k-1)/2;
        }
        heap[k] = i;
        pos[i] = k;
}

public void insert(int i, int x) {
        if (pos[i] != -1) return;
        prio[i] = x;
        heap[n] = i;
        pos[i] = n;
        n++;
        upheap(n-1);
}
```

Fügt Element mit Nummer i und Priorität x in den Heap ein

Falls i bereits im Heap vorhanden ist, dann mache nichts.

insert und upheap mit Index-Heap

Operation change und remove

```
public int change(int i, int x) {
        if (pos[i] == -1)
                return;
        int oldPrio = prio[i];
        prio[i] = x;
        upheap(pos[i]);
        downheap(pos[i]);
        return oldPrio;
}
```

Ändert den Vorrangswert des Elements mit Nummer i auf den neuen Wert x.

i muss bereits im Heap vorhanden sein.

Je nach neuer Priorität wird das Element nach unten oder nach oben verschoben

```
public void remove(int i) {
        if (pos[i] == -1)
                return;
        int remPos = pos[i];
        pos[i] = -1;
        heap[remPos] = heap[n-1];
        pos[heap[remPos]] = remPos;
        n--;
        upheap(remPos);
        downheap(remPos);
}
```

Löscht das Element mit Nummer i aus dem Heap.

i muss bereits im Heap vorhanden sein.

i aus Heap löschen.

Je nach Priorität wird das Element unten oder nach oben verschoben.

Übersicht über Laufzeiten

Datenstruktur	deleteMax()	insert(i, x)	build(i[ ], x[ ])	change(i, x)	remove(i)
Binäre Heaps (Java API PriorityQueue)	O(log n)	O(log n)	O(n)	O(n)	O(n)
Index-Heaps	O(log n)	O(log n)	O(n)	O(log n)	O(log n)

- Alle Komplexitätsangaben für Prioritätslisten mit n Elementen.
- Bei binären Heaps werden die Operationen change(i, x) und remove(i) nicht direkt unterstützt. Daher muss das Heap-Feld zuerst durchlaufen werden, um das Element x zu lokalisieren.

Beliebiger Schlüsseltyp statt Nummerierung

- Elemente haben statt Nummerierung 0,1, ... n-1 einen beliebigen aber eindeutigen Schlüssel (key).
- Speichere im Heap-Feld Schlüssel ab.
- Schlüssel, Prioritätswert und Position im Heap werden in einer HashMap abgespeichert.

Position p	0	1	2	3	4	5	6
heap[p]	k2	k0	k4	k6	k3	k1	k5

heap-Feld enthält Schlüssel (keys)

Schlüssel	k0	k1	k2	k3	k4	k5	k6
Priorität	8	14	15	6	14	10	7
Position im Heap	1	5	0	4	2	6	3

HashMap mit Schlüssel und Prioriätswert und Heap-Position als Nutzdaten (value)

6. Prioritätslisten (Priority Queues)

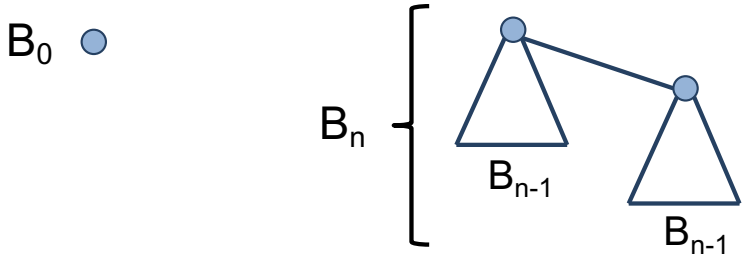
- Definition und Anwendungen
- Binäre Heaps
- Anwendung: HeapSort
- Index-Heaps mit change- und remove-Operation
- Binomiale Heaps mit merge-Operation

Effizientes Verschmelzen von Prioritätslisten

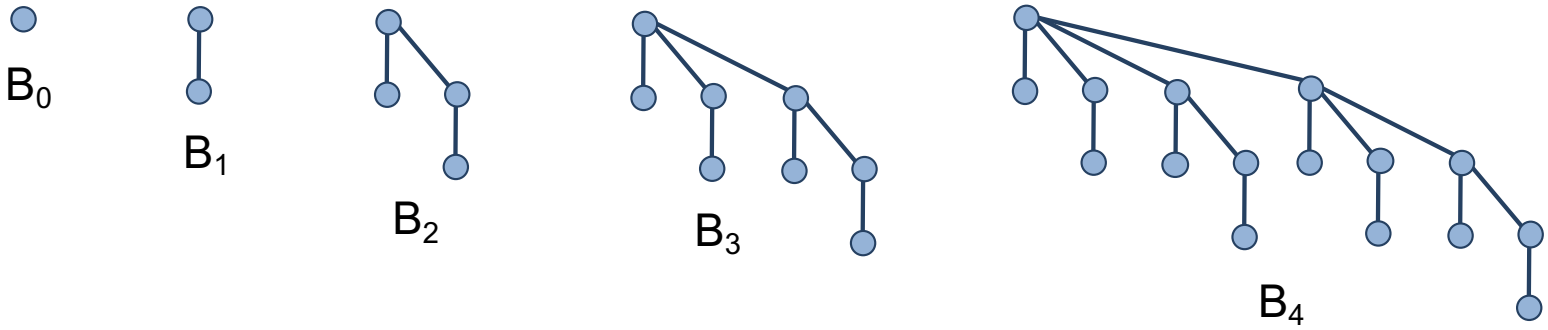
- Verschmelzung von 2 Prioritätslisten:
  - prioList1.merge(prioList2)
- Weiterhin:
  - deleteMax() : löscht Element mit größter Priorität
  - insert(x): fügt neues Element mit Priorität x ein.
  - build(x[ ]): Aufbau einer Prioritätsliste aus Feld von Elementen.
- Lösung mit einem Binomialen Heap.

Binomiale Bäume

- Ein binomialer Baum B_n wird rekursiv wie folgt definiert:
  - B_0 besteht aus einem einzigen Knoten
  - ein binomialer Baum B_n wird gebildet, indem an die Wurzel eines binomialen Baums B_{n-1} ein weiterer binomialer Baum B_{n-1} als rechtes Kind gehängt wird.

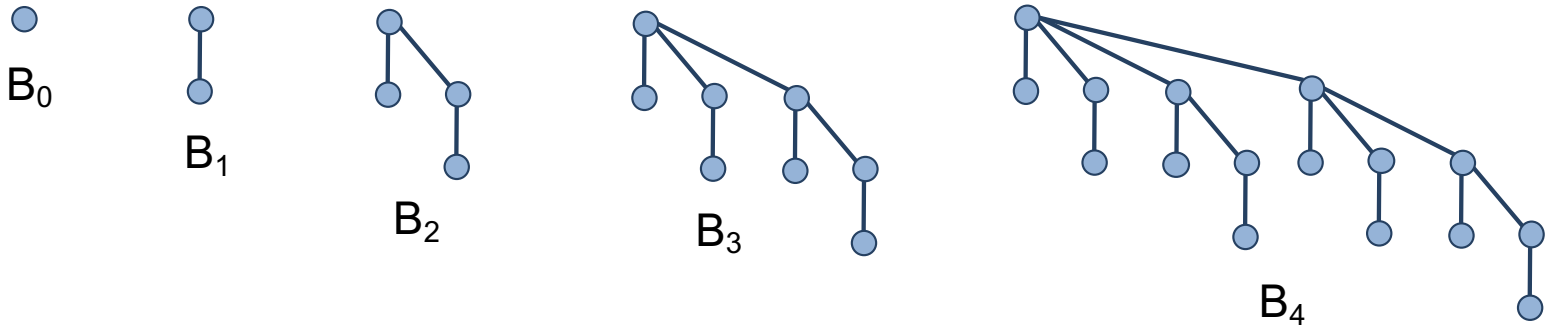


- Die binomialen Bäume B_0 bis B_4 sehen damit wie folgt aus:



Eigenschaften binomialer Bäume (1)

- Die Wurzel von B_n hat die Kinder B_0, B_1, ..., B_{n-1}.
  (Beweis induktiv über n)
- B_n hat die Höhe n.
- B_n besteht aus genau 2^n Knoten.



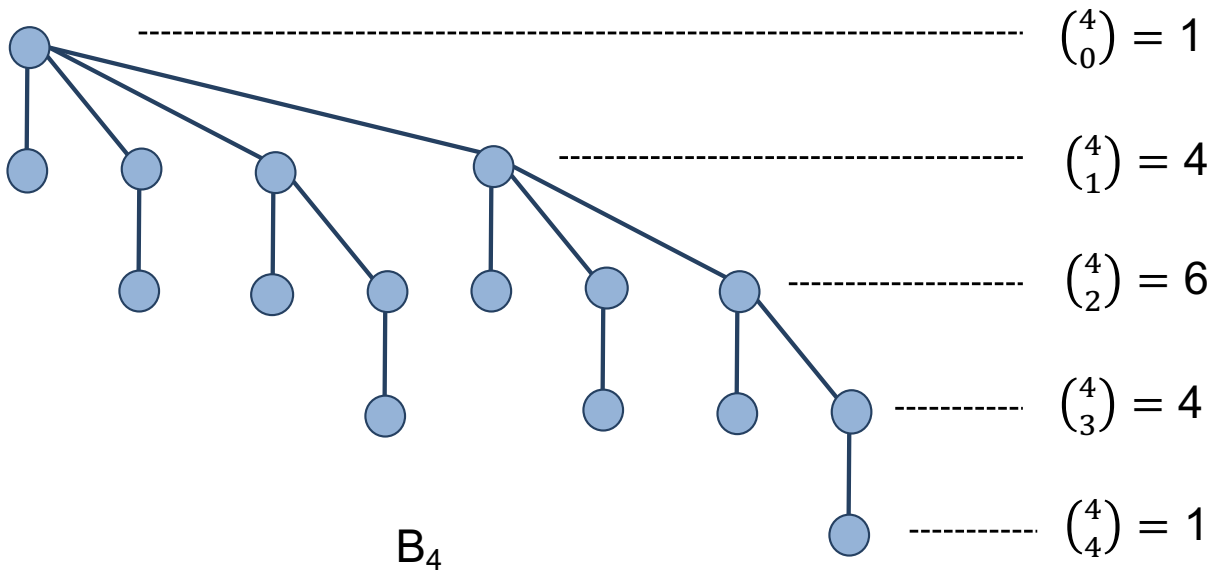
Beispiel:

- B_4 hat B_0, B_1, B_2 und B_3 als Kinder.
- B_4 hat die Höhe 4.
- B_4 besteht aus genau $2^4 = 16$ Knoten.

Eigenschaften binomialer Bäume (2)

- B_n hat in der Ebene k genau $\binom{n}{k}$ Knoten.

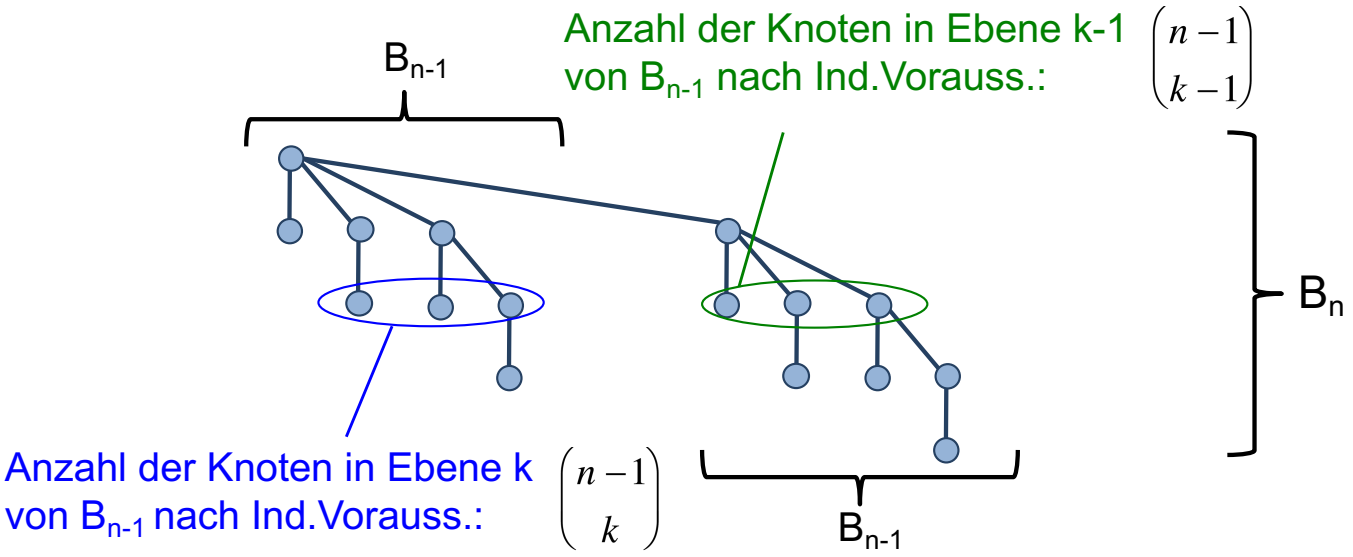
  Daher auch der Name Binomiale Bäume.



Eigenschaften binomialer Bäume (3)

- B_n hat in der Ebene k genau $\binom{n}{k}$ Knoten.

  Beweis durch Induktion über n:



Die Anzahl der Knoten von B_n in der Ebene k ist damit:

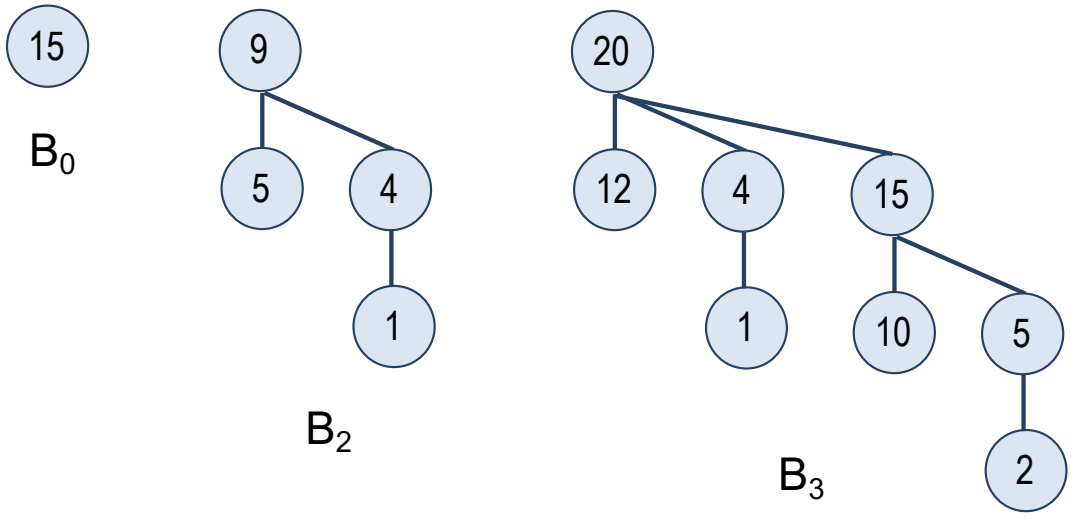
$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

Binomiale Heaps

- Ein binomialer Heap ist eine Folge von binomialen Bäumen (Wald) mit folgenden Eigenschaften:
  - die binomialen Bäume erfüllen die Heap-Ordnung (Eltern ≥ Kinder),
  - die binomialen Bäume haben unterschiedliche Größen,
  - die binomialen Bäumen sind der Größe nach aufsteigend sortiert.
- Ein binomialer Heap mit n Elementen hat höchstens $\lceil \log_2(n) \rceil$ viele Binomialbäume.

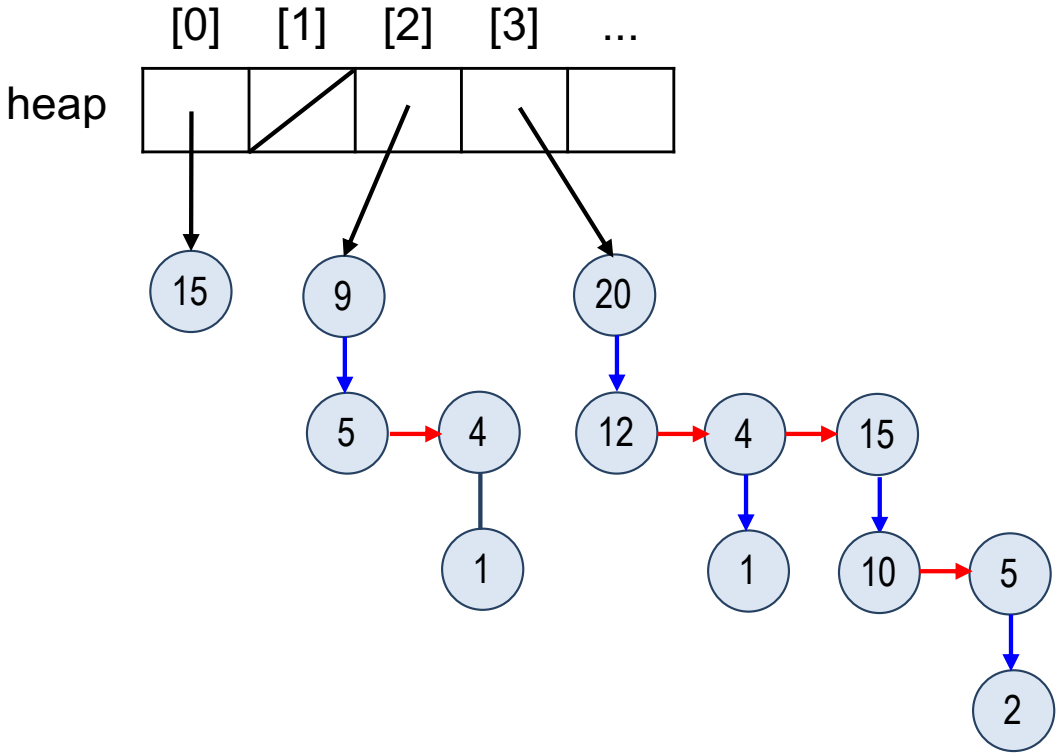
Beispiel:

Ein binomialer Heap mit den drei heap-geordneten Binomialbäumen B_0 , B_2 und B_3 und insgesamt 13 Elementen.



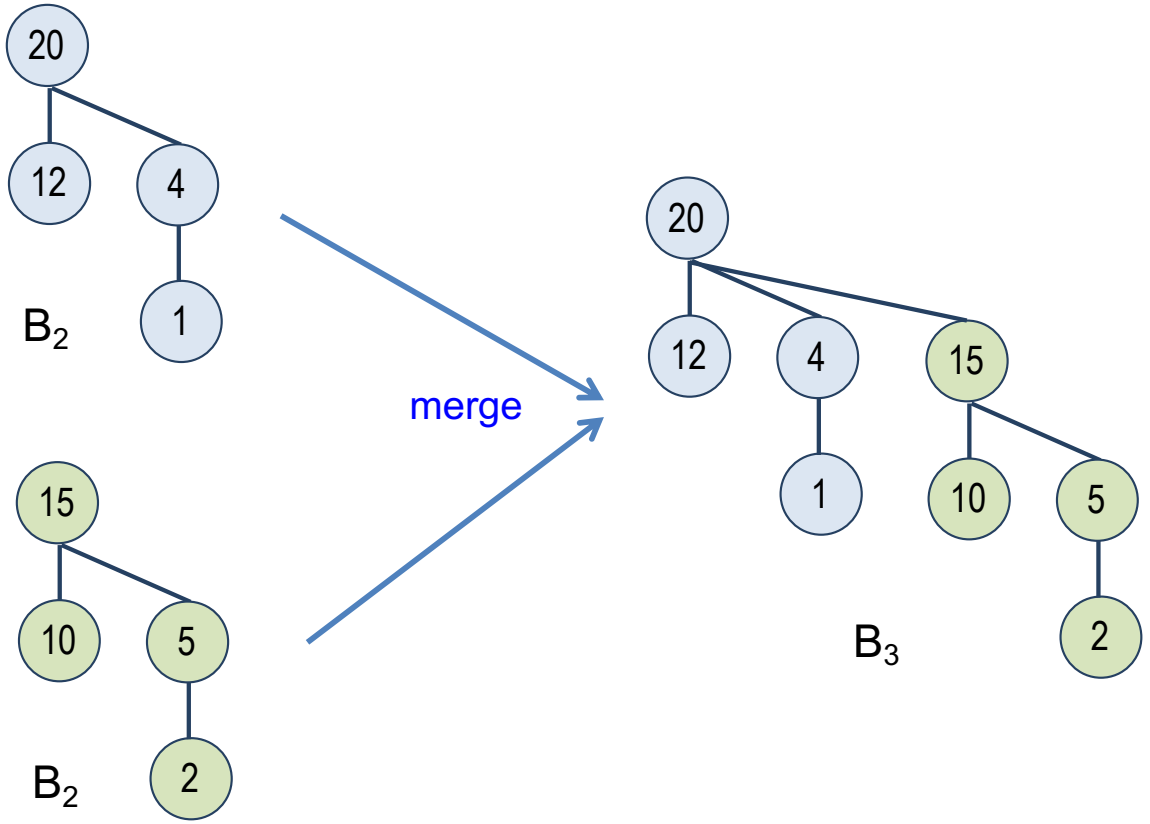
Implementierung von binomialen Heaps

- Die Folge von Binomialbäumen wird in einem Feld heap gehalten, wobei heap[k] eine Referenz auf den Binomialbaum B_k ist.
- Die einzelnen Binomialbäume werden als verzeigerte Struktur realisiert, wobei jeder Knoten einen Verweis auf sein erstes Kind und einen Verweis auf seinen rechten Geschwisterknoten (sofern vorhanden) hat.
- Der Binomiale Heap von voriger Seite ließe sich damit wie folgt implementieren:



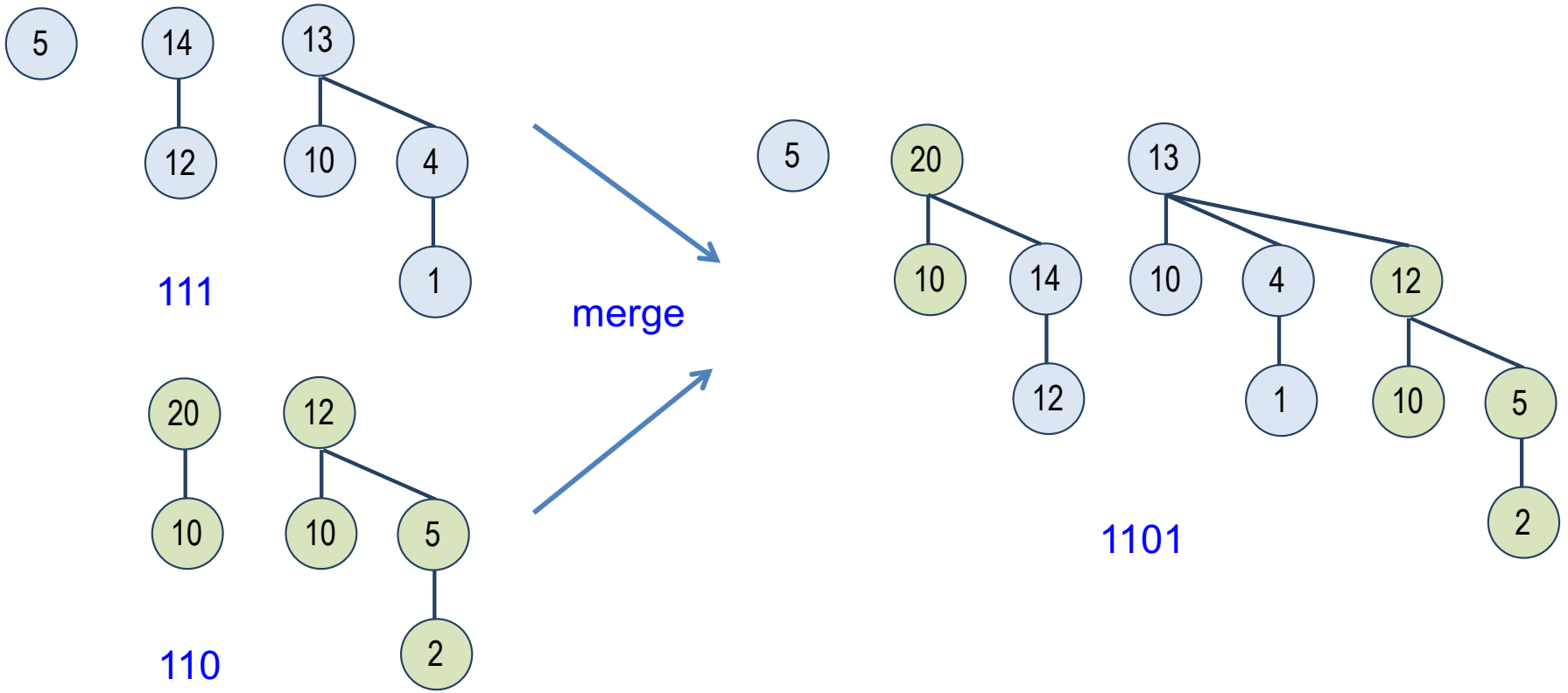
Merge-Operation bei Heap-geordneten Binomialbäumen

- Zwei heap-geordnete Binomialbäume mit der gleichen Größe B_n lassen sich zu einem heap-geordneten Binomialbaum B_{n+1} verschmelzen, indem der Baum mit der kleineren Wurzel als rechtes Kind an die Wurzel des anderen Baums gehängt wird.
- Beispiel:

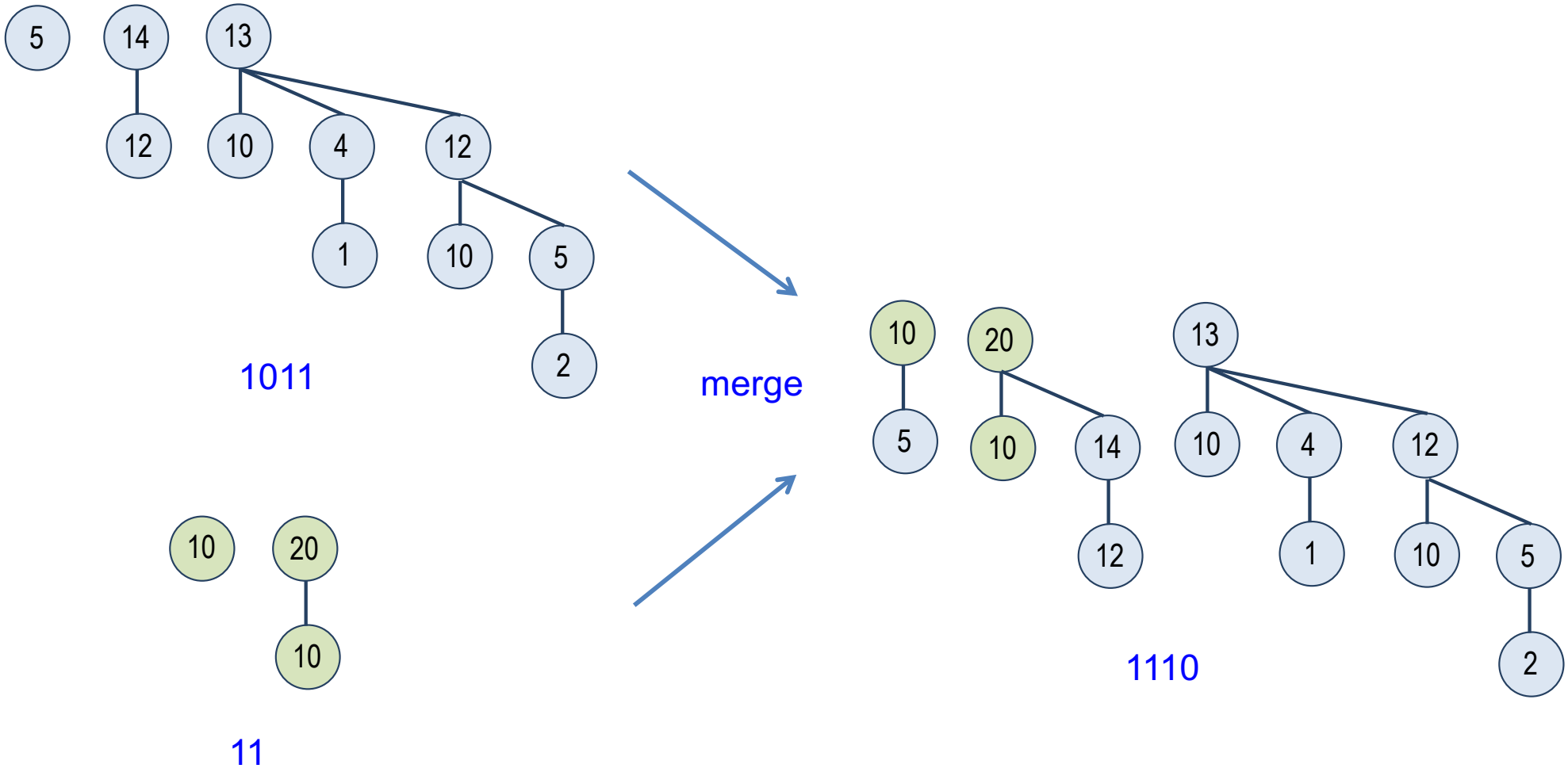


Merge-Operation bei binomialen Heaps

- Zwei binomiale Heaps werden miteinander verschmolzen, indem jeweils Binomialbäume der gleichen Größe miteinander verschmolzen werden.
- Binomiale Heaps lassen sich zu Binärzahlen $B_n...B_1B_0$ abstrahieren, wobei die Ziffer B_k für das Vorhandensein des Binomialbaums B_k steht.
  Die Merge-Operation entspricht dann der Addition von Binärzahlen.
- Da ein Heap mit n Elementen aus maximal log(n) Binomialbäumen besteht, benötigt merge O(log n).



Weiteres Beispiel für Merge-Operation bei binomialen Heaps



Operation insert und delMax

- insert und delMax werden auf die Operation merge zurückgeführt und benötigen daher ebenfalls O(log n).

```
public void merge(BinomialHeap p) {
        verschmelze Binomial-Heap p zu diesem
        Binomial-Heap wie auf Seite 6-40 beschreiben;
}
```

```
public void insert(int x) {
        erstelle einen BinomialHeap p mit einem Element x;
        this.merge(p);
}
```

```
public int delMax() {
        bestimme aus diesem Binomial-Heap den
        Binomialbaum B mit maximaler Wurzel;
        lösche B aus diesem Binomial-Heap;
        bilde aus den Kindern von B ein Binomial-Heap p;
        this.merge(p);
        return Wert der Wurzel von B;
}
```

Übersicht über Laufzeiten

Datenstruktur	deleteMax	insert	build	merge
Binäre Heaps	O(log n)	O(log n)	O(n)	O(n)
Binomiale Heaps	O(log n)	O(log n)	O(n)	O(log n)

- Alle Komplexitätsangaben für Prioritätslisten mit n Elementen.
- merge wird bei binären Heaps nicht direkt unterstützt und kann wie die Operation build realisiert werden.
- build wie bei binären Heaps in Bottom-Up-Weise:
  (1) Beginne mit n heapgeordneten Binomialbäumen jeweils der Größe 1.
  (2) Verschmelze jeweils 2 heapgeordnete Binomialbäume, so dass n/2 viele heapgeordnete Binomialbäume der doppelten Größe entstehen.
  (Falls Anzahl Binomialbäume ungerade, bleibt ein Binomialbäume übrig, der nicht verschmolzen wird)
  (3) Wiederhole Schritt (2), bis keine Verschmelzung mehr möglich.
  (4) Ergebnis ist ein binomialer Heap.